REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/revuedemathmat21pari

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

RÉDIGÉE PAR MM.

E. HUMBERT

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND

ET

G. PAPELIER

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHEMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE D'ORLÉANS

AVEC LA COLLABORATION DE MM.

N. CHARRUIT,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE DE LYON

E. DESSENON,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE SAINT-LOUIS

P. LAMAIRE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE DE LILLE

CH. RIVIÈRE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR AGRÉGÉ DE PHYSIQUE AU LYCÉE SAINT-LOUIS

A. TARTINVILLE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE SAINT-LOUIS

H. VUIBERT,
RÉDACTEUR DU *Journal de Mathématiques élémentaires*.

TOME ONZIÈME.
Années 1910 à 1912.
21 22

29737 33
9
30

PARIS

LIBRAIRIE NONY & Cie

17, rue des Ecoles, 17.

QA
1
R486
année 21-
22

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

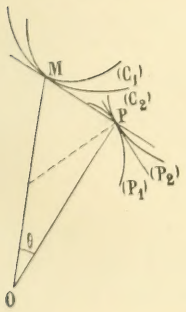
21e Année. — N° 1. Octobre 1910.

PREMIÈRE PARTIE

SUR LE RAYON DE COURBURE DES COURBES PLANES (*Suite*)

par M. **Louis Sire**, boursier d'agrégation à la Faculté des sciences de Lyon.

Système de deux courbes tangentes. — Podaires. — Considérons deux courbes (C_1), (C_2) tangentes en un point M ; leurs podaires (P_1), (P_2) par rapport à un point O seront tangentes au point correspondant P.



La formule F_8 appliquée aux deux systèmes de courbes (C_1), (P_1) et (C_2), (P_2) nous donne les deux relations

$$\frac{\rho_p}{R_{p1}} + \frac{R_1}{4\rho} - 1 = 0, \qquad \frac{\rho_p}{R_{p2}} + \frac{R_2}{4\rho} - 1 = 0,$$

desquelles nous tirons

$$\rho = \frac{R_2R_{p2} - R_1R_{p1}}{4(R_{p2} - R_{p1})}, \qquad \rho_p = \frac{R_{p1}R_{p2}(R_2 - R_1)}{R_2R_{p2} - R_1R_{p1}};$$

nous obtenons ainsi les expressions des rayons ρ, ρ_p en fonction des rayons de courbure de deux courbes tangentes et de leurs podaires.

D'autre part, $\rho_p = \rho \cos\theta$, de sorte que

$$\cos\theta = \frac{4R_{p1}R_{p2}(R_2 - R_1)(R_{p2} - R_{p1})}{(R_2R_{p2} - R_1R_{p1})^2},$$

expression du cosinus de l'angle que fait le rayon vecteur OM avec la perpendiculaire à la tangente.

En particulier, si le point M est le pied d'une normale issue de O aux courbes (C_1) et (C_2), nous avons $\theta = 0$ et par suite la relation

$$(R_2R_{p2} - R_1R_{p1})^2 = 4R_{p1}R_{p2}(R_2 - R_1)(R_{p2} - R_{p1}).$$

Exemple I. — Soient deux cercles tangents en un point M ; prenons leurs podaires par rapport à un point O situé sur leur normale commune ; nous aurons deux limaçons de Pascal de point double O et tangents en un point P tel que OP soit l'axe de symétrie de ces deux limaçons. Si R_1, R_2 désignent les rayons de courbure de ces deux limaçons au point P, b_1, b_2 leurs constantes, nous avons la relation

$$(b_2R_2 - b_1R_1)^2 = 4R_1R_2(R_2 - R_1)(b_2 - b_1).$$

Exemple II. — Prenons les podaires négatives des deux cercles précédents par rapport au point O ; nous obtiendrons deux coniques de foyer O et tangentes en l'un de leurs sommets P. Si R_1, R_2 désignent les rayons de courbure de ces deux coniques au point P, a_1, a_2 leurs demi-grands axes, nous avons la relation

$$(a_2R_2 - a_1R_1)^2 = 4a_1a_2(a_2 - a_1)(R_2 - R_1).$$

D'une manière plus générale, considérons deux courbes tangentes (C_1), (C_2) et leurs podaires d'ordre h (P_{h1}), (P_{h2}) ; pour les deux systèmes de courbes (C_1), (P_{h1}) et (C_2), (P_{h2}), nous avons les deux relations

$$(\beta) \qquad \begin{cases} 4h\rho\rho_h - 2\rho(h+1)R_{ph1} - 2R_1(h-1)\rho_{ph} + hR_1R_{ph1} = 0, \\ 4h\rho\rho_h - 2\rho(h+1)R_{ph2} - 2R_2(h-1)\rho_{ph} + hR_2R_{ph2} = 0, \end{cases}$$

lesquelles déterminent ρ, ρ_h. En retranchant membre à membre ces deux équations (β), nous avons

$$(\gamma) \qquad 2(h+1)(R_{ph2} - R_{ph1})\rho + 2(h-1)(R_2 - R_1)\rho_{ph} + h(R_1R_{ph1} - R_2R_{ph2}) = 0.$$

Supposons, en outre, que le point de contact M soit un point de rebroussement pour la courbe (C_1), c'est-à-dire que $R_1 = 0$; la première des relations (β) devient $\rho_{ph} = \frac{h+1}{2h} R_{ph1}$.

En transportant dans la relation (γ) cette valeur de ρ_{ph}, nous en déduisons

$$\rho = \frac{(h^2-1)R_2R_{ph1} - h^2R_2R_{ph2}}{2h(h+1)(R_{ph1}-R_{ph2})};$$

d'autre part $\rho_{ph} = \rho\cos^h\theta$, d'où

$$\cos^h\theta = \frac{h(h+1)^2R_{ph1}(R_{ph1}-R_{ph2})}{R_2[(h^2-1)R_{ph1}-h^2R_{ph2}]};$$

en particulier, si $\theta = 0$, il vient

$$h(h+1)^2R_{ph1}(R_{ph1}-R_{ph2}) = R_2\,[(h^2-1)R_{ph1}-h^2R_{ph2}].$$

Inverses. — Soient deux courbes (C_1), (C_2) tangentes en un point M ; leurs inverses (I_1), (I_2) par rapport à O seront tangentes au point correspondant I. La formule F_i appliquée aux deux systèmes de courbes (C_1), (I_1) et (C_2), (I_2) donne les deux relations

$$\frac{\rho_i}{R_{i1}} + \frac{\rho}{R_1} - 1 = 0, \qquad \frac{\rho_i}{R_{i2}} + \frac{\rho}{R_2} - 1 = 0,$$

desquelles nous tirons $\rho = \dfrac{R_1R_2(R_{i2}-R_{i1})}{R_1R_{i2}-R_2R_{i1}}$, $\rho_i = \dfrac{R_{i1}R_{i2}(R_1-R_2)}{R_1R_{i2}-R_2R_{i1}}$, de là

$$\frac{\rho}{\rho_i} = -\frac{\dfrac{1}{R_{i1}} - \dfrac{1}{R_{i2}}}{\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}};$$

d'autre part $1 = 4\rho\rho_i\cos^2\theta$, d'où

$$\cos^2\theta = \frac{(R_1R_{i2}-R_2R_{i1})^2}{4R_1R_2R_{i1}R_{i2}(R_1-R_2)(R_{i1}-R_{i2})}$$

1° Le point M est le pied d'une normale issue de O à (C_1), (C_2).

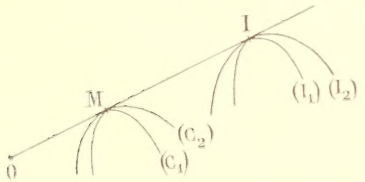
Dans ce cas, $\theta = 0$, par suite on a la relation

$$(R_1R_{i2}-R_2R_{i1})^2 = 4R_1R_2R_{i1}R_{i2}(R_1-R_2)(R_{i1}-R_{i2}).$$

2° Le point M est le point de contact d'une tangente issue de O à (C_1), (C_2).

On a $\theta = \dfrac{\pi}{2}$; de là, la relation $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_{i1}}{R_{i2}}$, laquelle donne le théorème :

Soient (C_1), (C_2) *deux courbes tangentes en un point* M ; (I_1), (I_2) *leurs inverses par rapport à un point de la tangente en* M ; *les rayons de courbure de ces quatre courbes aux points* M, I *forment une proportion.*



Remarque. — Egalons la valeur de ρ obtenue dans le cas des podaires à la valeur de ρ obtenue dans le cas des inverses ; nous avons la relation

$$\frac{R_2R_{p2}-R_1R_{p1}}{4(R_{p2}-R_{p1})} = \frac{R_1R_2(R_{i2}-R_{i1})}{R_1R_{i2}-R_2R_{i1}},$$

laquelle renferme comme éléments les rayons de courbure aux points de contact de deux courbes tangentes et les rayons de courbure aux points correspondants de leurs inverses et de leurs podaires.

Cas où le point M *est d'inflexion pour la courbe* (C_1). — Les formules relatives aux inverses deviennent

$$\rho = \frac{R_2(R_{i2}-R_{i1})}{R_{i2}}, \qquad \rho_i = R_{i1}, \qquad \cos^2\theta = \frac{R_{i2}}{4R_{i1}R_2(R_{i1}-R_{i2})};$$

si M est le pied d'une normale, nous avons $R_{i2} = 4R_{i1}R_2(R_{i1}-R_{i2})$.

Polaires réciproques. — Considérons deux courbes (C_1), (C_2) tangentes en un point M ; leurs polaires réciproques (T_1), (T_2) par rapport à un point O sont tangentes au point correspondant T. La formule F_R appliquée aux deux systèmes de courbes (C_1), (T_1) et (C_2), (T_2) donne les relations $R_1R_{r1} = 4\rho\rho_r$, $R_2R_{r2} = 4\rho\rho_r$, de là

$$(\delta) \qquad R_1R_{r1} = R_2R_{r2}, \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_{r2}}{R_{r1}},$$

ce qui donne le théorème :

Les rayons de courbure au point de contact de deux courbes tangentes et au point de contact de leurs polaires réciproques forment une proportion inverse.

En particulier, si les courbes (C_1), (C_2) sont des coniques de foyer O, on retrouve le théorème que j'ai établi (*Revue*, juin 1909) :

Deux coniques qui ont un foyer commun O *et qui sont tangentes en un point ont leurs rayons de courbure en ce point inversement proportionnels aux rayons de leurs cercles polaires réciproques par rapport à* O.

Si le cercle directeur est osculateur en M à la courbe (C_1), nous aurons $R_{r1} = R_1$, de sorte que la relation (δ) devient $R_1^2 = R_2 R_{r2}$, par suite :

Le rayon de courbure en un point M *d'une courbe* (C_1) *est moyen proportionnel entre le rayon de courbure en* M *d'une courbe* (C_2) *tangente en* M *à* (C_1) *et le rayon de courbure de la polaire réciproque de* (C_2) *par rapport au cercle osculateur en* M *à* (C_1).

Reprenons la formule F_R sous la forme $RR_r = \frac{1}{\cos^3\theta}$, et supposons que le point M soit le pied d'une normale issue de O à une courbe (C_1) ; nous aurons pour ce point $RR_r = 1$; de là, la proposition qui généralise la précédente :

Le rayon du cercle directeur est moyen proportionnel entre le rayon de courbure en un point M *d'une courbe* (C_1), *pied d'une normale issue de* O *et le rayon de courbure au point correspondant de sa polaire réciproque.*

Si du centre du cercle directeur nous pouvons abaisser deux normales OM_1, OM_2 sur la courbe (C_1), nous aurons $R_1 R_{r1} = R_2 R_{r2}$ ou $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_{r2}}{R_{r1}}$, c'est-à-dire :

Les rayons de courbure aux pieds de deux normales abaissées du centre du cercle directeur à une courbe et les rayons de courbure aux points correspondants de sa polaire réciproque forment une proportion inverse.

Reprenons un système de deux courbes (C_1), (C_2) tangentes en un point M ; prenons sa polaire réciproque par rapport à deux points O′, O″. La formule (δ) nous donne les deux relations

$$R_1 R'_{r1} = R_2 R'_{r2}, \qquad R_1 R''_{r1} = R_2 R''_{r2}; \qquad \text{par suite} \qquad \frac{R'_{r1}}{R''_{r1}} = \frac{R'_{r2}}{R''_{r2}}; \quad \text{de là :}$$

Si deux systèmes de deux courbes tangentes sont les polaires réciproques d'un même système de deux courbes tangentes par rapport à deux points, leurs rayons de courbure aux deux points de tangence forment une proportion.

Systèmes de trois courbes tangentes. — **Podaires.** — Considérons trois courbes (C_1), (C_2), (C_3) tangentes en un point M ; leurs podaires (P_1), (P_2), (P_3) seront tangentes au point correspondant P. La formule F_S appliquée aux trois couples de courbes (C_1), (P_1) ; (C_2), (P_2) ; (C_3), (P_3) donne les relations :

$$\frac{\rho_p}{R_{p1}} + \frac{R_1}{4\rho} - 1 = 0, \qquad \frac{\rho_p}{R_{p2}} + \frac{R_2}{4\rho} - 1 = 0, \qquad \frac{\rho_p}{R_{p3}} + \frac{R_3}{4\rho} - 1 = 0,$$

que nous écrivons

$$4\rho\rho_p - 4\rho R_{p1} + R_1 R_{p1} = 0, \qquad 4\rho\rho_p - 4\rho R_{p2} + R_2 R_{p2} = 0, \qquad 4\rho\rho_p - 4\rho R_{p3} + R_3 R_{p3} = 0.$$

L'élimination de $\rho\rho_p$ et ρ entre ces trois équations nous conduit à la relation

$$(\omega) \qquad \begin{vmatrix} R_1 R_{p1} & R_{p1} & 1 \\ R_2 R_{p2} & R_{p2} & 1 \\ R_3 R_{p3} & R_{p3} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

de là :

Si trois courbes sont tangentes en un point, leurs rayons de courbure en ce point et les rayons de courbure au point homologue de leurs podaires par rapport à un point quelconque, sont liés par la relation (ω).

Cette relation (ω), développée, s'écrit $(R_1 - R_2)R_{p1}R_{p2} + (R_2 - R_3)R_{p2}R_{p3} + (R_3 - R_1)R_{p3}R_{p1} = 0$.

Si on considère les podaires négatives des courbes (C_1), (C_2), (C_3) par rapport au point O, on obtient de même la relation

$$(\pi) \qquad \begin{vmatrix} R_{p-1} R_1 & R_1 & 1 \\ R_{p-2} R_2 & R_2 & 1 \\ R_{p-3} R_3 & R_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle, développée, s'écrit $(R_{p-1} - R_{p-2})R_1 R_2 + (R_{p-2} - R_{p-3})R_2 R_3 + (R_{p-3} - R_{p-1})R_3 R_1 = 0$, par suite :

Si trois courbes sont tangentes en un point, leurs rayons de courbure en ce point et les rayons de courbure au point homologue de leurs podaires négatives par rapport à un point quelconque sont liés par la relation (π).

Application au limaçon de Pascal. — Supposons que les courbes (C_1), (C_2), (C_3) soient trois cercles tangents en un point M ; leurs podaires par rapport à un point quelconque O seront trois limaçons de point double O et tangents en un point P. Si b_1, b_2, b_3 désignent les constantes de ces limaçons, R_1, R_2, R_3 leurs rayons de courbure au point P, la formule (ω) donne la relation

$$(\gamma) \qquad \begin{vmatrix} b_1 R_1 & R_1 & 1 \\ b_2 R_2 & R_2 & 1 \\ b_3 R_3 & R_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

que l'on peut écrire $R_1R_2(b_1 - b_2) + R_2R(b_2 - b) + RR_1(b - b_1) = 0$;
de là, ce théorème :

Si trois limaçons de Pascal ont même point double et sont tangents en un point, leurs rayons de courbure en ce point satisfont à la relation (γ).

En particulier, si le cercle (C_1) a un rayon nul $(b_1 = 0)$, sa podaire par rapport à O se réduit au cercle décrit sur OM comme diamètre ; nous avons donc, dans ce cas, $R_1 = \frac{OM}{2} = b_2$; de sorte que la relation (γ) devient

$$(\mu) \qquad b_1(R_2b - R_2b_2) + R_2R(b_2 - b) = 0,$$

c'est-à-dire :

Si deux limaçons de Pascal ont même point double et sont tangents en un point, leurs rayons de courbure en ce point satisfont à la relation (μ).

Application aux coniques. — Considérons, de même, trois cercles (C_1), (C_2), (C_3) tangents en un point M ; leurs podaires négatives par rapport à un point quelconque O seront trois coniques de foyer O et tangentes en un point P. Si a_1, a_2, a_3 désignent les longueurs des demi-grands axes de ces coniques, R_1, R_2, R leurs rayons de courbure au point P, la formule (π) donne la relation

$$(\nu) \qquad \begin{vmatrix} a_2R_1 & a_1 & 1 \\ a_3R_2 & a_2 & 1 \\ a_1R & a & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore

$$a_1a_2(R_1 - R_2) + a_2a(R_2 - R) + a_3a_1(R_1 - R) = 0,$$

de là, ce théorème :

Si trois coniques ont un foyer commun et sont tangentes en un point, leurs rayons de courbure en ce point satisfont à la relation (ν).

En particulier, si le cercle (C_1) se réduit à une droite $(a_1 = \infty)$, sa podaire négative par rapport à O est une parabole de foyer O ; dans ce cas, la relation (ν) devient

$$(\xi) \qquad a(R_2 - R) + a_2(R_1 - R) = 0,$$

c'est-à-dire :

Si deux coniques à centre ont une parabole de foyer commun et sont tangentes en un point, leurs rayons de courbure en ce point satisfont à la relation (ξ).

Cas où le point P *est d'inflexion pour la courbe* (P_1). — Dans ce cas, nous savons qu'il existe une parabole de foyer O, ayant un contact du second ordre avec la courbe (C_1) ; nous pouvons ainsi remplacer la courbe (C_1) par cette parabole. La relation (ω) où $R_{p1} = \infty$ donne

$$(\tau) \qquad (R_1 - R_2)R_p + (R - R_2)R_1 = 0,$$

par suite :

Si deux courbes quelconques et un cercle sont tangents en un même point, leurs rayons de courbure en ce point et les rayons de courbure au point homologue de leurs podaires par rapport au foyer de la parabole satisfont à la relation (τ).

Cas où le point M *est de rebroussement pour la courbe* (C_1). — Dans ce cas, le cercle osculateur en (P) à la courbe (P_1) passe par O et nous pouvons remplacer la courbe (P_1) par ce cercle. La relation (ω) où $R_1 = 0$ donne

$$(\zeta) \qquad (R_2 - R)R_1R_{p1} + RR_1R_2 - R_2R_{p1}R_{p1} = 0,$$

par suite :

Si deux courbes quelconques et un cercle sont tangents en un point, leurs rayons de courbure en ce point et les rayons de courbure de leurs podaires négatives par rapport à un point de ce cercle satisfont à la relation (ζ).

Les deux dernières propriétés généralisent les relations (μ), (ξ) ; elles s'en déduisent d'ailleurs immédiatement, puisqu'au point de vue des rayons de courbure on peut remplacer une courbe par chacun de ses cercles osculateurs.

Cela étant, revenons aux relations (ω) et (π) et remarquons qu'elles sont complètement indépendantes du point par rapport auquel on prend les podaires. Prenons les podaires de trois courbes (C_1), (C_2), (C_3) tangentes en M par rapport à deux points O′, O″. La formule (ω) appliquée à ce système de courbes tangentes et à chaque système de podaires donne les relations

$$R'_{p1}R'_{p2}(R_1 - R_2) + R_2R'_{p1}(R - R_1) + R_1R'_{p2}(R - R_2) = 0,$$
$$R''_{p1}R''_{p2}(R_1 - R_2) + R_2R''_{p1}(R - R_2) + R_1R''_{p2}(R - R_1) = 0.$$

Or

$$(R_1 - R_2) + (R_2 - R) + (R - R_1) = 0;$$

l'élimination de $R_1 - R_2$, $R_2 - R_3$, $R_3 - R_1$ entre ces trois équations nous conduit à la relation

$$(\psi) \qquad \begin{vmatrix} R'_{p1}R'_{p2} & R'_{p2}R'_{p3} & R'_{p3}R'_{p1} \\ R''_{p1}R''_{p2} & R''_{p2}R''_{p3} & R''_{p3}R''_{p1} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 ;$$

de là, le théorème :

Si deux systèmes de trois courbes tangentes sont les podaires d'un même système de trois courbes tangentes par rapport à deux points différents, les rayons de courbure de ces deux systèmes aux deux points de tangence satisfont à la relation (ψ).

Prenons de même les podaires négatives d'un système de trois courbes tangentes en un même point M, par rapport à deux points différents O′, O″. La formule (π) donne les deux relations

$$R'_1(R_1R_2 - R_3R_1) + R'_2(R_2R_3 - R_1R_2) + R'_3(R_3R_1 - R_2R_3) = 0,$$

$$R''_1(R_1R_2 - R_3R_1) + R''_2(R_2R_3 - R_1R_2) + R''_3(R_3R_1 - R_2R_3) = 0.$$

Or

$$(R_1R_2 - R_3R_1) + (R_2R_3 - R_1R_2) + (R_3R_1 - R_2R_3) = 0,$$

les R′ désignant les rayons de courbure des podaires négatives ; l'élimination de $R_1R_2 - R_3R_1$, $R_2R_3 - R_1R_2$, $R_3R_1 - R_2R_3$ entre ces trois équations, nous conduit à la relation

$$(f) \qquad \begin{vmatrix} R'_1 & R'_2 & R'_3 \\ R''_1 & R''_2 & R''_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle donne le théorème :

Si deux systèmes de trois courbes tangentes sont les podaires négatives d'un même système de trois courbes tangentes par rapport à deux points différents, les rayons de courbure de ces deux systèmes aux deux points de tangence satisfont à la relation (f).

Cas particuliers. — Si le point O′ est le foyer d'une parabole ayant un contact du second ordre en M avec la courbe (C_1), on peut appliquer une fois la relation (σ) ; la formule (ψ) se simplifie et peut se mettre sous la forme

$$(\psi') \qquad \begin{vmatrix} R''_{p2}(R'_{p1} - R''_{p1}) & R''_{p3}(R'_{p1} - R''_{p1}) \\ R'_{p2} & R'_{p3} \end{vmatrix} = 0.$$

Si O″ est le foyer d'une seconde parabole jouissant de la même propriété que la précédente, nous aurons en outre $R''_{p1} = \infty$ et la relation (ψ') devient $\dfrac{R''_{p2}}{R''_{p3}} = \dfrac{R'_{p2}}{R'_{p3}}$.

Or, le lieu des foyers des paraboles qui ont un contact du second ordre en M avec une courbe (C_1) est un cercle tangent en M à (C_1) ; de là, la courbe (C_1) étant quelconque :

Si deux systèmes de deux courbes tangentes sont les podaires d'un même système de deux courbes (C_2), (C_3) *tangentes en un point* M, *par rapport à deux points* O′, O″ *situés sur un cercle tangent en* M *à* (C_2), (C_3), *les rayons de courbure aux deux points de tangence forment une proportion.*

Partons de même de la relation (f) et faisons successivement $R_1 = 0$, $R'_1 = 0$, c'est-à-dire supposons que les points O′, O″ satisfassent à la même condition que précédemment, nous obtiendrons $\dfrac{R'_2}{R'_3} = \dfrac{R''_2}{R''_3}$, d'où le même théorème pour les podaires négatives.

Application au limaçon de Pascal. — Considérons trois cercles (C_1), (C_2), (C_3) tangents en un point M ; leurs podaires par rapport à un point O′ sont trois limaçons de Pascal de point double O′, tangents en un point P′ et de constantes b_1, b_2, b_3 égales aux rayons de ces cercles ; leurs podaires par rapport à un second point O″ sont trois limaçons de point double O″, tangents en un point P″ et de mêmes constantes b_1, b_2, b_3. Les rayons de courbure aux points P′, P″ satisfont à la relation (ψ) ; de là :

Si deux systèmes de trois limaçons de Pascal ayant même point double et tangents en un point ont mêmes constantes, les rayons de courbure aux deux points de tangence satisfont à la relation (ψ).

Ces rayons de courbure satisfont à la relation (ψ') si le point O′ est le foyer d'une parabole ayant un contact du second ordre en M avec le cercle (C_1) ; ils forment une proportion s'il en est de même du point O″.

Application aux coniques. — En prenant les podaires négatives des trois cercles (C_1), (C_2), (C_3) par rapport à deux points O′, O″, on arrive de même à la propriété suivante :

Si deux systèmes de trois coniques ayant même foyer et tangentes en un point ont mêmes longueurs de grands axes, les rayons de courbure aux deux points de tangence satisfont à la relation (f).

Ces rayons de courbure satisfont à une relation (f') simplifiée si le point O′ est sur le cercle (C_1) ; ils forment une proportion s'il en est de même du point O″.

Inverses. — Considérons trois courbes (C_1), (C_2), (C_3) tangentes en un point M ; leurs inverses (I_1), (I_2), (I_3) seront tangentes au point correspondant I. — La formule F_i appliquée aux trois couples de courbes (C_1), (I_1); (C_2), (I_2) ; (C_3), (I_3) donne les relations

$$\frac{\rho_1}{R'_1} + \frac{\rho}{R_1} - 1 = 0, \qquad \frac{\rho_2}{R'_2} + \frac{\rho}{R_2} - 1 = 0, \qquad \frac{\rho_3}{R'_3} + \frac{\rho}{R_3} - 1 = 0,$$

que nous pouvons écrire $\rho_1 R_1 + \rho R'_1 - R_1 R'_1 = 0$, $\rho_2 R_2 + \rho R'_2 - R_2 R'_2 = 0$, $\rho_3 R_3 + \rho R'_3 - R_3 R'_3 = 0$.

L'élimination de ρ_i, ρ entre ces trois équations nous conduit à la relation

$$(\varphi) \qquad \begin{vmatrix} R_1 & R'_1 & R_1 R'_1 \\ R_2 & R'_2 & R_2 R'_2 \\ R_3 & R'_3 & R_3 R'_3 \end{vmatrix} = 0,$$

de là :

Si trois courbes sont tangentes en un point, leurs rayons de courbure en ce point et les rayons de courbure au point homologue de leurs inverses par rapport à un point quelconque sont liés par la relation (φ).

Cette relation (φ), développée, s'écrit $R_1 R'_2 R'_3 (R_1 - R_2) + R_2 R'_3 R'_1 (R_2 - R_3) + R_3 R'_1 R'_2 (R_3 - R_1) = 0$.

Si le point M est un point d'inflexion pour la courbe $(C_1)(R_1 = \infty)$, la relation (φ) devient

$$(\psi) \qquad R'_2 R'_3 (R_2 - R_3) + R_2 R'_3 R'_1 (R_3 - R_1) = 0.$$

Prenons les inverses du système de trois courbes (C_1), (C_2), (C_3), tangentes en M, par rapport à deux points différents O′, O″. La formule (φ) nous donne les deux relations

$$R'_1 R'_2 (R_2 R'_3 - R_3 R'_2) + R'_2 R'_3 (R_3 R'_1 - R_1 R'_3) + R'_3 R'_1 (R_1 R'_2 - R_2 R'_1) = 0,$$

$$R''_1 R''_2 (R_2 R'_3 - R_3 R'_2) + R''_2 R''_3 (R_3 R'_1 - R_1 R'_3) + R''_3 R''_1 (R_1 R'_2 - R_2 R'_1) = 0.$$

Or

$$(R_2 R'_3 - R_3 R'_2) + (R_3 R'_1 - R_1 R'_3) + (R_1 R'_2 - R_2 R'_1) = 0,$$

l'élimination des trois quantités entre parenthèses qui figurent dans la dernière équation nous conduit à la relation

$$(\zeta) \qquad \begin{vmatrix} R'_1 R'_2 & R'_2 R'_3 & R'_3 R'_1 \\ R''_1 R''_2 & R''_2 R''_3 & R''_3 R''_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

de là, le théorème :

Si deux systèmes de trois courbes tangentes sont les inverses d'un même système de trois courbes tangentes par rapport à deux points différents, les rayons de courbure de ces deux systèmes aux deux points de tangence satisfont à la relation (ζ).

Remarquons que la relation (ζ) est la même que la relation (τ).

Rayon de courbure d'une conique. — J'ai établi la proposition suivante (*Revue*, juin 1909) :

La condition nécessaire et suffisante pour que les rayons de courbure de deux coniques aux points de contact de deux tangentes communes forment une proportion inverse est que ces quatre points soient sur un cercle.

On doit à Duporcq le théorème suivant (*) :

La condition nécessaire et suffisante pour que les points de contact des tangentes communes à deux coniques soient sur un cercle est que leurs foyers soient sur un cercle et y forment une division harmonique.

De là :

Lorsque les foyers de deux coniques sont sur un cercle et y forment une division harmonique, le produit des rayons de courbure aux points de contact d'une tangente commune quelconque est constant.

(*A suivre.*)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1836. — *Si deux quadriques qui ont deux génératrices communes de même système se coupent à angle droit en tous les points de l'une de ces génératrices, elles se coupent à angle droit en tous les points de l'autre.*

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1904.

Soient (G) $y - mx = 0$, $z - h = 0$; (G′) $y + mx = 0$, $z + h = 0$, les équations des deux génératrices G et G′ de même système, communes aux quadriques S et S′, que l'on suppose indécomposables (*) ; les équations de ces quadriques peuvent être mises sous la forme

$$(S)\quad A(y - mx)(y + mx) + B(y - mx)(z + h) + C(y + mx)(z - h) + D(z - h)(z + h) = 0,$$

$$(S')\quad A'(y - mx)(y + mx) + B'(y - mx)(z + h) + C'(y + mx)(z - h) + D'(z - h)(z + h) = 0,$$

les déterminants $AD - BC$ et $A'D' - B'C'$ ne sont pas nuls.

Le plan P, $y - mx - \lambda(z - h) = 0$, touche la surface S en un point A de la génératrice G ; le plan P′, $y - mx - \mu(z - h) = 0$, touche la surface S′ en un point A′ de la génératrice G. Pour que ces deux plans soient rectangulaires, il faut que

$$(1)\qquad m^2 + 1 + \lambda\mu = 0.$$

Cherchons maintenant la condition pour que A et A′ coïncident. Pour avoir l'abscisse de A on remplace dans l'équation (S) $y - mx$ par $\lambda(z - h)$, $z - h$ est alors en facteur ; on divise par $z - h$ et dans le quotient on fait $y = mx$ et $z = h$. On obtient ainsi

$$(2)\qquad mx(\lambda A + C) + h(B\lambda + D) = 0.$$

La coordonnée x de A′ satisfait à l'équation analogue

$$(3)\qquad mx(\mu A' + C') + h(B'\mu + D') = 0.$$

En égalant ces valeurs de x, on trouve une équation en λ et μ indépendante de m et de h :

$$(4)\qquad \lambda\mu(AB' - BA') + \mu(CB' - DA') + \lambda(AD' - BC') + CD' - DC' = 0.$$

Pour que cette équation soit identique à l'équation (1), il faut que

$$(5)\qquad \frac{AB' - BA'}{1} = \frac{CD' - DC'}{1 + m^2}, \qquad CB' - DA' = 0, \qquad CB' - D'A = 0.$$

Ces équations ne contiennent pas h ; m n'y figure que par son carré ; donc si les plans tangents à S et à S′ en un même point de G sont rectangulaires, la même propriété a lieu le long de la génératrice G′, ce qui démontre le théorème.

Les surfaces ont deux autres génératrices communes γ et γ', du système autre que celui auquel appartiennent G et G′, elles se raccordent aux points où G coupe ces deux génératrices. Comme elles sont orthogonales en tous les points de G, il est clair que γ et γ' sont imaginaires, et que les plans de raccordement sont isotropes.

Mais on peut se convaincre de l'existence de surfaces réelles ayant en commun deux génératrices de même système, réelles aussi, et se coupant orthogonalement en tous les points de l'une ou de l'autre de ces génératrices. On peut se donner arbitrairement les coefficients A, B, C, D de l'équation de l'une de ces surfaces (en supposant $AD - BC \neq 0$), les équations (5) déterminent des quantités proportionnelles à A′, B′, C′ et D′. On trouve ainsi que si l'équation de la première quadrique est

$$(y - mx)[A(y + mx) + B(z + h)] + (z - h)[C(y + mx) + D(z + h)] = 0,$$

celle de la seconde est

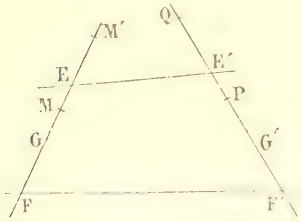
$$(1 + m^2)[(z - h)[A(y + mx) + B(z + h)] + (y - mx)[C(y + mx) + D(z + h)]] = 0.$$

Le plan tangent à la quadrique S au point à l'infini sur G est le plan tangent à S′ au point central, et réciproquement. Donc les surfaces S et S′ ont même point central I sur G, et les plans tangents aux deux quadriques en ce point sont rectangulaires. On sait que si l'on appelle θ l'angle que fait le plan tangent en un point A de G avec le plan tangent en I, on a $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}IA$; $\frac{1}{2}$ est ce que l'on appelle le paramètre de distribution. Pour que les surfaces S et S′, orthogonales en I, soient orthogonales en A, il faut et il suffit que le paramètre de distribution soit le même pour les deux surfaces le long de G.

(*) Le théorème n'a pas lieu si chacune des surfaces se réduit à deux plans.

Solution géométrique. — Considérons deux quadriques (S) et (S′) ayant en commun deux génératrices G et G′ de même système ; nous allons démontrer la propriété suivante :

Si les plans tangents à (S) *et à* (S′) *en un point* M *qui parcourt* G *forment une involution, il en est de même des plans tangents à ces quadriques en un même point qui parcourt* G′.



L'involution formée par les plans tangents en un même point de G a deux plans doubles, ce sont les plans tangents aux points E et F où les surfaces se raccordent. Les plans tangents en M à (S) et (S′) étant conjugués dans l'involution forment un faisceau harmonique avec les plans doubles. Les plans doubles coupent G′ en E′ et F′ (EE′ et FF′ sont les deux génératrices de l'autre système communes aux quadriques), le plan tangent à (S) en M coupe G′ en P, le plan tangent à (S′) en M coupe G′ en Q : ces points sont conjugués harmoniques relativement à E′ et F′. Le plan tangent à (S) en P est le plan de M et de G′, que nous désignons par (M, G′), les plans tangents à S′ en Q, E′ et F′ sont respectivement les plans (M, G′), (E, G′), (F, G′), le rapport anharmonique de quatre plans tangents à S′ en quatre points Q, P, E′, F′ d'une même génératrice est égal à celui des quatre points, donc le plan tangent à S′ en P est conjugué du plan (M, G′) relativement aux plans (E, G′) et (F, G′).

Les plans tangents aux deux quadriques en P forment donc une involution quand P se déplace ; les plans doubles de cette involution sont les plans (E, G′) et (F, G′).

(A. D.)

Bonnes solutions de MM. A. Rousseau, à Landrecies ; A. Courbois, à Douai.

1841. — 1° *Déterminer et construire les courbes* (C) *telles que la tangente et la normale en chaque point* M *déterminent sur* O*x* *un segment de mesure algébrique constante* a.

2° *Calculer, en fonction de l'angle polaire* α *de la demi-tangente positive de la courbe* (C) *qui passe à l'origine, les coordonnées de* M, *l'arc* OM *et le rayon de courbure en* M. *Calculer l'aire comprise à l'intérieur de la courbe.*

3° *Trouver les trajectoires orthogonales des courbes* (C).

4° *On considère les tangentes aux différentes courbes* (C) *en leurs points de rencontre avec* O*y*. *Trouver et construire l'enveloppe* (E) *de ces tangentes.*

5° *On suppose que* a *varie et on demande les trajectoires orthogonales* (T) *des courbes* (E).

6° *Construire la podaire relativement à l'origine de la courbe* (C) *qui passe en ce point et celle d'une courbe* (T) *quelconque.*

1° Soient x et y les coordonnées du point M. Si α désigne l'angle polaire de la demi-tangente positive menée en ce point à la courbe (C), l'équation de la tangente est $\dfrac{X-x}{\cos\alpha} = \dfrac{Y-y}{\sin\alpha}$.

En y faisant $Y = 0$, nous avons l'abscisse du point T où cette droite rencontre Ox, soit

$$X_1 = x - y\operatorname{cotg}\alpha.$$

Pour avoir l'abscisse du point de rencontre N de Ox avec la normale, il suffit de changer α en $\alpha + \dfrac{\pi}{2}$: $X_2 = x + y\operatorname{tg}\alpha$.

Si a désigne la mesure algébrique du segment TN, nous avons l'équation $y(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha) = a$, d'où

$$y = \frac{a}{2}\sin 2\alpha, \tag{1}$$

puis

$$dx = dy.\operatorname{cotg}\alpha - y\cos 2\alpha.\operatorname{cotg}\alpha.d\alpha, \tag{2}$$

ou

$$dx = -a\cos\alpha\cdot\frac{2\cos^2\alpha - 1}{1-\cos^2\alpha}\cdot d(\cos\alpha) = \frac{a}{2}\cdot\frac{1-2u}{1-u}\,du,$$

en posant

$$u = \cos^2\alpha.$$

On est ramené à une quadrature portant sur une fraction rationnelle très simple. En appliquant la méthode classique, nous avons

$$x = a\left[\int du - \frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u}\right] = a\left[u - \frac{1}{2}\log|u-1|\right] + C^{te}.$$

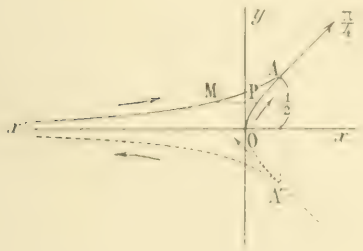
En remplaçant u par sa valeur et désignant par x_0 une constante arbitraire, on a finalement

$$(3) \qquad x = x_0 + a\cos^2\alpha - \log|\sin\alpha|.$$

Les équations (1) et (3) constituent les équations paramétriques de la courbe (C) la plus générale. On voit que toutes ces courbes se déduisent de l'une d'elles par des translations suivant Ox, ce qui était évident *a priori*.

Construisons celle qui correspond à une valeur nulle de x_0.

D'abord, x et y sont des fonctions périodiques de α, dont la plus petite période est π. Nous aurons donc toute la courbe en faisant varier α de 0 à π. Le changement de α en $\pi - \alpha$ nous indique une symétrie par rapport à Ox et nous permet de réduire notre intervalle de variation à l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Si nous remarquons que les équations (2) nous donnent les dérivées de x et de y par rapport à α, nous pouvons immédiatement construire le tableau suivant :



α	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{d\alpha}$		+	0	−	
x	$-\infty$	cr.	$\frac{a}{2}(1-\log 2)$	décr.	0
$\frac{dy}{d\alpha}$		+	0	−	
y	0	cr.	$\frac{a}{2}$	décr.	0

Si l'on se rappelle que α est l'angle polaire de la demi-tangente positive, on peut tracer sans aucune difficulté la courbe ci-dessus, que nous complétons en pointillé au moyen de la symétrie par rapport à Ox. Remarquons que les points A et A', qui correspondent à $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$, sont des points de rebroussement. En ces points, le sens des arcs positifs (qui est indiqué sur la figure par des flèches) change, comme cela a toujours lieu chaque fois qu'on traverse un point de rebroussement sur une courbe quelconque.

2° Nous avons $\qquad ds = \frac{dy}{\sin\alpha} = a\cdot\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}\,d\alpha = a\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 2\sin\alpha\right)d\alpha,$ d'où

$$(4) \qquad s = a\left(\log\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| - 2\cos\alpha\right),$$

en prenant l'origine des arcs au point O.

Remarquons que s est, à proprement parler, l'abscisse curviligne du point M de paramètre α.

En regardant la figure, nous voyons que l'arc OM sera égal à s, si M est entre O et A. Si M est entre A et x', on aura $\text{arc OAM} = s_A + (s_A - s) = 2s_A - s$.

Soit maintenant R la mesure algébrique du rayon de courbure sur la demi-droite d'angle polaire $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

On a, comme on sait, $R = \frac{ds}{d\alpha} = a\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha}$. On vérifie, suivant une propriété connue, que R s'annule pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Considérons un point M, de paramètre α, et compris entre A et x' (voir la figure). L'aire A comprise entre Ox', la courbe et l'ordonnée de M a pour valeur $A = -\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} y\,dx$, car l'élément différentiel $y\,dx$ est positif de O en A et négatif de A en M.

Calculons cette intégrale définie :

$$A = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} y\,dx = \frac{a^2}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cot g\,\alpha \,.\, d\alpha = a^2 \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \cos 2\alpha\, d\alpha.$$

Or, $\cos^2 \alpha \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) - \frac{1}{4}(1 + \cos 4\alpha)$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{4}\cos 4\alpha$$

D'où $A = a^2\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\sin 4\alpha}{16}\right)$, $A = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \sin 2\alpha - \frac{\sin 4\alpha}{4}\right)$.

Pour avoir l'aire totale comprise à l'intérieur de la courbe, il suffit de faire $\alpha = 0$ et de doubler, ce qui donne $\pi.\frac{a^2}{4}$.

3° Toute trajectoire orthogonale (C′) des courbes (C) doit avoir pour tangente et normale en un quelconque M de ses points, la normale et la tangente à la courbe (C) qui passe par ce point. Les courbes (C′) jouissent donc de la même propriété que les courbes (C), avec cette seule différence que a a changé de signe, puisque les points N et T se sont échangés. Or, les courbes symétriques des courbes (C) par rapport à Oy répondent à la question ; ce sont donc les trajectoires orthogonales demandées.

On peut le voir aussi simplement par voie analytique. En effet, si α' désigne l'angle polaire de la demi-tangente positive menée par M à (C′), l'angle polaire α de la demi-tangente positive menée par M à la courbe (C) qui passe par ce point est lié à α' par la relation $\alpha = \alpha' + \frac{\pi}{2}$.

L'ordonnée du point M est donc $y = \frac{a}{2}\sin 2\alpha = -\frac{a}{2}\sin 2\alpha'$.

A partir de là, on est ramené à l'équation (1), où l'on aurait changé α en $\pi - \alpha'$, ce qui reviendrait, comme on le voit sans peine, à remplacer Ox par la demi-droite opposée. Enfin, on peut encore remarquer que, y ne changeant pas quand on change α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$, à tout point M de (C) correspond un point P de la même courbe ayant même ordonnée. Ces deux points sont de part et d'autre de A (voir la figure), et les tangentes correspondantes ont des directions symétriques par rapport à la direction d'angle polaire $\frac{\pi}{4}$. Il s'ensuit que, si l'on prend l'arc symétrique de APO par exemple par rapport à l'ordonnée du point P, la tangente en ce point à l'arc obtenu sera perpendiculaire à la tangente en M à l'arc AMx'. On en conclut que les symétriques des courbes (C) par rapport à Oy sont les trajectoires orthogonales de ces courbes, les symétriques des arcs tels que APO étant les trajectoires des arcs tels que AMx' et les symétriques des arcs tels que AMx' étant les trajectoires des arcs tels que APO.

4° Si l'on fait $x = 0$ dans l'équation de la tangente écrite tout au début, on obtient $Y = X \operatorname{tg} \alpha + y$. En remplaçant y par la valeur (1), et revenant aux petites lettres pour les coordonnées courantes,

nous avons l'équation générale des tangentes considérées :

$$(5) \qquad y = x \operatorname{tg} \alpha + \frac{a}{2} \sin 2\alpha$$

où α constitue le paramètre variable.

Si l'on pose $\operatorname{tg} \alpha = m$, elle prend la forme

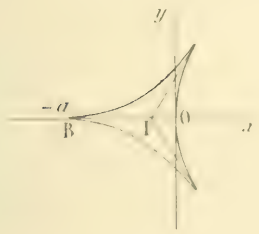
$$(6) \qquad y = mx + \frac{am}{1 + m^2}.$$

On reconnait la forme classique de l'équation des tangentes à une hypocycloïde à trois rebroussements. Il n'y a plus qu'à placer cette courbe, dont la forme est bien connue. Pour cela, remarquons que l'équation (5) ne change pas quand on y change y en $-y$ et α en $-\alpha$; donc Ox est un axe de symétrie de l'enveloppe, ce qui était d'ailleurs évident *à priori* ; c'est donc une des trois tangentes de rebroussement. L'abscisse de son point de contact s'obtient en dérivant (5) par rapport à α :

$$(7) \qquad x + a \cos^2 \alpha \cos 2\alpha = 0.$$

Pour $\alpha = 0$ on a $x = -a$.

D'autre part, l'équation (5) se réduit à $x = 0$ pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$; donc Oy est tangente à (E) au point O, qui est un des trois sommets. Nous avons finalement la courbe suivante. Le centre I du cercle tritangent est au quart de OB à partir de O.



5° Prenons l'équation de la tangente à une trajectoire (T) en l'un quelconque M de ses points, sous la forme canonique

$$(8) \qquad x \cos \varphi + y \sin \varphi = p.$$

La normale en ce point a pour équation

$$(9) \qquad -x \sin \varphi + y \cos \varphi = \frac{dp}{d\varphi}.$$

Or, cette normale n'est autre que la tangente en M à la courbe (E) qui passe par ce point, pour une valeur convenable de a. Si nous identifions (5) et (9), nous pouvons prendre d'abord $\varphi = \alpha$; nous avons alors

$$(10) \qquad \frac{dp}{d\alpha} = \frac{a}{2} \cos \alpha \sin 2\alpha = a \sin \alpha \cos^2 \alpha.$$

D'autre part, si nous remplaçons φ par α dans (8) et (9) et si nous éliminons y entre ces deux équations, nous obtenons l'abscisse du point M, $x = p \cos \alpha - \frac{dp}{d\alpha} \sin \alpha$.

Cette expression doit être égale à celle que donne (7) ; nous avons donc une seconde équation entre p, α, a :

$$(11) \qquad p \cos \alpha - \frac{dp}{d\alpha} \sin \alpha + a \cos^2 \alpha \cos 2\alpha = 0.$$

Eliminons a entre (10) et (11), nous avons l'équation différentielle des courbes (T) :

$$\frac{dp}{d\alpha} \cos 2\alpha + \left(p \cos \alpha - \frac{dp}{d\alpha} \sin \alpha \right) \sin \alpha = 0,$$

d'où $$\frac{dp}{p} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha}{3 \sin^2 \alpha - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{du}{3u - 1}, \qquad \text{en posant} \qquad u = \sin^2 \alpha$$

Intégrons, $$|p| = A |3 \sin^2 \alpha - 1|^{\frac{1}{3}}$$

La constante arbitraire A n'a d'autre effet, en variant, que de remplacer une courbe (T) par une courbe homothétique de la première relativement au point O (ce qui était à prévoir, si l'on remarque que la courbe (E) reste homothétique à elle-même quand a varie) (1).

(1) Voir à ce sujet une note de l'auteur dans le n° de Mars 1902 de la *Revue*.

6° La tangente à la courbe (C) construite dans (1°) a pour équation générale

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = a \sin \alpha \left[\cos^2 \alpha - \log | \sin \alpha | \right] - \frac{a}{2} \sin 2\alpha \cos \alpha = a \sin \alpha . \log | \sin \alpha | ,$$

ou encore $$x \cos \omega + y \sin \omega = a \cos \omega . \log | \cos \omega | .$$

La podaire de (C) a donc pour équation polaire

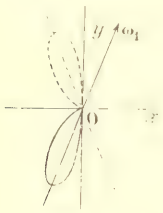
$$\rho = a \cos \omega . \log | \cos \omega | .$$

Construisons cette courbe.

Si l'on change ω en $\pi + \omega$, ρ change de signe, ce qui redonne le même point, et nous fournit comme intervalle de variation $(0, \pi)$. Si l'on change ω en $\pi - \omega$, ρ change également de signe ; d'où symétrie par rapport à Ox et réduction à l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Prenons maintenant la dérivée de ρ, $\frac{d\rho}{d\omega} = -a \sin \omega \left[1 + \log | \cos \omega | \right]$.

Cette dérivée s'annule entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ pour $\cos \omega = \frac{1}{\sqrt{e}}$, ce qui donne une seule valeur ω_1 dans cet intervalle, valeur comprise entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$. Ceci nous permet de dresser le tableau suivant :

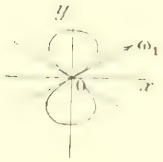


ω	0		ω_1		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{d\rho}{d\omega}$	0	−	0	−	$-\infty$
ρ	0	déc.	$-\frac{a}{\sqrt{e}}$	cr.	0

(La valeur de ρ pour $\omega = \frac{\pi}{2}$ se présente sous la forme $0 \times \infty$; mais on sait que c'est $\cos \omega$ qui l'emporte sur le logarithme). D'où la courbe ci-dessus, complétée par symétrie.

Construisons enfin la podaire de la courbe (T) qui correspond à $A = 1$. Cette podaire a pour équation polaire $|\rho| = |3 \sin^2 \omega - 1| \rho^{\frac{2}{6}}$, ou $\rho^6 = (3 \sin^2 \omega - 1)^3$.

Nous aurons donc deux courbes algébriques distinctes. Pour chacune d'elles, il suffit de faire varier ω de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et de compléter par symétrie relativement à Ox et Oy.



I : $\rho^6 = 3 \sin^2 \omega - 1$. — Pour la réalité de ρ^6, il faut avoir $\sin^2 \omega > \frac{1}{3}$; d'où $\omega > \omega_1$, ω_1 désignant un arc, compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$ et ayant pour sinus $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D'ailleurs, lorsque ω croît de ω_1 à $\frac{\pi}{2}$, ρ croît de 0 à $\sqrt[6]{2}$. Ceci nous donne la courbe ci-contre, à gauche.

II : $\rho^6 = 1 - 3 \sin^2 \omega$. — On fera varier ω de 0 à ω_1, auquel cas ρ décroîtra de 1 à 0 ; d'où la courbe ci-dessus, à droite.

J. HAAG.

Bonnes solutions : MM. C. Blarez, école Sainte-Geneviève ; G. Laval, à Dijon ; A. Courbois ; Leduzé, à Bordeaux ; Nestlass.
Assez bonne solution : M. J. Sourbonné.
Solution partielle : M. A. Rousseau

1845. — *On considère deux coniques fixes* C *et* C′, *soient* M *et* M′ *les pôles d'une même droite par rapport aux deux coniques ; lieu de ces points sachant que le milieu de* MM′ *est situé sur une droite donnée* D.

Nous prendrons la droite D pour axe des y, l'axe des x étant absolument quelconque et nous désignerons par

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0$$

les équations ponctuelles des deux coniques, et par

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2ecw + fw^2 = 0, \qquad a'u^2 + 2b'uv + c'v^2 + 2d'uw + 2e'cw + f'w^2 = 0$$

leurs équations tangentielles, en posant selon l'usage

$$a = CF - E^2, \quad b = ED - BF, \quad \ldots, \quad a' = C'F' - E'^2, \quad b' = E'D' - B'F', \quad \ldots$$

Soit maintenant $ux + vy + w = 0$ l'équation d'une droite quelconque Δ. Les pôles M et M′ de cette droite par rapport aux deux coniques ont pour abscisses $\dfrac{au + bv + dw}{du + ev + fw}$ et $\dfrac{a'u + b'v + d'w}{d'u + e'v + f'w}$; et pour que le milieu de MM′ soit sur la droite D, il faut qu'on ait

$$(1) \qquad \frac{au + bv + dw}{du + ev + fw} + \frac{a'u + b'v + d'w}{d'u + e'v + f'w} = 0,$$

ou

$$(2) \qquad (au + bv + dw)(d'u + e'v + f'w) + (du + ev + fw)(a'u + b'v + d'w) = 0.$$

Cette équation est l'équation tangentielle d'une conique (γ) qui est l'enveloppe de la droite Δ. Il en résulte immédiatement que les lieux des points M et M′ sont des coniques qui sont les polaires réciproques de (γ) par rapport à (C) et (C′).

Remarquons que les équations $du + ev + fw = 0$, $d'u + e'v + f'w = 0$ sont les équations tangentielles des centres ω et ω' des coniques C et C′, et que $au + bv + dw = 0$, $a'u + b'v + d'w = 0$ sont les équations des pôles A et A′ de l'axe Oy (ou de la droite D) par rapport aux mêmes coniques. L'équation (2) nous montre alors que la conique (γ) est tangente aux droites AA′, $\omega\omega'$, $A\omega'$ et $A'\omega$.

Cherchons maintenant le lieu du point M ; les coordonnées x, y de ce point vérifiant les équations

$$x = \frac{au + bv + dw}{du + ev + fw}, \qquad \frac{Ax + By + D}{u} = \frac{Bx + Cy + E}{v} = \frac{Dx + Ey + F}{w},$$

Remplacons dans l'équation (1) le premier rapport par x, et dans le deuxième rapport u, v, w par les quantités proportionnelles $Ax + By + D$, $Bx + Cy + E$, $Dx + Ey + F$; nous obtenons

$$x + \frac{a'(Ax + By + D) + b'(Bx + Cy + E) + d'(Dx + Ey + F)}{d'(Ax + By + D) + e'(Bx + Cy + E) + f'(Dx + Ey + F)} = 0,$$

ou

$$x(Ad' + Be' + Df')x + (Bd' + Ce' + Ef')y + (Aa' + Bb' + 2Dd' + Ee' + Ff')x$$
$$+ (Ba' + Cb' + Ed' + Da' + Eb' + Fd') = 0.$$

Cette équation représente en général une hyperbole dont l'une des directions asymptotiques est parallèle à D et dont l'autre a pour équation $(Ad' + Be' + Df')x + (Bd' + Ce' + Ef')y = 0$.

Il est aisé de voir que cette direction est parallèle au diamètre conjugué de $\omega\omega'$ par rapport à la conique (C). Car si on y remplace D et E par les valeurs égales $-\dfrac{Ad + Bf}{f}$ et $-\dfrac{Bd + Cf}{f}$, l'équation de la deuxième direction asymptotique s'écrit

$$\left(\frac{d}{f} - \frac{d'}{f'}\right)(Ax + By) + \left(\frac{e}{f} - \frac{e'}{f'}\right)(Bx + Cy) = 0,$$

et cette droite est bien parallèle au diamètre conjugué de $\omega\omega'$.

Le lieu du point M est une parabole si l'on a $BF - CE - EF = 0$, c'est-à-dire si le diamètre conjugué de la droite D par rapport à (C) passe par le centre de (C').

Remarque. — On peut établir géométriquement que l'enveloppe de la droite Δ est une conique. Pour cela, cherchons combien de ces droites passent par un point donné P. Lorsque Δ tourne autour du point P, les pôles M et M' décrivent les polaires π et π' du point P par rapport aux coniques (C) et (C'), et tracent sur ces droites des divisions homographiques.

D'autre part, à tout point M de π correspond sur π' un point M'_1 tel que le milieu de MM'_1 soit sur la droite D. On est donc conduit à chercher les points M pour lesquels M' et M'_1 sont confondus.

Or, il est visible que M' et M'_1 tracent sur π' des divisions homographiques de même base, qui admettent deux points doubles.

Il y aura donc sur π deux points M répondant à la question et, par suite, deux droites Δ passant par le point P.

On remarquera sans difficulté que les droites AA', Aω', A'ω et $\omega\omega'$ sont des positions particulières de Δ.

P. NEVEJANS.

Bonnes solutions par MM. E. N. Barisien; André Guerbe, lycée de Douai; G. Lemaire, à Dunkerque; A. Rousseau, à Amiens; G. Fougry, à Reims; J. Soubaigné; L. Simon, à Fourmies; Th. Vieger, lycée de Poitiers.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1910)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

I. — Algèbre et Analyse.

7506. — Décomposer en facteurs linéaires $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 + 3(x-y)(y-z)(z-x)$.

7507. — Démontrer que $(x+1)^n - x^n - 1$ est divisible par $(x+1)^2 - x - 1$. Trouver le quotient pour $n = 1$, $n = 2$.

7508. — Combien y a-t-il de termes dans un polynome du $n^{\text{ième}}$ degré à q variables?

7509. — Soit $f(x)$ un polynome à coefficients réels. Sachant que $f(i) = a + bi$, trouver le reste de la division de ce polynome par $x^2 + 1$.

7510. — Calculer $\sqrt[3]{31 + 30\sqrt{3}} - \sqrt[3]{31 - 30\sqrt{3}} - 3\sqrt{3} + 1$.

7511. — Un polynome complet le du degré $2n+1$ a pour coefficients $1, 2, \ldots, n-1, n, n-1, \ldots, 2, 1$. Démontrer que ce polynome est carré parfait.

7512. — Les fonctions $\log x$, $\dfrac{1}{\sin x}$ sont continues.

7513. — Propriétés du déterminant adjoint.

7514. — Calculer les déterminants

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2xx' & xy' + yx' & xz' + zx' \\ xy' + yx' & 2yy' & yz' + zy' \\ xz' + zx' & yz' + zy' & 2zz' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 10 & 15 \\ 4 & 10 & 20 & 35 \\ 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix}$$

Dans ce dernier, chaque élément est la somme de l'élément à gauche et de l'élément au-dessus.

7515. — Etudier les séries qui ont pour termes généraux

$$\frac{\log n}{n^2}, \quad \frac{r^n}{n}\cos\frac{2n\pi}{3}, \quad \sin x^n, \quad \frac{x^n}{n}, \quad (-1)^n\frac{x^n}{n}, \quad \mathrm{L}\frac{n+1}{n(n-1)}, \quad \frac{x^n}{n}\left(1+\frac{x}{n}\right), \quad \frac{1}{n} - \mathrm{L}\frac{n}{n-1},$$

$$\frac{x^n}{n(n-1)}, \quad \sqrt[n]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}, \quad \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}, \quad \frac{n-1}{n^2}, \quad \frac{n}{(n+1)^2}.$$

7516. — Calculer la somme des séries qui ont pour termes généraux

$$\frac{1}{n(n+1)}, \quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad \frac{4n-3}{n^2-4n}, \quad \mathrm{L}\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

7517. — Dérivées des fonctions $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$ (expliquer le résultat), $(1-x)^{\frac{1}{x}}$, $(1-\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}}$ (valeur pour $x=0$).

7518. — Dérivée de $\cos x$ par rapport à $\cos\frac{x}{2}$.

7519. — Etudier les variations des fonctions

$$x+\frac{2}{x^3},\quad x\log x,\quad x^3-13x-12,\quad \frac{x+3}{(x-5)^2},\quad \frac{\operatorname{tg}(x+a)}{\operatorname{tg}(x-a)},\quad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x^2},\quad \frac{\sin 3x-\sin(x+\sin 2x)}{\sin 3x-\sin 2x},$$

$$\frac{\sin(a+x)}{\sin(b+x)},\quad e^{-2x}\sqrt{x},\quad x^x,\quad x-\log\operatorname{ch} x,\quad (1+x)^{\frac{1}{x}},\quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

7520. — Calculer $\frac{dy}{dx}$ sachant que x et y sont liés par la relation $x=\frac{e^y+2e^{-y}}{e^y-e^{-y}}$.

7521. — Trouver pour $x=0$ les limites des fonctions

$$(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x^m}},\quad x^m\mathrm{L}x,\quad \frac{(1+x)^n-1-x^n}{x^2},\quad \sqrt{x}\mathrm{L}x,\quad (\cos x)^{\frac{1}{x}},\quad (\sin x)^{\operatorname{tg} x},\quad \frac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}.$$

7522. — Trouver pour n infini les limites des fonctions

$$n[\mathrm{L}(1+n+n^2)-\mathrm{L}(2+n+n^2)],\quad \frac{\mathrm{L}1+\mathrm{L}2+\cdots+\mathrm{L}n}{n},\quad \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}},\quad \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\mathrm{L}n},\quad \frac{x^n}{n!}$$

7523. — Trouver pour x infini les limites des fonctions

$$\sqrt[3]{2+x^3}-\sqrt[3]{x^3-1},\quad x^{m\alpha^x},\quad x\left[\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\right].$$

7524. — Limites de $\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg}(x-a)}$ pour $x=a$, de $(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ pour $x=\frac{\pi}{2}$.

7525. — Formule de Taylor. Limite de θ quand h tend vers zéro.

7526. — Maximum ou minimum de $f(x, y)$, sachant qu'on a $g(x, y)=0$. Application : trouver les longueurs d'axes de l'ellipse $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$.

7527(*).— Soit $f(x)=ax^2+bx+c$; démontrer que $f(x)f'(y)+f'(x)f''(y)+f(y)f''(x)$ est une fonction de $x-y$.

7528. — Trouver une fonction $f(x)$ telle que l'on ait quels que soient x et y $f(x+y)=f(x)+f(y)+kxy$.

7529. — Déterminer l'ordre infinitésimal de $f(a+h)-f(a)-hf'\left(a+\frac{h}{2}\right)$.

7530. — Dérivée d'ordre n de $\frac{1}{x^m+1}$.

7531. — Développer en série les fonctions $e^{mx}\cos x$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x}$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{1-3x}{3x-x^2}$, $\frac{x-2}{x^2-3x+2}$.

7532. — Développer en série les fonctions qui vérifient l'équation différentielle $y''-2y'+2y=0$.

7533. — Développer en série : 1° $\operatorname{arc\,tg} x$ sachant que pour $x=0$ la fonction prend la valeur $\frac{\pi}{2}$; 2° $\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ sachant que pour $x=0$ la fonction est égale à $\frac{5\pi}{4}$.

7534. — Partie principale de $\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}$.

7535. — Calculer $\sqrt{9995}$, $\sqrt{999999}$.

7536. — Calculer la différence tabulaire des logarithmes des nombres 38647 et 38648.

7537. — Calculer log 11, log 101, log 1001 dans le système à base 10.

7538. — Calculer la différence tabulaire correspondant à sin 30°.

7539. — Calculer sin 45° 1' et tg 45° 1' en appliquant la formule des accroissements finis.

7540. — Calculer sin 10°, tg 7° 30'.

7541. — Calculer $\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{1}{3}\right)$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

7542. — Déterminer le nombre imaginaire z tel que l'on ait $e^z=i$ ou $e^z=i+2$.

7543. — Calculer $\operatorname{tg} i$, $\operatorname{arc\,sin} 2$.

7544. — Pour quelle valeur imaginaire de z, $\sin z$ est-il réel ?

7545. — Résoudre les équations $\operatorname{th} x=\frac{1}{2}$, $\operatorname{sh} x=1$.

7546. — Etudier les équations

$$2x^4-5x^2+1=0,\quad 12x^3-x^2-27x-14=0,\quad x^3-3abx+a^3+b^3=0,\quad x^3+4x^2-3x-4=0,\quad x^3+4x^2-3x+4=0.$$

(*) Voir Journal de Mathématiques élémentaires, n° du 1er avril 1910, p. 100.

$x^5 + 7x^4 + 13x^2 - 3x - 18 = 0$, $x^5 - 3x^4 + x^3 - 3x + 1 = 0$, $x^4 + 5x^3 + x + 1 = 0$, $4x^4 + 4x^3 - x - 1 = 0$,
$x^6 + 7x^5 - 4x^4 + 21x^3 + 4x^2 + 7x - 1 = 0$, $x = 1 + x$;

$x + 2 = \sqrt{x^2 - 1}$, $x^2 + 2x + 3 = \sqrt{x^2 + 4}$, $\sqrt{1 + \frac{2}{x}x} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}x} = 1$, $\sqrt{a + \sqrt{x}} = \sqrt{a - \sqrt{x}}$;

$x^2 \mathrm{L}x - 3 = 0$, $x \arcsin x - x^2 + 1 = 0$, $x - \cos x = 0$, $x - \operatorname{tg} x = 0$.

7547. — Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x = 7x + 3y, \\ y = 7y + 3x, \end{cases} \quad \begin{cases} xy^2 + yz = 6, \\ x^2y + yz = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} y - z = \dots, \\ z - x = \dots y, \\ x - y = z. \end{cases}$$

7548. — Etudier les solutions du système $x^2 - x + 1 = 0$, $x^3 - x^2 + 1 > 0$.

7549. — Eliminer x et y entre $x + \frac{1}{x} = a$, $y + \frac{1}{y} = b$, $xy + \frac{1}{xy} = c$.

7550. — On donne une équation du quatrième degré $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$; former l'équation aux sommes ou aux produits deux à deux des racines. Appliquer à l'équation $x^4 + 1 = 0$.

7551. — Discuter les racines de l'équation $x^3 - px + q = 0$.

7552. — Eliminer x entre $x^2 + 1 = 0$ et $ax^2 + bx + c^2 = 0$.

7553. — Montrer que l'équation $x^5 - 209x + 56$ a deux racines dont le produit est égal à 1 et calculer ces deux racines.

7554. — Déterminer la hauteur d'une calotte sphérique connaissant son volume $\frac{2\pi}{3}$ et sa surface latérale $2\pi b^2$. Discuter l'équation obtenue.

7555. — Condition pour qu'une équation du cinquième degré ait une racine double et une racine triple.

7556. — Soient a, b, c les racines de l'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$. Former l'équation qui admet pour racines

$$x = \frac{1}{(a)}, \quad y = \frac{1}{(b)}, \quad z = \frac{1}{(c)}.$$

Même problème pour une équation quelconque.

7557. — Etant donnée l'équation $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, calculer la fonction symétrique $\sum \frac{a}{a+1}$.

7558. — Soient a, b, c les racines de l'équation $f(x) = x^3 - px^2 + qx - r = 0$. Former l'équation qui admet pour racines $f'(a)$, $f'(b)$, $f'(c)$.

7559. — Calculer $\sum \frac{1}{(a+2)^2}$ pour l'équation $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0$.

7560. — Déterminer a, b, c de façon que l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ait pour racines les nombres a, b, c.

7561. — Trouver la condition pour que les racines x_1, x_2, x_3 de l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ vérifient la relation $\frac{2}{x_1} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$.

7562. — On donne la somme de cinq nombres et la somme de leurs cinquièmes puissances. Trouver ces nombres sachant qu'ils sont en progression arithmétique.

7563. — Condition pour que l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ait une racine triple. Dans ce cas, résoudre l'équation. Cas où $a = 0$.

7564. — Soient a, b, c les racines de l'équation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$. Condition pour qu'on ait $a^2 + b^2 = ab$. Résoudre.

7565. — Discriminant d'une équation algébrique. Montrer qu'il est égal au signe près au résultant du premier membre et de la dérivée. Appliquer à l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

7566. — Décomposer en deux facteurs du deuxième degré le premier membre d'une équation réciproque du quatrième degré.

7567. — Déterminer α pour que l'équation $3x^4 - 20x^3 + 18x^2 - 180x + \alpha = 0$ ait le nombre maximum de racines réelles.

7568. — Les équations $3x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$, $x^3 + bx^2 + ax + 3 = 0$ peuvent-elles avoir deux racines communes?

7569. — Toute transformation rationnelle portant sur une racine d'une équation du troisième degré peut se ramener à une transformation homographique.

7570. — Etant donnés les polynomes $f(x) = x^3 + px + q$, $g(x) = x^2 + ax + b$, trouver deux polynomes $f_1(x)$ et $g_1(x)$ tels que l'on ait identiquement $fg_1 + gf_1 \equiv 1$.

7571. — Calculer $\sum \frac{a}{b}$ pour l'équation $f(x) = 0$.

7572. — Eliminer x entre les équations $x^3 + px + q = 0$, $x^2 + ax + b = 0$; entre les équations $x^3 + px + q = 0$, $x^3 + p'x + q' = 0$.

7573. — Soient a, b, c les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$. Former l'équation qui admet pour racines les quantités $z = \frac{(b - c)^2}{a}$.

7574. — En posant $y = x + \frac{1}{x}$, calculer $x + \frac{1}{x^2}$ en fonction de y.

7575. — Condition pour que les racines de l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ soient en progression arithmétique. Résoudre l'équation dans ce cas.

7576. — Calculer la somme des sixièmes puissances des racines de l'équation $x^5 + ax^3 + bx^2 + c = 0$.

7577. — Condition pour que le produit de deux racines de l'équation $x^4 + px^2 + qx^2 + rx + s = 0$ soit égal à 1.

7578. — Éliminer x entre les deux équations $x^3 + px + q = 0$, $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$.

7579. — Résoudre une équation du troisième degré sachant que $f(x)$ et $f''(x)$ ont une racine commune.

7580. — On considère l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Déterminer les coefficients de telle sorte que, x_1 et x_2 étant deux racines de l'équation, on ait $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_1$.

7581. — Condition pour que l'équation $x^3 + px + q = 0$ ait le nombre maximum de racines réelles.

7582. — Calculer les intégrales :

$$\int \frac{x\,dx}{x^6 - 1}, \quad \int \frac{x\,dx}{x^4 - 1}, \quad \int \frac{x\,dx}{x^3 + 1}, \quad \int \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + 3x}, \quad \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}\,dx,$$

$$\int \frac{x^2 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)^2(x - 1)^2}\,dx, \quad \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}, \quad \int \frac{dx}{(x + 1)(x^2 - 2x + 1)},$$

$$\int \sqrt{x^2 - x}\,dx, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \int \frac{dx}{(1 - x^m)^{\frac{1}{2}}}, \quad \int \frac{dx}{1 - x\sqrt{1 - x}}, \quad \int \frac{x + \sqrt{1 - x}}{1 - x\sqrt{1 - x}}\,dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x - a} + \sqrt{x - b}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x - a} + \sqrt{b - x}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}}, \quad \int \sqrt{\frac{x - a}{b - x}}\,\frac{dx}{x - b}, \quad \int \frac{\ldots}{x^2 + 1},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad \int \sqrt{\frac{x}{2a - x}}\,dx, \quad \int \frac{2x - 1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx, \quad \int \frac{x + 2}{(x - 1)\sqrt{x^2 + 1}}\,dx, \quad \int (x - 1)\sqrt{2 + 2x^2}\,dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x}, \quad \int \frac{dx}{1 - \sin^3 x}, \quad \int \frac{dx}{\cos^3 x}, \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x}, \quad \int \frac{\sin 3x}{\sin x}\,dx, \quad \int (\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx, \quad \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x}\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}, \quad \int \operatorname{tg}^4 x\,dx, \quad \int \frac{dx}{1 + 2\cos x}, \quad \int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx, \quad \int \frac{dx}{\cos\varphi\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}},$$

$$\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \int \frac{\sin^2 x\,dx}{(2\cos x - 1)^2};$$

$$\int xe^x\,dx, \quad \int \frac{e^x\,dx}{e^x - 1}, \quad \int \frac{\mathrm{L}(1 - x^2)\,dx}{x}, \quad \int \frac{\sin 3x}{\sin x}\,e^x\,dx, \quad \int \mathrm{L}\,\frac{1 - x}{1 + x}\,dx, \quad \int \operatorname{arc\,tg} 2x\,dx, \quad \int \ldots\,dx$$

$$\int x\cos^2 x\,dx, \quad \int \frac{dx}{1 + e^x}, \quad \int x^m \mathrm{L}x\,dx, \quad \int e^{\operatorname{arc\,sin} x}\,dx, \quad \int \operatorname{ch}^2 x\cos x\,dx, \quad \int e^{-x}\cos x\,dx, \quad \int \frac{x^2}{1 - x^2}\operatorname{arc\,tg} x\,dx.$$

7583. — Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}$. Le résultat est symétrique par rapport à a et à b. Pouvait-on le prévoir ?

7584. — Mettre la fraction $\dfrac{x + 1}{x(x + 2)}$ sous la forme $\dfrac{f(x)}{f(x)}$.

7585. — Calculer l'intégrale $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} \frac{(x - \alpha)(x - \beta)}{(x - a)(x - b)}\,dx$. Intégrer complètement pour $\alpha = \beta = 1$, $a = \ldots$, $b = -i$.

7586. — Condition pour que l'intégrale $\displaystyle\int \frac{(x^2 - 1)\,dx}{(x - p)(x - q)^2}$ soit algébrique.

7587. — Relation entre les intégrales de deux fonctions inverses.

7588. — Calculer l'aire et le volume du tore, d'un segment de paraboloïde de révolution limité à un plan perpendiculaire à l'axe, de la surface engendrée par une cycloïde tournant autour de sa base.

7589. — Volume du segment sphérique compris entre deux plans parallèles.

7590. — Calculer le volume d'un tétraèdre en le décomposant en volumes infiniment petits par des plans parallèles à une base.

7591. — Étant donné un demi-cercle de diamètre AB, on divise l'arc AB en n parties égales par les points M_1, M_2, ..., M_{n-1}. — Calculer la limite de la moyenne arithmétique des longueurs AM quand n augmente indéfiniment.

7592. — Même question en supposant que les projections des points M sur le diamètre AB divisent le diamètre en n parties égales.

7593. — Relation entre les moments d'inertie d'un corps solide par rapport à deux axes parallèles.

7594. — Calculer le moment d'inertie d'un triangle par rapport à une droite, d'un triangle quelconque par rapport à son centre, d'une ellipse par rapport à une tangente au sommet du grand axe, d'un ellipsoïde de révolution par rapport à son axe, d'un ellipsoïde quelconque par rapport à un axe, d'un tore par rapport à son axe dans le cas particulier où le demi-cercle méridien est tangent à l'axe.

7595. — Intégrer les équations différentielles

$(1-x^2)y' + 2xy = 1$, $\quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}}$, $\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2(1-y^2)}{x^2(1-x^2)}$, $\quad xy' - 2y - x - 6$, $\quad (1-x^2)y' - 2xy = x^2$,

$\frac{dy}{dx} + y - xy' = 0$, $\quad xy' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{x}$, $\quad y' + \frac{3y}{1-x^2} = \frac{1+x}{(1-x)^2}$, $\quad yy' - 2y\cos x + x = 0$, $\quad y' - y = x$,

$(y^2 - 3x^2)\frac{dy}{dx} + 3xy = 0$, $\quad (1-x^2)y' + xy = xy^2$, $\quad x^2 - 2xy + y^2 - x^2y^2 = 0$, $\quad \sqrt{1+x^2}\,y + (1+x^2)y' + \frac{1}{x} = 0$,

$yy'(1+x^2) + \frac{x}{2}y^2 = \sqrt{1+x^2}$, $\quad x^2 - 2x - a^2dy^2 - a^2dx^2 = 0$, $\quad 2y = y - \frac{1}{y}$;

$2xy'y + 1 + y'^2 = 0$, $\quad y'' = yy'$, $\quad y = x^2$, $\quad y = \frac{1}{a} + ax^2$, $\quad y = \frac{1}{x}$, $\quad yy'' - y' - y = 0$, $\quad y\cos x - 2y\sin x + \cos x = 0$,

$y' - y' + y = \sin\frac{x}{2}$, $\quad y'' - 2y' + 2y = \cos x$, $\quad y'' + 2ay' + ay^2 = e^{-x}$, $\quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dx}{dy} + x = e^{-t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$,

$y'' + 4y' + 4y = x^2e^{-2x}$, $\quad y'' + y = \sin x$, $\quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{a}{y}\,[illegible]$, $\quad y'' - 2y' + y = [illegible]$, $\quad y'' + y = x\sin x + \cos x$;

$y'' + by' = \sin ax$, $\quad y'' - 3y' + 2y = e^x + x$, $\quad y'' - 7y' + 12y = [illegible]$, $\quad y'' - 2y' + y = \cos x + e^x$, $\quad y'' - y' + 2y = \sin 2x + e^x$,

$3y'' - 2y' - y = x^2$, $\quad y'' + y' = \sin x + \cos x$, $\quad y'' - y = [illegible]$, $\quad y'' - 2y' + y = x^2e^x$, $\quad y'' + y = \frac{1}{x}$, $\quad y'' + y = \operatorname{tg} x$.

7596. — Intégrer le système $\frac{dx}{dt} = y + z$, $\frac{dy}{dt} = z + x$, $\frac{dz}{dt} = x + y$. Montrer que les courbes intégrales sont planes et algébriques.

7597. — Etant donnée l'équation différentielle $xy' - y = x + yy'$, la transformer en coordonnées polaires.

II. — Trigonométrie.

7598. — Calculer $\cos\frac{3\pi}{8}$, $\sin\frac{7\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{\pi}{5}$.

7599. — Calculer $\operatorname{tg} 3a$ en fonction de $\sin\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$ en fonction de $\cos\frac{x}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$ en fonction de $\sin\frac{a}{4}$.

7600. — Calculer $\operatorname{tg}\frac{x}{4}$ sachant que $\sin x = \frac{1}{2}$.

7601. — Simplifier $\operatorname{arc\,tg} 1 + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$.

7602. — Calculer $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[3]{1+i}$.

7603. — Comment pourrait-on définir $i^{\sqrt{3}}$?

7604. — Résoudre algébriquement et trigonométriquement l'équation $x^5 - 1 = 0$. En déduire le côté du pentagone régulier.

7605. — Résoudre $x^7 - 1 = 0$, $x^7 + 1 = 0$, $x^{2n} + 1 = 0$.

7606. — Décomposer $x^{2m} + 1$ en facteurs réels du deuxième degré.

7607. — On donne la corde $AB = 2a$ d'un segment de cercle et la flèche b. Calculer le rayon du cercle et la longueur de l'arc.

7608. — Somme des puissances semblables des racines de l'équation binome.

7609. — Calculer la somme des cosinus et des sinus d'arcs en progression arithmétique.

7610. — Même question pour les cosinus et sinus hyperboliques.

7611. — Soit θ une racine primitive de l'équation $x^p - 1 = 0$; développer en série la fonction

$$\frac{1 + e^{\theta} + e^{2\theta} + \ldots + e^{(p-1)\theta}}{p}$$

7612. — Quelle relation existe-t-il entre les cosinus de trois angles dont la somme est nulle ?

7613. — Calculer le produit $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$.

7614. — Eliminer φ entre $\cos\varphi + \sin\varphi = y$, $\cos 3\varphi + \sin 3\varphi = x$.

7615. — Résoudre les équations

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = n, \quad \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} 2x = \frac{\pi}{2}.$$

7616. — Résoudre le système $a\sin x + b\sin y = a\sin b$, $a\sin(b - x) + b\sin(b - y) = b\sin b$.

7617. — Limite de $\cos a \cos\frac{a}{2} \cos\frac{a}{4} \ldots \cos\frac{a}{2^n}$ pour n infini.

7618. — Si l'on a $a\cos\alpha + a_2\cos\alpha_2 + \dots = 0$, $a\cos(\alpha + \beta) + a_2\cos(\alpha_2 + \beta) + \dots = 0$, [illegible] quel que soit β, $a\cos(\alpha_1 + \gamma) + a_2\cos(\alpha_2 + \gamma) + \dots = 0$. Interprétation géométrique.

7619. — Résoudre un triangle connaissant : 1° les angles et une médiane ; 2° les angles et une hauteur ; 3° les hauteurs : 4° c, h_a, h_b ; 5° $2p$, r, R ; 6° A = 90°, B, $a + b = l$.

7620. — Quelle est la forme d'un triangle dans lequel on a

1° $\dfrac{\sin A \sin B \sin C}{(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A)(\sin A + \sin B)} = \dfrac{1}{8}$; 2° $\sin C = \cos A + \cos B$; 3° $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$.

7621. — Calculer le rayon du cercle circonscrit à un triangle en fonction des côtés.

7622. — Dans un triangle on donne A et on sait que $h_a = h_b + h_c$. Calculer les angles B et C.

7623. — Dans un triangle on a A = 2B. Relation entre les côtés.

7624. — En mesurant les côtés d'un triangle on a trouvé qu'il était rectangle isocèle et que les côtés de l'angle droit avaient 1^{km}. Mais on a pu faire dans la mesure de ces côtés une erreur d'un demi mètre et dans celle de l'angle droit une erreur d'un demi-degré. Quelle erreur en résulte-t-il pour la mesure du troisième côté ?

7625. — On considère un triangle sphérique tracé sur une sphère de rayon R, et ayant pour angles A, B, C. On construit dans un plan un triangle rectiligne ayant des côtés égaux et dont les angles sont A′, B′, C′. Déterminer les parties principales de A′ − A, B′ − B, C′ − C, $\dfrac{1}{R}$ étant l'infiniment petit principal. Application : R est le rayon de la terre, $a = 3^{km}$, $b = 4^{km}$, $c = 5^{km}$.

7626. — Démontrer que dans un triangle sphérique on a $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$.

III. — Géométrie analytique à deux dimensions.

7627. — Construire $\sqrt{\dfrac{a^6 + b^6}{a^4 + b^4}}$, $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

7628. — On donne une droite D et deux points P et Q. Un point M s'éloigne indéfiniment sur la droite D. Que devient la différence MP — MQ ?

7629. — Un segment AB de grandeur constante se déplace sur Ox. Calculer comment varie l'angle AMB, M étant un point fixe du plan. Cet angle est-il aigu ou obtus ?

7630. — On donne quatre droites dans un plan $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0$. Démontrer qu'on peut trouver quatre nombres A, B, C, D tels que l'on ait $A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 + D\alpha_4 = 0$. Que représente alors l'équation $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$?

7631. — Calculer l'aire d'un quadrilatère ABCD connaissant AB = a, AD = b, BAD = θ, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \dfrac{\pi}{2}$.

7632. — On donne trois points A, B, C sur Ox, ayant pour abscisses a, b, c. Par ces points on mène des droites faisant respectivement avec Ox les angles $\dfrac{A}{2}$, $\dfrac{B}{2}$, $\dfrac{C}{2}$. Calculer les points de rencontre de ces droites.

7633. — Construire les courbes représentées par les équations suivantes en coordonnées rectilignes :

$y = \sqrt{2 - x^2} \pm \sqrt{x^2 - 1}$, $y = \dfrac{1}{x^2 - \sqrt{x}}$, $y^2 = 1 - x\sqrt{x + 1}$, $y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$, $y = \dfrac{1}{x^3 + 4x^2 + 4x^2}$,

$y^2 = x^3 - x - 6$, $y = 2x + \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 2}}$, $y = \dfrac{1}{1 - x\sqrt{1 - x^2}}$, $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}} + \sqrt{1 - \sqrt{x}}$, $y = \sqrt{\dfrac{a + x}{a - x}}$, $b^2 = x(1 - x)$,

$y^2 = \dfrac{x^3}{a - x}$, $y = \dfrac{a^2 - x^2}{2a + \sqrt{a^2 - x^2}}$, $y^2 = \dfrac{x^2 x}{a^2 - x^2}$, $y = \sqrt{1 + x} \pm \sqrt{1 - x}$,

$y = x\,\mathrm{L}x + ax + b$, $y = x\,\mathrm{L}x - 1$, $y = \mathrm{L}\cos x + \sin x + 3$, $y = \dfrac{x^2}{(1 + x)^2}$, $y = 1 - \dfrac{\mathrm{L}x}{x}$, $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}}$,

$y = \displaystyle\int_0^x \frac{x^2}{1 + x^2} \operatorname{arc\,tg} x\,dx$, $y = \arccos x - 2\sqrt{1 - x^2}$, $y = (1 - x)\mathrm{L}x$, $y = \mathrm{L}\dfrac{1 - x}{1 + x}$, $y = 1 - 4(1 - x)$,

$y = 4\sin x - \operatorname{tg} x + 2x$, $y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} + \mathrm{L}\dfrac{1 + x}{1 - x}$, $y = e^{\frac{x}{x+1}}$, $y = x\left(1 - \dfrac{x}{p}\right)$, $y = \sin\dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{x}{x - 1}$,

$y = \dfrac{\mathrm{L}(1 - x)}{x}$, $y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$, $y = \dfrac{\sin 4x}{\sin x}$, $y = \cos\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x\right)$.

$\mathrm{L}x\,\mathrm{L}y = h$, $2\arcsin x = 3\arcsin y$, $2\sin x = 3\sin y$, [illegible]

$(x^2 + y^2)(x - a)(x^2 - y^2) = 0$, $y^2 - yx^2 + x - a = 0$, $x^2 - y^2 + x + y = 0$, [illegible]

$3xy^2 + 2y^2 - 6x = 0$, $x^2y - y^2 + 4y^2 = 0$, $xy^2 - y^2 - y + 1 = 0$, [illegible]

$xy^2 + y(x + y) + 1 = 0$, $y^2 = x^2 - x^3$, [illegible]

$\begin{cases} x = \dfrac{1 + t^2}{1 + t}, \\ y = \dfrac{t^2}{1 + t^2}, \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{b(a^2 - t^2)}{a^2 + t^2}, \\ y = \dfrac{2at^2}{a^2 + t^2}. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \sin 2t \cos t, \\ y = \cos 2t \sin^2 t, \end{cases}$ $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \mathrm{L}\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}. \end{cases}$

$$\begin{cases} x = a \sin t \cos t, \\ y = b \cos t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a \dfrac{\cos 3t}{\sin 2t}, \\ y = a \dfrac{\sin 3t}{\cos 2t}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2t + 2 \sin t, \\ y = \cos^2 t \end{cases}$$

7634. — Construire les courbes suivantes, définies par leurs équations en coordonnées polaires :

$$\rho = \frac{\sin \omega}{2 \cos \omega - 1}, \qquad \rho = \frac{1 + k - 2k \cos \omega}{\sin \omega}, \qquad \rho = 1 + \sqrt{\sin 2\omega}, \qquad \rho = \frac{1}{\cos \omega + \sin 2\omega},$$

$$\rho = a \sin \frac{\omega}{2}, \qquad \rho = a \sqrt{\sin 2\omega}, \qquad \rho = \frac{\sin \omega}{1 + \cos \omega}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1 + \cos \theta}{a}, \qquad r = a \sqrt{1 + \theta}, \qquad r = a \frac{1 + \cos \theta}{\cos \theta} \text{ (aires)},$$

$$\rho = \frac{\sin \omega}{\sin \omega - \cos \omega}, \qquad \rho = \frac{\sin \omega}{\cos \omega (\cos \omega - \sin \omega)}, \qquad \rho = \frac{\sin \omega}{\cos^2 \omega (\cos \omega + \sin \omega)}, \qquad \rho = a \frac{1 + \cos \omega}{\sin \omega};$$

$$\rho = \omega - \sqrt{\cos \omega}, \qquad \rho = \frac{1}{\sin \omega}, \qquad r = a \sin \omega \cos \theta, \qquad \rho = \sin^2 \omega,$$

$$\rho \cos \omega = 1 \sin \omega = 0, \qquad \rho \sin \omega - 2\rho + 1 = 0.$$

7635. — Étudier les coniques

$$y = mx + n + \sqrt{3 - 2x} \text{ (aire)}, \qquad x - 2xy - 4y^2 - 2x + 8y + 5 = 0, \qquad x^2 + 6y - 4xy - 2x = 0 \text{ (aires)},$$

$$x^2 + y^2 + xy - 2x + 4y + 1 = 0, \qquad x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 8y = 0, \qquad x^2 + 3xy + 2y^2 - 1 = 0 \text{ (équation réduite)},$$

$$2x^2 - 2xy + 4y^2 - x + y - 10y = 0 \text{ (équation réduite)}, \qquad y = \frac{x + x^2}{x},$$

$$x^2 - 2xy - y^2 - 2x - 1 = 0 \text{ (foyer)}, \qquad x^2 + 2xy - 3y^2 - 7 = 0 \text{ (axes)}.$$

7636. — Toute conique peut être mise sous la forme $PR^2 + QR^2 = R^2$, P, Q, R étant des fonctions linéaires de x et y et z, ζ, des constantes. Montrer que le point de rencontre des droites $P = 0$, $Q = 0$ a pour polaire la droite $R = 0$.

7637. — On donne deux droites et un point A. Par ce point on mène une sécante rencontrant les droites en B et C ; sur BC on prend un point D tel que $DC = \overline{AB}$. Lieu du point D.

7638. — Définir la lemniscate, la construire, calculer son aire. Montrer que la courbe est unicursale. On considère la représentation paramétrique correspondant aux faisceaux des cercles tangents aux tangentes au point double. Relation entre les paramètres des deux cercles définissant un même point de la lemniscate.

7639. — Ordre de contact d'une courbe et de sa tangente.

7640. — Une courbe plane est tangente à l'origine à l'axe des x. Développer les coordonnées d'un point M de la courbe voisin de l'origine par rapport aux puissances de l'arc $OM = s$.

7641. — Rayon de courbure de la parabole. Développée.

7642. — Construire la courbe $y = 2^x$, $x = t$. Trouver les droites qui sont à la fois normales et tangentes.

7643. — Rectification de la chaînette. Développante.

7644. — Lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe $x^2 - y^2 = 2a^2$ deux tangentes rectangulaires.

7645. — On donne une courbe, un point O sur cette courbe et un point M variable. Sur la tangente en M dans le sens MO on porte une longueur MP égale à l'arc MO. Montrer que le lieu du point P est normal en P à MP.

7646. — Les extrémités M et M_1 d'un segment de grandeur variable $MM_1 = l$ décrivent deux courbes C et C_1 situées dans un même plan. On mène les tangentes MT, M_1T_1 dans les sens positifs ; on désigne par s et s_1 les abscisses curvilignes des points M et M_1 et par θ et θ_1 les angles de MM_1 avec MT et M_1T_1. Démontrer la formule $dl = ds_1 \cos \theta_1 - ds \cos \theta$.

7647. — Construire la courbe $r = a(1 + \cos \theta)$. Est-elle unicursale ? Représentation paramétrique. Condition pour que quatre points de la courbe soient sur un cercle. Cercle osculateur.

7648. — On considère la droite $x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$, où p est une fonction de θ. Enveloppe de cette droite. Démontrer que le rayon de courbure R est égal à $|p + p''|$. La distance d d'un point de l'enveloppe à l'origine est donnée par $d = \sqrt{p^2 + p'^2}$. Si l'on pose $d = 2p$, montrer que $R = \dfrac{d^3}{4p^2}$.

7649. — Montrer qu'on peut mener trois tangentes à la courbe $y = x^3$ par un point M du plan. Lieu des points M pour lesquels ces tangentes et la parallèle à Oy menée par le point M forment un faisceau harmonique.

7650. — Le point $z = x + iy$ décrit une droite. Quel est le lieu du point (X, Y) si $X + iY = z^2$.

7651. — La normale en un point M d'une courbe rencontre Ox au point N. En ce point on mène une perpendiculaire à Ox sur laquelle on prend la longueur $NP = MN$. Tangente en P au lieu de ce point.

7652. — Construire la courbe $y = ae^{x^2 - 1}$. Trajectoires orthogonales de ces courbes quand a varie.

7653. — En un point $M(x, y)$ de la courbe $y = f(x)$ on mène la tangente, puis on coupe cette tangente et la courbe par une parallèle à Ox ayant pour ordonnée $y + h$. Cette droite coupe la courbe au point M′ voisin du point M et la tangente en M au point T. Quel est l'ordre infinitésimal de M′T ? Calculer la partie principale.

7654. — Déterminer des polynomes d'une seule variable P, Q, R tels que l'on ait identiquement $P^2 + Q^2 - R^2 \equiv 0$, $P^2 + Q^2 - 2RP \equiv 0$. Cette question peut-elle se rattacher à la notion de courbe unicursale ?

7655. — Enveloppe d'une famille de courbes. Condition pour que chaque courbe ait avec l'enveloppe un contact du deuxième ordre.

7656. — Construire la courbe $y = \dfrac{2 + \sqrt{1 - x}}{x}$; calculer l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et les droites $x = \dfrac{1}{2}$, $x = 1$.

7657. — Intégrer l'équation $y'' + y' = e^{-x}$. Construire la courbe intégrale qui passe par l'origine et qui admet un point d'inflexion en ce point.

7658. — Enveloppe des coniques $(x^2 - y^2)\sin\varphi + 2x\cos\varphi - 2y = 0$. Lieu de leurs centres.

7659. — Enveloppe de la droite $y = mx + \dfrac{1}{1 - m^2}$. Construire la courbe ; étude à l'origine.

7660. — Trouver l'enveloppe des droites rencontrant la courbe $y = x^3$ aux points A, B, C et Ox au point D tels que $(ABCD) = -1$.

7661. — Même question pour la courbe $y^2 = x^3 - x - 6$.

7662. — Intégrer l'équation $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{dy}{y\sqrt{y^2 - 1}}$; construire les courbes intégrales.

7663. — Montrer que la courbe $\rho = a\sqrt{\sin 2\omega}$ est unicursale ; représentation paramétrique.

7664. — Soient A et B deux points infiniment voisins d'une courbe. Les tangentes en A et B rencontrent respectivement en T et T′ les ordonnées des points B et A. Evaluer l'infiniment petit $\overline{BT} - \overline{AT'}$. Pour quelles courbes ABTT′ est-il un parallélogramme ? Reconnaître cette propriété sur la parabole $y = ax^2 + bx + c$.

7665. — Soient A, B, P, Q quatre points de la strophoïde $x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2)$, tels que le rapport anharmonique (O.ABPQ) soit égal à -1. A et B étant fixes, enveloppe de PQ.

7666. — Construire la courbe $r = a \operatorname{tg} \dfrac{\theta}{2}$? Est-elle unicursale ? Représentation paramétrique. Montrer que cette courbe peut se transformer en elle-même par inversion.

7667. — Construire la courbe $y = x^3 - x$. Lieu des points d'intersection des tangentes à la courbe en deux des points où elle est coupée par une parallèle à Ox.

7668. — Les tangentes menées d'un point M à la courbe $x = 3t^2$, $y = 2t^3$ rencontrent Ox aux points M_1, M_2, M_3. Lieu du point M tel que $(OM_1M_2M_3) = -1$.

7669. — Condition pour que deux cercles soient orthogonaux. Lieu des centres des cercles tangents à une droite fixe et orthogonaux à un cercle fixe.

7670. — On donne deux cercles fixes C et C_1. Un point A décrit le cercle C_1. Enveloppe de l'axe radical du cercle C et du cercle-point A.

7671. — On donne un point A et une droite D, on abaisse AH perpendiculaire sur D, puis par le point A on mène une sécante variable rencontrant D au point B. Du point I, milieu de HB, on abaisse IM perpendiculaire sur AB. Lieu du point M.

7672. — On considère un cercle dont chaque point représente la variable imaginaire z. Quels sont sur le cercle le maximum et le minimum du module de $1 + z$?

7673. — Construire la courbe $x = \dfrac{t^2}{t + 1}$, $y = \dfrac{t^3}{t + 1}$. Enveloppe des cordes vues de l'origine sous un angle droit.

7674. — Trajectoires orthogonales des droites $x\cos t + y\sin t - f(t) = 0$.

7675. — Construire la courbe $y = 2x^3 - 3x^2 - 1$. Point d'inflexion. Courbure aux points correspondant au maximum et au minimum de y.

7676. — D'un point fixe O on abaisse OP perpendiculaire sur la tangente en M à une courbe ; entre $OP = p$ et $OM = r$ on a la relation $r^2 = \dfrac{p^3}{p^2 - a^2}$. On achève le rectangle OPMR. Démontrer que RP enveloppe un cercle.

7677. — Propriétés des podaires. — Tangente.

7678. — Calculer l'aire comprise entre les deux courbes $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{sh} x$. L'axe des y est une ordonnée quadraconque.

7679. — On donne un cercle ayant pour centre l'origine de deux axes de coordonnées rectangulaires $x^2 + y^2 = a^2$. On mène la tangente AT au point $A(x = a, y = 0)$. Soit $M(x, y)$ un point quelconque du cercle. La droite OM rencontre AT au point C. Par le point M on mène une parallèle à Ox qui rencontre AT au point B. On mène OB qui coupe en P la parallèle à Ox menée par C. Calculer les coordonnées du point P. Lieu de ce point quand le point M décrit le cercle.

7680. — Etudier la réalité des racines de l'équation $ax^3 - 3bx^2 - 3cx + d = 0$ quand le point (a, b, c, d) se déplace dans le plan.

7681. — On considère la courbe $y = \operatorname{arc\,tg} x$ qui passe par l'origine, et par le point M de cette courbe qui a pour abscisse 1 on abaisse MP perpendiculaire sur Ox et MQ perpendiculaire sur Oy. Calculer les aires OMP et OMQ.

7682. — Aire comprise entre les deux courbes $ax^n = by^n (n > p)$ et $ax^{n'} = bx^{n'} (n' < p)$.

7683. — Développée de la cycloïde.

7684. — Mener par le point (∞, ∞) des tangentes à la conique $\dfrac{p}{1 + e\cos\omega} = \ldots$ équivalente à la droite qui joint les points de contact.

(A. Lacroix.)

CONCOURS DE 1909 (*Suite*)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES.

(Places réservées aux sous-ingénieurs et contrôleurs.)

Algèbre et Analyse.

I. — **1902.** Etudier l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2} - 3x + 4 = 0$.

Le candidat exprimera la forme de la solution générale avec des paramètres réels, mais sans rechercher leur valeur numérique.

II. — **1903.** Calculer l'intégrale $\int_0^{-1} \frac{dx}{x^3 - 3x - 1}$.

(*Durée : 4 heures.*)

Epure.

Ombre dans une descente biaise en berceau. La voûte est constituée par un cylindre ; le biais, situé dans le plan de front uv est un demi-cercle, la voûte est limitée en avant au plan de tête uv. Construire l'ombre en projection verticale. Les directions des projections des génératrices G, G' forment des angles de 15° avec la ligne de terre et celles des rayons lumineux L, L', des angles de 45°.

(*Durée : 3 heures.*)

Géométrie et Mécanique.

I. — **1904.** On donne deux droites rectangulaires et un point A sur l'une d'elles ; on mène la tangente AT à une circonférence de rayon variable tangente aux deux droites. — Lieu du point de contact, construire ce lieu.

II. — Un corps solide est assujetti à tourner autour d'un axe vertical. Un point matériel pesant glisse sans frottement sur une droite inclinée, qui est liée invariablement à ce solide ; on demande le mouvement du système ; examiner en particulier le cas où le corps solide et le point matériel sont immobiles à l'instant initial.

(*Durée : 4 heures.*)

CONCOURS DE 1910 (*Suite*)

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

(Cours spéciaux et places réservées aux sous-ingénieurs et conducteurs.)

Algèbre et Analyse.

1905. — 1° Tracer la courbe figurative de la variation de la fonction $y = (x - 1)2^x - 1$.

2° Déduire de cette courbe que l'équation

(1) $$(x - 1)2^x - 1 = 0$$

n'a qu'une seule racine réelle.

3° Obtenir le même résultat en se servant des deux courbes $y_1 = \frac{1}{x - 1}$ et $y_2 = 2^x$.

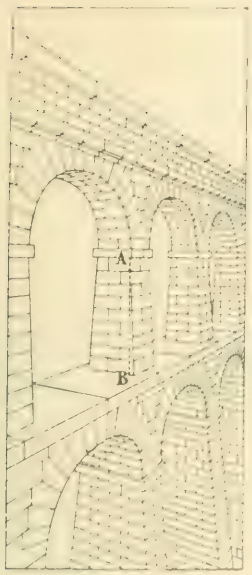
4° Calculer, avec une décimale exacte, la racine réelle de l'équation (1) en utilisant la méthode d'interpolation par parties proportionnelles (ce calcul, très simple, devra être effectué sans le secours de tables).

1906. — 1° Former, en coordonnées polaires, l'équation différentielle des trajectoires orthogonales à une famille de courbes planes.

2° Appliquer cette équation à la recherche des trajectoires orthogonales de la famille de lemniscates de Bernoulli $r^2 = \pm 2a^2 \cos 2\theta$, a étant le paramètre variable.

Géométrie descriptive.

Construire, à l'échelle de $0^m,01$ par mètre, le plan, la coupe et l'élévation d'une travée et de l'amorce des deux travées voisines de l'aqueduc représenté par la perspective ci-jointe, sachant que :



1° Les lignes d'assise sont horizontales sur chaque face des piliers ;
2° La base des piliers est rectangulaire ;
3° Les voûtes sont en plein cintre ;
4° La hauteur AB est de 4 mètres.

Mécanique et Géométrie.

I. — Un caisson en béton armé, de forme rectangulaire, ouvert par le haut, doit flotter sur l'eau. Quelle hauteur d'eau faut-il y introduire pour assurer la stabilité de son équilibre dans la position verticale ?

Données : longueur intérieure $a = 4^m,00$, largeur intérieure $b = 2^m,00$, hauteur intérieure $c = 6^m,00$, épaisseur uniforme $e = 0^m,20$, poids spécifique $p = 2^m,5$.

Notations. — On appellera P le poids du caisson vide, H la distance de son centre de gravité à la face inférieure du fond, S la surface intérieure du fond, S' la surface extérieure du fond, h la hauteur cherchée, h' le tirant d'eau correspondant.

II. — Une pièce de bois rectangulaire est lancée horizontalement de manière à glisser, dans le sens de sa longueur, sur une plateforme horizontale terminée par une arête rectiligne perpendiculaire à cette direction.

Connaissant la vitesse de la pièce à l'instant où elle commence à basculer autour de cette arête, déterminer l'abaissement de son extrémité antérieure un dixième de seconde après cet instant, en supposant négligeables le frottement sur la plateforme, la déformation de la pièce et de la plateforme et la résistance de l'air.

Avec quelle approximation peut être obtenu le résultat si les données le sont avec une erreur relative de un centième ?

Données : longueur de la pièce $a = 5^m,00$, épaisseur $b = 0^m,10$, vitesse initiale $v = 0^m,10$ par seconde.

Notations : on appellera θ l'inclinaison de la pièce au bout du temps t, x son parcours horizontal, z l'abaissement cherché.

N.-B. — On simplifiera beaucoup le calcul en traitant t, θ, x et z comme des infiniment petits.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1837. — *On considère deux coniques confocales* C *et* C'. *Par un point* P *quelconque de l'une des directrices relatives au foyer commun, on mène les tangentes aux deux coniques. Démontrer que la condition pour que, quel que soit* P, *ces tangentes forment un faisceau harmonique, est que les cercles principaux de* C *et* C' *soient orthogonaux.*

Deux coniques C et C', ayant l'origine pour foyer commun, ont pour équation

$$x^2 + y^2 - (x - \alpha)^2 = 0, \qquad x^2 + y^2 - (ax + by + c)^2 = 0,$$

et leurs directrices ont pour équations $x - \alpha = 0$, $ax + by + c = 0$.

Prenons un point (α, β) sur la première et menons par ce point des tangentes aux deux coniques, nous aurons les deux équations :

$$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2 - (x - \alpha)^2) - (\alpha x + \beta y)^2 = 0,$$

$$[(\alpha^2 + \beta^2) - (a\alpha + b\beta + c)^2](x^2 + y^2 - (ax + by + c)^2) - (\alpha x + \beta y - (a\alpha + b\beta + c)(ax + by + c))^2 = 0.$$

Coupons ces deux couples de droites par l'axe des y, $x = 0$; nous aurons les deux équations du second degré

$$(\alpha^2 + \beta^2)y^2 - c^2\alpha^2 - \beta^2 y^2 = 0, \quad (\alpha^2 + \beta^2)y^2 - 2(a\alpha + b\beta + c)y + (a\alpha + b\beta + c)^2 = 0,$$

dont les deux couples de racines doivent être harmoniques.

Ceci nous donne la condition $AC' + CA' - 2BB' = 0$.

Or
$$A = \alpha^2, \qquad B = 0, \qquad C = -(c^2\alpha^2 + \beta^2),$$
$$A' = (1 - b^2\alpha^2 + \beta^2 - a\alpha + b\beta - c)^2 - 4(a\alpha + b\beta + c)^2,$$
$$B' = \cdots, \qquad C' = -(c^2\alpha^2 + \beta^2)(a\alpha + b\beta + c)^2 - (a\alpha + b\beta + c)^2 ;$$

la condition devient donc
$$-(c^2\alpha^2 + \beta^2)(1 - b^2\alpha^2 + \beta^2 - a\alpha + b\beta - c)^2 - (a\alpha + b\beta + c)^2 = 0,$$
ou
$$c^2 + c^2(1 - b^2\alpha^2 + \beta^2 - a\alpha + b\beta - c)^2 - (a\alpha + b\beta + c)^2 = 0.$$

Cette condition, simplifiée, s'écrit
$$c^2 - c^2b^2\alpha^2 + \beta^2(1 - c^2\alpha^2) + c^2(a\alpha + b\beta + c)^2 - 2c(b\beta a\alpha + b\beta + c) = 0,$$
ou enfin
$$c^2\beta^2(1 - a^2 - b^2) - 2c^2(a\alpha + b\beta + 1 - c) = 0.$$

Il s'agit de montrer que cette relation exprime que les cercles principaux des deux coniques sont orthogonaux. Or ces cercles sont les podaires des deux coniques par rapport au foyer, c'est-à-dire par rapport à l'origine. La tangente à la première conique au point (x, y) est
$$Xx + Yy - c^2(X - x)(x - \alpha) = 0 ;$$
la tangente à la seconde, $Xx + Yy - a(X - bY - c)(ax + by + c) = 0$.

La perpendiculaire abaissée de l'origine sur la première droite est $\dfrac{X}{x - c^2(x - \alpha)} = \dfrac{Y}{y}$;

en tenant compte de cette première équation, on a donc $\dfrac{X}{x - c^2(x - \alpha)} = \dfrac{Y}{y} = \dfrac{c^2(X - \alpha)(x - \alpha)}{x^2 + y^2 - c^2\alpha(x - \alpha)}$;

mais $x^2 + y^2 - c^2\alpha(x - \alpha) = -c^2\alpha(x - \alpha)$; par conséquent $\dfrac{X}{x - c^2(x - \alpha)} = \dfrac{Y}{y} = \dfrac{X - \alpha}{-\alpha}$.

Ceci donne x et y et il suffit de porter leurs valeurs dans l'équation de la conique pour obtenir l'équation du cercle principal : $(1 - c^2)X^2 + Y^2 + 2c^2\alpha X - c^2\alpha^2 = 0$.

On trouve de même l'équation de l'autre cercle, qui est
$$(a^2 + b^2 - 1)X^2 + Y^2 + 2ac\alpha X + 2bc\alpha Y - c^2\alpha^2 = 0,$$
et la condition d'orthogonalité coïncide justement avec la relation précédente, ce qui démontre la propriété indiquée.

NEVEJANS.

Bonnes solutions : MM. A. Boussinesq, à Lanhélicrès ; — Gaborny, — Dottal, — G. Lacq ; E. E. Bizac, G. Lacroix, à Reims.

Solution géométrique. — Si nous transformons la figure par polaires réciproques en prenant comme conique directrice un cercle ayant pour centre le foyer commun, chacune d'elles devient un cercle, C, C′, et les centres de ces cercles sont les pôles des directrices, c'est-à-dire les points qui correspondent aux directrices. Aux tangentes issues d'un point de l'une des directrices correspondent les points de rencontre des cercles C et C′ avec une sécante quelconque passant par l'un des centres. Ces points devront être conjugués harmoniques ; donc les deux cercles C et C′ doivent être orthogonaux. Mais ceux-ci sont les inverses des cercles principaux des coniques ; donc ces derniers cercles sont orthogonaux aussi. NEVEJANS.

Bonne solution de M. J. Soulaine.

1839. — *Déterminer la trajectoire d'un mobile sachant qu'elle est plane et que les composantes tangentielle et normale de l'accélération sont constantes toutes les deux.*

Par hypothèse, on a $\gamma_t = \dfrac{dv}{dt} = a$, $\gamma_n = \dfrac{v^2}{\rho} = b$.

La première équation donne de suite $v = at + v_0$, v_0 étant la vitesse à l'origine des temps. La deuxième équation donne alors $\rho = \dfrac{(at + v_0)^2}{b}$.

D'autre part, $v = \frac{ds}{dt} = at + v_0$; donc $s = \frac{(at + v_0)^2}{2a} + s_0$, s_0 étant une certaine constante, qui dépend du choix de l'origine des arcs. On a donc

$$\rho = \frac{2a(s - s_0)}{b},$$

ce qui montre que le rayon de courbure varie proportionnellement à l'arc. La courbe est donc une spirale logarithmique.

Pour le voir effectivement, nous remplacerons ρ par $\frac{ds}{d\alpha}$, et nous aurons $\frac{ds}{d\alpha} = \frac{2a}{b}(s - s_0)$

$$\frac{ds}{s - s_0} = \frac{2a}{b}\,d\alpha; \qquad \text{par suite,} \qquad \mathrm{L}\,\frac{s - s_0}{c} = \frac{2a}{b}\,\alpha, \qquad s - s_0 = ce^{\frac{2a}{b}\alpha}.$$

Nous avons alors $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$, $\quad dx = \cos\alpha\, ds = \frac{2a}{b}(s - s_0)\cos\alpha\, d\alpha.$

Or $\quad s - s_0 = ce^{\frac{2a}{b}\alpha}$; $\quad$ donc $\quad dx = c\,\frac{2a}{b}\,e^{\frac{2a}{b}\alpha}\cos\alpha\, d\alpha$;

de même $\quad dy = c\,\frac{2a}{b}\,e^{\frac{2a}{b}\alpha}\sin\alpha\, d\alpha$;

et il n'y a plus qu'à calculer les deux intégrales $\int e^{\frac{2a}{b}\alpha}\cos\alpha\, d\alpha$, $\quad \int e^{\frac{2a}{b}\alpha}\sin\alpha\, d\alpha$.

Appelons-les I et J, et intégrons dans chacune d'elles par parties ; nous aurons

$$\mathrm{I} = e^{\frac{2a}{b}\alpha}\sin\alpha - \frac{2a}{b}\mathrm{J}, \qquad \mathrm{J} = -e^{\frac{2a}{b}\alpha}\cos\alpha + \frac{2a}{b}\mathrm{I}.$$

Ces deux équations donnent I et J :

$$\mathrm{I} = b\,\frac{e^{\frac{2a}{b}\alpha}(2a\cos\alpha + b\sin\alpha)}{4a^2 + b^2}, \qquad \mathrm{J} = b\,\frac{e^{\frac{2a}{b}\alpha}(-2a\sin\alpha + b\cos\alpha)}{4a^2 + b^2}.$$

Les valeurs de x et de y sont donc fournies par

$$x - x_0 = 2ac\,\frac{e^{\frac{2a}{b}\alpha}(2a\cos\alpha + b\sin\alpha)}{4a^2 + b^2}, \qquad y - y_0 = 2ac\,\frac{e^{\frac{2a}{b}\alpha}(-2a\sin\alpha + b\cos\alpha)}{4a^2 + b^2}.$$

Portons alors les axes au point (x_0, y_0) et posons $\quad 2a = k\cos\alpha_0$, $\quad b = k\sin\alpha_0$; $\quad$ nous aurons

$$x = \frac{2ac}{k}\,e^{\frac{2a}{b}\alpha}\cos(\alpha_0 - \alpha), \qquad y = \frac{2ac}{k}\,e^{\frac{2a}{b}\alpha}\sin(\alpha_0 - \alpha).$$

En posant $\alpha_0 - \alpha = \theta$, nous avons l'équation polaire de la courbe

$$r = \frac{2ac}{k}\,e^{\frac{2a}{b}(\alpha_0 - \theta)},$$

c'est une spirale logarithmique.

Bonnes solutions : MM. A. Rousseau ; A. Courtois, à Douai ; J. Verdots ; G. Lach ; Nevjanes ; J. Sommaeno.

1843. — *Déterminer les courbes planes qui possèdent la propriété suivante : le cercle homothétique dans le rapport constant k par rapport au point* M *du cercle de courbure en* M *passe par un point fixe. Cas où* $k = 1$.

On peut toujours choisir sur une courbe plane un sens positif tel que l'angle α que fait la demi-tangente positive avec Ox varie dans le même sens que l'abscisse curviligne s. Si l'on désigne par R le rayon de courbure, on a $\quad \mathrm{R} = \frac{ds}{d\alpha}$, $\quad$ puis $\quad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\quad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}$.

En outre, la demi-droite qui va d'un point M de la courbe au centre de courbure correspondant fait avec Ox l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$; il en résulte que les coordonnées du centre de courbure au point (x, y) sont $x + R\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, $y + R\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, ou $x - R\sin\alpha$ et $y + R\cos\alpha$.

L'équation du cercle de courbure au point M (x, y) peut alors s'écrire

$$(1) \qquad (X - x + R\sin\alpha)^2 + (Y - y - R\cos\alpha)^2 = R^2.$$

Cherchons l'équation du cercle homothétique dans le rapport k par rapport au point M. Soit P (X, Y) un point quelconque du cercle (1), P′ (X′, Y′) son homothétique ; nous avons $\frac{\overline{MP'}}{\overline{MP}} = k$, d'où nous tirons

$$\frac{X' - x}{X - x} = k, \qquad \frac{Y' - y}{Y - y} = k, \qquad \text{ou} \qquad X - x = \frac{X' - x}{k}, \qquad Y - y = \frac{Y' - y}{k}.$$

Remplaçons dans l'équation (1) $X - x$ et $Y - y$ par ces valeurs, nous obtenons l'équation du cercle homothétique cherché :

$$\left(\frac{X' - x}{k} + R\sin\alpha\right)^2 + \left(\frac{Y' - y}{k} - R\cos\alpha\right)^2 = R^2,$$

X′ et Y′ étant les coordonnées courantes.

Il n'y a plus qu'à écrire que ce cercle passe par un point fixe qu'on peut supposer être l'origine ; nous obtenons

$$\left(\frac{x}{k} - R\sin\alpha\right)^2 + \left(\frac{y}{k} + R\cos\alpha\right)^2 = R^2, \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 - 2Rk(x\sin\alpha - y\cos\alpha) = 0.$$

Mais nous avons $R\sin\alpha = \frac{dy}{ds}$, $R\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$; donc cette équation devient

$$x^2 + y^2 - 2k\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = 0.$$

Passons en coordonnées polaires, nous avons $x^2 + y^2 = r^2$, $xdy - ydx = r^2d\theta$; ce qui nous conduit à l'équation différentielle $dr = 2k\theta$, d'où nous tirons immédiatement

$$r = 2k\theta + C.$$

Mais on a, à un multiple près de π, $r = \theta + V$; on en déduit $\theta + V = 2k\theta + C$, $V = (2k - 1)\theta + C$, et, en prenant les tangentes, $\frac{r}{r'} = \operatorname{tg}(2k - 1)\theta + C'$, ou

$$\frac{r'}{r} = \operatorname{cotg}(2k - 1)\theta + C'.$$

L'intégration est alors immédiate et nous donne

$$\mathrm{L}r = \frac{1}{2k - 1}\mathrm{L}\sin(2k - 1)\theta + C' = \mathrm{L}a, \qquad \text{ou} \qquad r^{2k-1} = a^{2k-1}\sin(2k - 1)\theta + C',$$

ou enfin, en posant $2k - 1 = n$, et en prenant pour axe polaire la droite $\theta = -\frac{C}{2k - 1}$,

$$(1) \qquad r = a^n\sin n\theta.$$

Telle est l'équation générale des courbes cherchées.

Remarque. — Dans ce qui précède nous avons supposé $2k - 1 \neq 0$ ou $k \neq \frac{1}{2}$. Si $k = \frac{1}{2}$, l'équation différentielle se réduit à $\frac{r'}{r} = C'^e$, et les courbes intégrales sont des spirales logarithmiques.

En excluant ce cas particulier, les courbes intégrales sont représentées par l'équation (1).

Pour $k = 1$, $n = 1$, l'équation devient $r = a\sin\theta$, elle représente un cercle.

Pour $k = \frac{3}{4}$, $n = \frac{1}{2}$, limaçon de Pascal ; $k = \frac{3}{2}$, $n = 2$, lemniscate de Bernoulli ; $k = \frac{1}{4}$, $n = -\frac{1}{2}$, parabole ; $k = -\frac{1}{2}$, $n = -2$, hyperbole équilatère ; $k = \frac{1}{3}$, $n = -\frac{1}{3}$, cubique de Tschirnhausen.

André COURTOIS, lycée de Douai.

Bonnes solutions par MM. C. Blarez, école Sainte-Geneviève, à Paris ; L. Boilève, lycée de Versailles ; G. Lach, à Denain ; Paul Léonzi, à Bordeaux ; Névejans ; René Poulain, à Lourches ; A. Rousseau, à Amiens ; Rodolphe Serret, lycée d'Alger ; J. Soubaigne, à Mont-de-Marsan ; A. Wiener, lycée de Versailles ; G. Fouché, à Reims.

1847. — *Soit une droite fixe de longueur* AB. *Par un point* M *variable pris sur* AB, *on mène d'un même côté de* AB *des parallèles à deux directions fixes* AP, BQ. *On obtient ainsi les deux triangles semblables* APM *et* MQB. *Montrer que :* 1° *le lieu du milieu de* PQ *est une ligne droite ;* 2° *l'enveloppe de la droite* PQ *est une parabole. Construire cette parabole lorsque les triangles* APM *et* MQB *sont équilatéraux.*

3° *Trouver aussi le lieu de la projection de* M *sur* PQ.

Nous prendrons pour axes de coordonnées les droites AP et BQ, et nous désignerons par a l'abscisse du point A et par b l'ordonnée du point B, en supposant $a > 0$, $b > 0$.

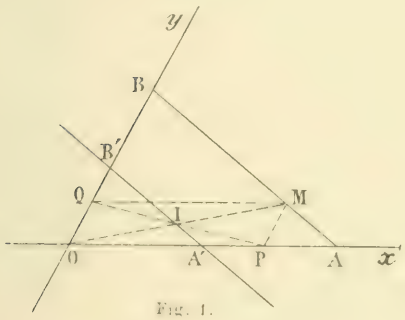


Fig. 1.

1. Le milieu I de PQ est aussi le milieu de OM, par suite le lieu du point I est la droite A′B′, parallèle à AB, qui joint les milieux A′ et B′ de OA et de OB.

2. Si on désigne par λ le rapport $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$, les coordonnées du point M sont $x = \frac{a}{1+\lambda}$, $y = \frac{b\lambda}{1+\lambda}$, et l'équation de la droite PQ est

$$\frac{x}{\frac{a}{1+\lambda}} + \frac{y}{\frac{b\lambda}{1+\lambda}} - 1 = 0, \qquad \text{ou} \qquad bx\lambda^2 + \lambda(bx + ay - ab) + ay = 0.$$

Ecrivons que cette équation a une racine double en λ ; nous obtenons

$$(bx + ay - ab)^2 - 4abxy = 0 \qquad \text{ou} \qquad (bx - ay)^2 - 2ab(bx + ay) + a^2b^2 = 0,$$

c'est l'équation de l'enveloppe de la droite PQ.

On voit immédiatement que cette équation représente la parabole qui est tangente en A à OA et à OB.

Ce résultat peut d'ailleurs s'établir géométriquement.

En effet, les points P et Q tracent sur OA et OB des divisions homographiques, donc la droite PQ enveloppe une conique tangente aux droites OA et OB. De plus, quand le point Q est en O, le point P est en A, donc la conique touche OA au point A ; elle touche de même OB au point B. Enfin si le point P est à l'infini, le point Q est aussi à l'infini, la droite PQ coïncide avec la droite de l'infini. La conique enveloppe est donc une parabole tangente en A et B aux droites OA et OB.

La construction de cette parabole est bien connue. La direction asymptotique est parallèle à la droite qui joint le point O au milieu C de AB (*fig.* 2). On mène AD et BE parallèles à OC, puis on construit AF symétrique de AD par rapport à OA, BF symétrique de BE par rapport à OB ; ces deux droites se coupent au foyer F. La tangente au sommet passe par les projections H et K du point F sur OA et OB, enfin le sommet S est la projection du point F sur HK.

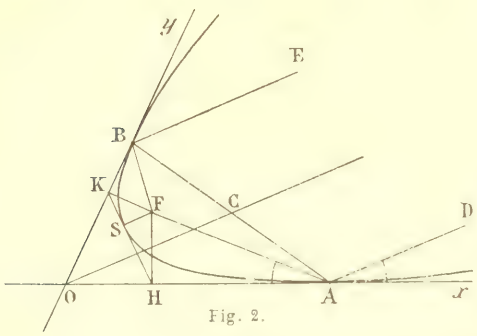


Fig. 2.

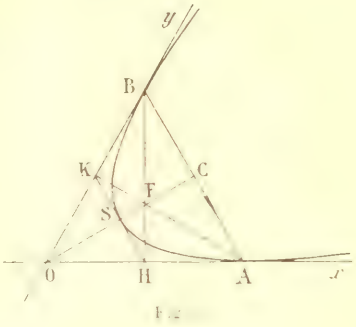


Fig. 3.

Dans le cas où le triangle OAB est équilatéral (*fig.* 3), on voit immédiatement que le foyer F est le centre du triangle OAB, H et K sont les milieux de OA et de OB, et le point S est le milieu de HK; la droite OC est l'axe de la courbe.

3. Nous avons vu que l'équation de la droite PQ est

$$(1) \qquad \frac{x(1+\lambda)}{a} + \frac{y(1+\lambda)}{b\lambda} - 1 = 0.$$

Son coefficient angulaire est $-\frac{b\lambda}{a}$. Le coefficient angulaire m de la perpendiculaire est donné par l'équation $1 + \left(m - \frac{b\lambda}{a}\right)\cos\theta - \frac{mb\lambda}{a} = 0$, d'où $m = \frac{a - b\lambda\cos\theta}{b\lambda - a\cos\theta}$.

Par suite, la perpendiculaire abaissée du point M sur PQ a pour équation

$$(2) \qquad y - \frac{b\lambda}{1+\lambda} = \frac{a - b\lambda\cos\theta}{b\lambda - a\cos\theta}\left(x - \frac{a}{1+\lambda}\right).$$

On aurait l'équation du lieu demandé en éliminant λ entre les équations (1) et (2).

Mais il sera plus simple de résoudre les équations (1) et (2) par rapport à x et y; on obtiendra ainsi les équations paramétriques du lieu. On trouve ainsi

$$x = \frac{a^2 - (a - b\lambda\cos\theta)}{(\lambda - 1)(b^2\lambda^2 - 2ab\lambda\cos\theta + a^2)}, \qquad y = \frac{b\lambda^2(b\lambda - a\cos\theta)}{(\lambda - 1)(b^2\lambda^2 - 2ab\lambda\cos\theta + a^2)},$$

et l'on voit que le lieu est une cubique unicursale aisée à construire. Elle est tangente en A et B aux droites OA et OB, admet un point réel à l'infini (correspondant à $\lambda = -1$), et une asymptote correspondante, puis deux points imaginaires conjugués à l'infini, relatifs aux valeurs de λ qui sont racines de l'équation $b^2\lambda^2 - 2ab\lambda\cos\theta + a^2 = 0$.

Il est aisé de voir que ces points sont les points cycliques. En effet, la direction asymptotique correspondant à une racine de cette équation a pour coefficient angulaire $\frac{y}{x} = \frac{b^2\lambda^2(b\lambda - a\cos\theta)}{a^2(a - b\lambda\cos\theta)}$.

Mais on peut écrire $b^2\lambda^2 - 2ab\lambda\cos\theta + a^2 = b\lambda(b\lambda - a\cos\theta) - a(b\lambda\cos\theta - a) = 0$,

ou $$\frac{b\lambda - a\cos\theta}{b\lambda\cos\theta - a} = \frac{a}{b\lambda}, \qquad \text{et} \qquad \frac{y}{x} = -\frac{b\lambda}{a}.$$

Si l'on pose $-\frac{b\lambda}{a} = m$, on voit que m est racine de l'équation $m^2 - 2m\cos\theta + 1 = 0$, ce qui montre bien que les directions asymptotiques imaginaires sont isotropes.

Donc le lieu est une cubique circulaire unicursale.

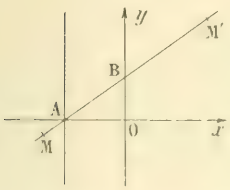
André COURTOIS, lycée de Douai.

Bonnes solutions par MM. G. Lach, à Rodez; Marescalchi; P. Niveiaans, 27e d'artillerie; A. Rousseau, à Amiens; L. Simon, à Fourmies; J. Soubaigné.

GÉOMÉTRIE

1840. — *Une droite de longueur donnée passe par un point fixe et une de ses extrémités [illegible] droite. Trouver le lieu de son autre extrémité.*

Soit A le point fixe, D la droite donnée, O le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur D. $OA = a$, et soit l la longueur constante. Le problème proposé peut encore s'énoncer de la façon suivante :

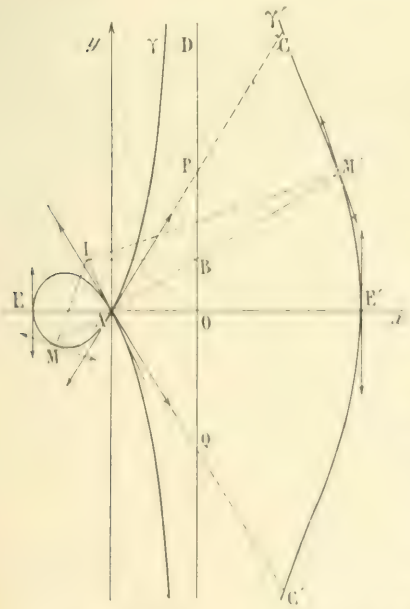


On donne un point A, une droite D et une sécante mobile passant par A et rencontrant D au point B ; on porte sur cette sécante $BM = BM' = l$. Trouver le lieu des points M et M'.

Ce lieu n'est autre chose que la conchoïde de droite, ou *conchoïde de Nicomède*. On a immédiatement l'équation cartésienne de cette courbe, en prenant A pour origine, AO pour axe des x, la perpendiculaire en A pour axe des y. C'est l'équation $l^2x^2 = (x-a)^2(x^2+y^2)$, que l'on déduit de l'équation polaire du lieu $\rho = \frac{a}{\cos\omega} \pm l$, et on peut construire aisément à partir de l'une ou de l'autre de ces équations la courbe cherchée, en distinguant trois cas, suivant que b est supérieur, égal ou inférieur à a.

Nous allons nous contenter d'étudier géométriquement cette courbe. Faisons tout d'abord la remarque générale suivante : si on considère la droite mobile ABMM' comme une figure invariable se déplaçant dans son plan, on connaît tout d'abord la trajectoire D de l'un de ses points B et la normale à cette trajectoire à chaque instant. D'autre part on peut considérer le point A comme invariablement lié à la sécante mobile, sa trajectoire à un instant donné étant alors la position correspondante de cette sécante, on connaît donc encore la normale à ce déplacement, par suite le centre instantané de rotation, les normales en M et M' à la conchoïde et par conséquent les tangentes en ces points.

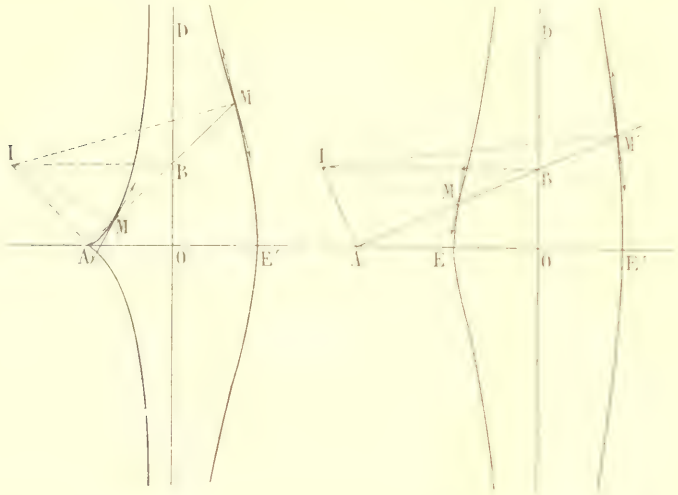
1er Cas $l > a$. — La circonférence décrite de A comme centre avec l pour rayon rencontre D en deux points P,Q. Si la sécante mobile est la droite AP, les points mobiles sont le point A et le point C, symétrique de A par rapport à P. La courbe part donc du point A tangentiellement à la droite AP, on aurait cette droite AP et la tangente en C par la construction indiquée.



Si l'on fait tourner la sécante autour de A de façon que P décrive le segment PD, les points M et M' s'éloignent à l'infini : la normale en A à la position limite de la sécante est Ax, la normale au point à l'infini sur D est parallèle à Ax. Par suite les normales aux points à l'infini des arcs de courbe décrits par M et M' sont parallèles à Ax et passent par le point à l'infini sur D : la position limite des tangentes, c'est-à-dire l'asymptote, est donc la droite D elle-même. M et M' s'éloignent donc indéfiniment sur les deux arcs $A\gamma$, $C\gamma'$ qui admettent tous deux D pour asymptote.

Si la sécante mobile varie maintenant à partir de la position AP en se rapprochant de AO, pour une position intermédiaire AB nous obtenons les deux points M et M' : la normale à D au point B et la normale à AB en A se coupent au point I, centre instantané de rotation. On en déduit les normales IM, IM' et les tangentes en M et M'. Si la sécante mobile vient se confondre avec AO, on a sur Ax les deux points du lieu E, E' : $OE = OE' = a + l$. La sécante

tre instantané de rotation est le point O et les normales étant confondues avec Ox, les tangentes en E, E′ sont parallèles à D. On complète la courbe en prenant la symétrique de $EMA\gamma\gamma'E'$ par rapport à la droite AOx. On voit que A est un point double.



2e Cas $l = a$. C'est un cas limite du précédent : la circonférence de centre A et de rayon l étant tangente à D, les points P, Q et les droites AP, AQ du cas précédent sont confondus suivant AO : le point A est alors un point de rebroussement, la tangente de rebroussement étant AO. Au point E′, symétrique de A par rapport à O, la tangente reste parallèle à D. Le reste de la courbe n'est pas changé, mais la boucle disparaît. La courbe passe toujours par A qui, comme nous venons de le voir, devient un point de rebroussement.

3e Cas. $l < a$. La circonférence de centre A, de rayon l, ne coupe plus D : le point A qui, au point de vue analytique fait toujours partie de la courbe, n'en fait plus partie au point de vue géométrique. On a toujours sur AO les deux points E, E′, $OE = OE' = l$, les tangentes étant toujours parallèles à D. La boucle du premier cas a complètement disparu. LÉONZI, lycée de Bordeaux.

Bonnes solutions : MM. E. N. Barisien ; G. Lyon, à Fourmies-en-Wappe (Nord) ; L. Bel, à Alger ; L. Sous, à Fourmies ; Névejans ; A. Rousseau, à Landrecies ; A. Dauvin ; A. Courtois, à Bonnat ; J. Vérots, Soulainé, à Mont-de-Marsan.

PHYSIQUE ET CHIMIE

1833. — *Un mélange de chlorures de phosphore et d'arsenic pesant* 9g,84 *est dissous dans un excès d'eau. De la liqueur ainsi obtenue, on fait deux parts égales. La première sert à déterminer la composition du mélange. A cet effet, on la colore avec quelques gouttes d'hélianthine et on y verse une dissolution titrée de soude jusqu'à virage qui se produit quand on a employé* 120 *millimolécules de soude ; puis on ajoute de la phtaléine et on continue de verser de la soude jusqu'à nouveau virage qui se produit quand on a employé encore* 20 *millimolécules. Comme contrôle, on verse encore une dissolution acide de permanganate qui cesse de se décolorer quand on en a versé* 10 *millimolécules.*

Etant maintenant fixé sur la composition de la liqueur, on ajoute à la deuxième part un excès d'azotate d'argent ; il se forme un précipité. Quelle est sa nature et son poids ? Dans la liqueur filtrée, on ajoute peu à peu et indéfiniment de l'ammoniaque, que se produira-t-il successivement, qualitativement et quantitativement ?

Désignons par x, y et z les nombres de millimolécules de pentachlorure de phosphore, de trichlorure de phosphore et de chlorure d'arsenic qui se trouvent dans chaque part du mélange. On aura d'abord $x(PCl^5) + y(PCl^3) + z(AsCl^3) = 4920$ ou $208{,}5x + 137{,}5y + 181{,}6z = 4920$. (1)

En dissolvant les chlorures dans l'eau, on produit les réactions suivantes

$x(PCl^5 + 4H^2O = PO^4H^3 + 5HCl)$, $y(PCl^3 + 3H^2O = PO^3H^3 + 3HCl)$, $z(AsCl^3 + 3H^2O = AsO^3H^3 + 3HCl)$,

et la composition de la liqueur est représentée par $(5x + 3y + 3z)HCl + xPO^4H^3 + yPO^3H^3 + zAsO^3H^3$.

Le virage à l'hélianthine se produit lorsque tout l'acide chlorhydrique est saturé et lorsque les acides phosphorique et phosphoreux sont transformés en sels monosodiques. L'acide arsénieux est sans

action sur l'hélianthine. La transformation ayant exigé 120 millimolécules de soude, nous aurons donc

$$6x + 4y + 3z = 120. \qquad (2)$$

Le virage à la phtaléine se produira quand les acides phosphorique et phosphoreux auront été transformés en sels disodiques, c'est-à-dire lorsqu'on aura ajouté encore $x + y$ millimolécules de soude, donc

$$x + y = 20. \qquad (3)$$

La résolution des équations (1), (2) et (3) donne

$$x = 5, \qquad y = 15, \qquad z = 10.$$

Il y avait donc, dans le mélange primitif, 10 millimolécules de pentachlorure de phosphore, 30 de trichlorure de phosphore, 20 de chlorure d'arsenic, ou, en poids, 2g,085 de pentachlorure de phosphore, 4,125 de trichlorure de phosphore, 3,63 de chlorure d'arsenic.

Sous l'action du permanganate, l'acide phosphoreux se transforme en acide phosphorique, l'acide arsénieux en acide arsénique, chacun fixant un atome d'oxygène. Le permanganate aura donc à fournir $y + z$ milliatomes d'oxygène. Or 2 millimolécules de permanganate fournissent 5 milliatomes d'oxygène ; les 10 millimolécules employées en fournissent 25, ce qui est bien égal à $y + z$.

Une partie de l'azotate d'argent ajouté à la liqueur précipite l'acide chlorhydrique en produisant $(5x + 3y + 3z)AgCl$. Une autre partie est réduite par l'acide phosphoreux conformément à la formule

$$y(PO^3H^3 + 2AzO^3Ag + H^2O = 2Ag + PO^4H^3 + 2AzO^3H)$$

et produit un précipité d'argent pesant $2yAg$. En liqueur acide, il n'y a d'action ni sur l'acide phosphorique ni sur l'acide arsénieux.

La liqueur filtrée contiendra encore ces deux derniers acides, de l'acide azotique et un excès d'azotate d'argent. L'ammoniaque neutralise successivement l'acide azotique, l'acide phosphorique et l'acide arsénieux, détermine alors la précipitation de phosphate et d'arsénite d'argent, puis, réagissant sur l'excès d'azotate d'argent, en précipite de l'oxyde d'argent. Enfin, un excès d'ammoniaque redissout tous ces précipités dans un ordre d'ailleurs assez difficile à prévoir.

A. PEYRARD, à Lyon.

Assez bonnes solutions de MM. Gerix, à Lyon, et Pétrot, à Paris.

1848. — *Un objectif photographique, dont la distance focale est* $\varphi = 16^{cm}$ *et l'interstice* $\iota = 2^{cm}$, *donne, d'un objet très éloigné* AB, *une image réelle et renversée* A′B′ *de* 1^{cm} *de diamètre. On recule le verre dépoli à* 48^{cm} *du second point nodal* O *et on intercale, entre ce verre dépoli et l'objectif, une lentille divergente mince* C, *de* 10^{cm} *de distance focale. A quelle distance du point* O *doit-on la placer pour obtenir une image nette* A″B″ *sur le verre dépoli? Quelle sera la grandeur de cette image? Cette image étant mise en place sur la figure, construire les points nodaux du système total. Comment pourrait-on vérifier l'accord du résultat obtenu avec le calcul?*

L'image A′B′ est dans le second plan focal de l'objectif et la distance A′O est, en valeur absolue, égale à φ. Cette image A′B′ doit jouer, par rapport à la lentille C, le rôle d'objet virtuel, et les distances conjuguées A′C et A″C doivent satisfaire à la relation $-\frac{1}{A'C} + \frac{1}{A''C} = -\frac{1}{10}$, ou, en représentant par x la distance cherchée CO, $-\frac{1}{16 - x} + \frac{1}{48 - x} = -\frac{1}{10}$.

En chassant les dénominateurs, on a l'équation

$$x^2 - 64x + 448 = 0,$$

dont les deux racines sont $x' = 56$ et $x'' = 8$. La première correspondrait à une image définitive virtuelle qu'on ne pourrait recevoir sur le verre dépoli ; la seconde seule convient.

La distance CO étant de 8^{cm}, la distance A′C est aussi égale à 8^{cm} et la distance A″C à 40^{cm}. L'image A″B″ sera

fois plus éloignée de C que l'image A'B', est cinq fois plus grande et a par conséquent 5^{cm} de diamètre.

Tous les rayons incidents venus de B étant parallèles à OB', le second point nodal du système sera sur une parallèle à OB' menée par B'', soit en N'. La seconde distance focale du système est donc N'A''. Pour calculer sa valeur absolue, comparons les deux triangles semblables N'A''B'' et OA'B' dont le rapport de similitude est 5 ; la distance N'A'' vaut 5 fois OA', c'est-à-dire $5 \times 16 = 80^{cm}$.

Rencontrons maintenant le rayon qui émerge suivant N'B''. Il sort de la lentille divergente au point I. Le rayon incident en I a la direction IB' qui rencontre le second plan principal de l'objectif au point K. Le rayon reçu par l'objectif rencontre le premier plan principal à la même distance de l'axe, au point K'. Nous aurons donc le premier point nodal N du système en menant par K' une parallèle à OB'.

Les constructions donnent facilement les valeurs successives $CI = 2^{cm},5$, $OK = O'K' = 4^{cm}$, $O'N = 64^{cm}$ et enfin $N'N = 34^{cm}$. Le système total se trouve ainsi complètement défini.

Pour vérifier le résultat obtenu, particulièrement en ce qui concerne la distance focale, appliquons la formule générale des systèmes centrés,

$$f = \frac{\quad}{\quad}.$$

Elle donne ici $f = -\dfrac{16 \times 10}{16 - 10 - 8} = 80$, ce qui concorde bien avec le résultat déjà obtenu.

Remarquons enfin que le système proposé n'est autre que l'instrument connu sous le nom de téléobjectif.

T. VIVIER, lycée de Poitiers.

Assez bonne solution de M. A. Courtois, lycée de Douai.

QUESTIONS PROPOSÉES

1907. — On considère une parabole et la tangente en un point M de cette parabole ; soient P la projection de ce point sur l'axe et Q le point de rencontre de la tangente avec l'axe. On considère en outre le cercle circonscrit au triangle MPQ.

1° Trouver la deuxième parabole qui passe par les points de rencontre de la parabole donnée avec le cercle et le lieu du sommet de cette parabole.

2° Trouver l'enveloppe de cette parabole.

3° Trouver le lieu du point de rencontre de deux sécantes communes à la parabole et au cercle.

4° Enfin trouver le cercle circonscrit au triangle conjugué commun à la parabole et au cercle et le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur l'axe radical des deux cercles.

E. H.

1908. — Soient M un point quelconque d'une ellipse de centre O, Δ la perpendiculaire élevée en M à OM, P et Q les points où les parallèles menées par O à la tangente et à la normale en M rencontrent Δ.

Construire les courbes lieux de P et de Q. L'aire de la courbe P est la somme des aires de l'ellipse donnée et de sa développée.

E.-N. Barisien.

1909. — 1° Construire la courbe (C) (axes rectangulaires)

$$(x^2 + y^2)^2 - ay(x^2 - y^2) = 0,$$

en déterminer les tangentes doubles et l'aire limitée par chacune de ses boucles.

2° Un cercle passant par O rencontre (C) en trois points à distance finie, autres que O ; déterminer les régions du plan où doivent se trouver les centres de ces cercles, pour que les trois points d'intersection soient réels.

3° Lieu du milieu des cordes PQ de (C) vues de l'origine sous un angle droit et enveloppe de ces cordes.

4° Soit OPRQ un quadrilatère dont les droites rectangulaires OP, OQ sont deux côtés consécutifs ; en supposant que P et Q décrivent (C) et que le quadrilatère OPQR reste semblable à lui-même, on demande l'enveloppe des côtés PR, QR.

Louis Sire, à Lyon.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

21e Année. Novembre 1910. N° 2.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LE RAYON DE COURBURE DES COURBES PLANES (*Fin*)

par M. **Louis Sire**, boursier d'agrégation à la Faculté des sciences de Lyon.

Les courbes (Δ). — Les courbes (Δ) satisfont, en coordonnées polaires, à l'équation différentielle (*Revue*, mai 1909)

$$\frac{\rho^2+\rho'^2}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}=\frac{\Delta}{2}.$$

En posant $\frac{1}{\rho}=z$ et en intégrant une première fois, cette équation se ramène à la quadrature

$$\omega-\omega_0=\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{Az^{\frac{4}{\Delta}}-z^2}},$$

laquelle peut s'écrire
$$\omega-\omega_0=\int_{z_0}^{z}z^{-1}\left(Az^{\frac{4}{\Delta}-2}-1\right)^{-\frac{1}{2}}dz;$$

elle est ainsi mise sous la forme d'une intégrale binome et rentre dans l'un des cas d'intégrabilité connus.

Pour effectuer cette quadrature, nous poserons

$$Az^{\frac{4}{\Delta}-2}=t,\qquad \text{c'est-à-dire}\qquad z=\left(\frac{t}{A}\right)^{\frac{\Delta}{2(2-\Delta)}}.$$

Ce changement de variables n'est plus valable si $\Delta=2$, car il devient $A=t$; la variable z a disparu. Ce cas particulier a déjà été étudié (*loc. cit.*) et conduit à la spirale logarithmique.

Si $\Delta\neq 2$, la quadrature devient $\omega-\omega_0=\frac{\Delta}{4-2\Delta}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{t\sqrt{t-1}}$.

Posons
$$t-1=u^2,$$
nous obtenons
$$\omega-\omega_0=\frac{\Delta}{2-\Delta}\int_{u_0}^{u}\frac{du}{1+u^2}=\frac{\Delta}{2-\Delta}\operatorname{arc\,tg}u;$$
faisons $\omega_0=0$, il vient $u=\operatorname{tg}\frac{2-\Delta}{\Delta}\omega$, par suite $t=1+\operatorname{tg}^2\frac{2-\Delta}{\Delta}\omega=\frac{1}{\cos^2\frac{2-\Delta}{\Delta}\omega}$,

d'où, finalement $\frac{A}{\rho^{\frac{4-2\Delta}{\Delta}}}=\frac{1}{\cos^2\frac{2-\Delta}{\Delta}\omega}$, c'est-à-dire $\rho^{\frac{4-2\Delta}{\Delta}}=A\cos^2\frac{2-\Delta}{\Delta}\omega$.

En extrayant la racine carrée, $\rho^{\frac{2-\Delta}{\Delta}}=B\cos\frac{2-\Delta}{\Delta}\omega$.

Posons
$$\frac{2-\Delta}{\Delta}=n,\qquad B=a^n.$$
nous obtenons les courbes
$$\rho^n=a^n\cos n\omega.$$

En résumé :

Les courbes (Δ) *comprennent la spirale logarithmique*, $\rho=a^{\omega}$, *et les courbes* $\rho^n=a^n\cos n\omega$, $n\neq 0$, *à une rotation près, les seules courbes pour lesquelles il existe un rapport constant entre le rayon de courbure en un point et le rayon du cercle tangent en ce point à la courbe et qui passe par le pôle.*

Il est facile de vérifier géométriquement cette propriété de la spirale logarithmique. Soient M, M′ deux points infiniment voisins de la courbe, MR, M′R les tangentes en ces points ; les angles en M, M′ étant égaux, le quadrilatère OMRM′ est inscriptible, par suite $\Omega = \omega$, de là

$$R = \lim \frac{MM'}{\sin \Omega} = \lim \frac{MM'}{\sin \omega} = \rho.$$

Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (année 1886) M. Du Châtenet a déterminé les courbes pour lesquelles il existe un rapport constant entre le rayon vecteur et la projection du rayon de courbure sur ce rayon vecteur ; en cherchant les courbes (Δ), j'ai donc résolu le même problème. Le procédé d'intégration que j'ai employé est différent de celui de M. Du Châtenet ; il est un peu plus long, mais ces deux méthodes me permettent d'obtenir, comme on le verra plus loin, deux généralisations des courbes (Δ).

Auparavant, je vais étudier quelques propriétés de ces courbes que Haton de la Goupillière a appelées *spirales sinusoïdes* ; ces propriétés sont bien connues, mais comme elles résultent des formules que nous avons établies, elles se trouvent démontrées d'une nouvelle manière. On pourra d'ailleurs consulter la thèse de Haton de la Goupillière et divers numéros des *Nouvelles Annales* (années 1872, 1876...).

Considérons donc les courbes (Δ) d'équation polaire

$$\rho^{\Delta} = a^{\Delta} \cos n\omega ;$$

le $\Delta = \frac{R}{\rho}$ de la courbe et l'entier n, appelé ordre de la courbe, sont liés par la relation $\frac{2-\Delta}{\Delta} = n$, de laquelle nous tirons $\Delta = \frac{2}{n+1}$.

En particulier, si $\Delta = 2$, nous avons $n = 0$; par suite l'ordre de la spirale logarithmique est nul.

De la formule F_S résulte que la podaire d'une courbe (Δ) par rapport au pôle est encore une courbe (Δ) ; connaissant l'ordre de cette courbe, cherchons celui de sa podaire d'ordre k. Nous nous servirons de la formule (*Revue*, mai 1909) :

$$\Delta_p^k = 2 + \frac{2(\Delta - 2)}{2 - k(\Delta - 2)}.$$

de laquelle on déduit, en remplaçant les Δ, Δ_p^k par leurs expressions en fonction de l'ordre,

$$n_p^k = \frac{n}{1 + nk}.$$

Ce résultat est dû à Mac-Laurin (*Géométrie organique*). En particulier, si l'on fait $k = \infty$, il vient $n_p^k = 0$; on pouvait ainsi remarquer que la podaire d'ordre infini d'une courbe (Δ) est une spirale logarithmique. J'ai d'ailleurs établi cette propriété pour une courbe quelconque (*Revue*, mai 1909) (1).

Des considérations analogues s'étendent aux quasi-podaires.

La formule F_i montre que l'inverse d'une courbe (Δ) par rapport au pôle est encore une courbe (Δ) ; les ordres de ces deux courbes sont liés par la relation $n + n_i = 0$, ce qui est évident.

Enfin, de la formule F_R, on déduit, comme M. d'Ocagne l'a déjà signalé (*Annales de l'Ecole normale*, année 1887) que la polaire réciproque d'une courbe (Δ) est également une courbe (Δ) ; les ordres de ces deux courbes sont liés par la relation

$$n = -\frac{n}{n+1}.$$

laquelle est due à Salmon (*Higher plane curves*).

Pour qu'une courbe (Δ) soit réductible à un point, en prenant ses podaires successives, il faut et il suffit que l'expression $\frac{2}{\Delta - 2}$ soit égale à un nombre entier p (*Revue*, juin 1909) ; il suffit de prendre $p+1$ fois la podaire de cette courbe (Δ) pour obtenir un point. Remplaçons Δ par sa valeur en fonction de l'ordre, $\Delta = \frac{2}{n+1}$, nous avons $\frac{2}{\Delta - 2} = -1 - \frac{1}{n}$; par suite :

Pour qu'une courbe (Δ) soit réductible à un point, il faut et il suffit que son ordre soit égal à l'inverse d'un nombre entier p positif ou négatif ; il faut prendre la podaire d'ordre $-p$ de cette courbe (Δ) pour obtenir un point.

L'équation générale des courbes de cette famille est donc

$$\rho^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{p}} \cos \frac{\omega}{p},$$

p étant un entier.

(1) Cette propriété a été énoncée par J. Bertrand.

C'est là une proposition un peu plus générale que celle signalée par Haton de la Goupillière (*Nouvelles Annales*, 1876), d'après laquelle si $n = -\frac{1}{N}$ ($N > 0$, entier), il y a une podaire de la courbe (Δ) qui est une ligne droite.

Remarquons enfin que l'inverse et la polaire réciproque par rapport au pôle, d'une courbe (Δ) réductible à un point, sont également réductibles à un point.

Pour que deux courbes (Δ) soient réductibles l'une à l'autre (*Revue*, mai 1909), il faut et il suffit que l'expression $2\left[\frac{1}{\Delta-2} - \frac{1}{\Delta'-2}\right]$ soit égale à un nombre entier positif ou négatif, c'est-à-dire que leurs ordres satisfassent à la relation

$$\frac{1}{n'} - \frac{1}{n} = q,$$

q étant un entier quelconque ; il suffira de prendre q fois la podaire de la courbe (Δ) pour obtenir la courbe (Δ').

Dans le *Journal de Liouville* (année 1866), Haton de la Goupillière a déterminé directement la courbe semblable à sa podaire et a trouvé la spirale logarithmique ; dans la *Revue* (juin 1909) j'ai déduit ce problème de la formule F_8 et j'ai montré que les courbes dont la podaire d'ordre déterminé k est semblable à leurs polaires réciproques ou leurs inverses, avaient, outre la spirale logarithmique, respectivement pour Δ,

$$\Delta = \frac{4k+2}{k-1}, \qquad \Delta = \frac{2k}{k-2};$$

il en résulte que ces courbes ont pour équations

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{2k+1}{k+2}} = A \cos \frac{k+2}{2k+1}\,\omega, \qquad \rho^{-\frac{k}{2}} = B \cos \frac{2\omega}{k}.$$

Première généralisation des courbes (Δ). — Déterminons les courbes pour lesquelles le rapport $\frac{R}{\rho}$ est une fonction connue du rayon vecteur $\frac{R}{\rho} = f(r)$; elles satisfont à l'équation différentielle

$$\frac{2(r^2 + r'^2)}{r^2 + 2r'^2 - rr''} = f(r).$$

Pour intégrer cette équation, nous emploierons la même méthode que pour les courbes (Δ) (*Revue*, mai 1909) ; posons $\frac{1}{r} = z$, l'équation devient

$$\frac{2(z^2 + z'^2)}{z^2 + zz''} = f\left(\frac{1}{z}\right), \qquad \text{ce que nous pouvons écrire} \qquad \frac{2zz' + 2z'z''}{z^2 + z'^2} = \frac{4}{f\left(\frac{1}{z}\right)}\,\frac{z'}{z},$$

ou encore, en posant $z' = u$, $\qquad \frac{2zdz + 2udu}{z^2 + u^2} = \frac{4dz}{zf\left(\frac{1}{z}\right)}.$

En intégrant une première fois, il vient $z^2 + u^2 = Ae^{\int_0^z \frac{4dz}{zf\left(\frac{1}{z}\right)}}$,

équation de laquelle nous tirons $\qquad \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = Ae^{\int_0^z \frac{4dz}{zf\left(\frac{1}{z}\right)}} - z^2,$

c'est-à-dire $\qquad d\theta = \frac{dz}{\left[Ae^{\int_0^z \frac{4dz}{zf\left(\frac{1}{z}\right)}} - z^2\right]^{\frac{1}{2}}};$

en intégrant une seconde fois, on obtient

$$\theta - \theta_0 = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\left[Ae^{\int_0^z \frac{4dz}{zf\left(\frac{1}{z}\right)}} - z^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous avons ainsi ramené la détermination de ces courbes à deux quadratures.

Deuxième généralisation des courbes (Δ). — Déterminons les courbes pour lesquelles le rapport $\frac{R}{\rho}$ est une fonction connue de l'angle polaire $\frac{R}{\rho} = \varphi(\omega)$.

Elles satisfont à l'équation différentielle $\dfrac{2r'^2 + r''^2}{r^2 + 2r'^2 - rr''} = \varphi(\omega)$.

Pour intégrer cette équation, nous emploierons la méthode, déjà citée, de M. Du Châtenet. A cet effet, nous écrirons l'équation précédente sous la forme

$$\frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} = \frac{2}{\varphi(\omega)} - 1 \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{\dfrac{r'^2 - rr''}{r'^2}}{1 + \dfrac{r^2}{r'^2}} = \frac{2}{\varphi(\omega)} - 1.$$

En intégrant, il vient $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{r'}{r} = \displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega} \left[\frac{2}{\varphi(\omega)} - 1\right] d\omega + \omega = \psi(\omega)$, c'est-à-dire $\dfrac{r'}{r} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \psi(\omega)}$.

En intégrant une seconde fois, nous avons $\log r = A \displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\operatorname{tg} \psi(\omega)} = \log \chi(\omega)$, d'où $r = \chi(\omega)$.

La détermination des courbes considérées dépend encore de deux quadratures.

ALGÈBRE

1849. *On considère le déterminant*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

et on suppose que ses éléments satisfont aux diverses relations

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ij'} = 0, \qquad (j \neq j')$$

les nombres i et j prenant successivement toutes les valeurs entières de 1 à n.

1° *Démontrer que l'on a dans ces conditions*

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ij'} = 0.$$

2° *Démontrer que D est égal à ± 1 et que chaque élément de D est égal au mineur correspondant multiplié par ± 1.*

3° *On considère l'équation*

$$\Delta(S) = \begin{vmatrix} a_{11} - S & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - S & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdots & a_{nn} - S \end{vmatrix} = 0 ;$$

démontrer que cette équation est réciproque.

Quand admet-elle sûrement les racines $+1$ ou -1 ?

1° et 2°. Les deux premières parties ne sont que la généralisation bien connue des propriétés classiques que l'on obtient pour $n = 3$. Leur véritable origine réside dans la question suivante :

Étant donnée la substitution linéaire définie par les formules

$$(1) \qquad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait identiquement

$$(2) \qquad y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

En remplaçant y_i par sa valeur (1) et en identifiant les deux formes quadratiques en x_i qui sont alors

dans les deux membres de (2), on obtient de suite les relations (1) de l'énoncé, qui sont les conditions nécessaires et suffisantes demandées.

Résolvons maintenant les équations (1) par rapport aux x. Pour avoir x_k par exemple, on multiplie la première équation par a_{1k}, la seconde par a_{2k}, ..., la n^e par a_{nk}, et l'on ajoute ; en tenant compte des relations (1) de l'énoncé, nous avons

$$(3) \qquad x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} y_i \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

Si nous portons maintenant ces valeurs dans (2), en identifiant les deux formes quadratiques en y_i, nous avons les relations (2) de l'énoncé.

Faisons à présent dans (1) :

$$x_1 = A_{i1}, \qquad x_2 = A_{i2}, \qquad \ldots \qquad x_n = A_{in},$$

en appelant A_{ik} le coefficient de a_{ik} dans le développement de D. Nous avons

$$y_i = D \qquad \text{et} \qquad y_k = 0, \qquad (k \neq i)$$

Portons dans (3), il vient

$$(4) \qquad A_{ik} = D . a_{ik}.$$

D'autre part, en élevant D au carré, suivant la règle de multiplication des déterminants, on a

$$D^2 = 1.$$

On déduit de là les propriétés de (2°).

3° Faisons le produit de D par $\Delta(S)$ ligne par ligne ; nous aurons

$$D . \Delta(S) = \begin{vmatrix} 1 - Sa_{11} & -Sa_{12} & \ldots & -Sa_{1n} \\ -Sa_{21} & 1 - Sa_{22} & \ldots & -Sa_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -Sa_{n1} & \ldots & \ldots & 1 - Sa_{nn} \end{vmatrix},$$

et ceci donne

$$D . \Delta(S) = (-1)^n . S^n . \Delta\left(\frac{1}{S}\right).$$

Cette relation nous montre bien que l'équation $\Delta(S) = 0$ est réciproque.

Si l'on fait $S = 1$ dans l'identité précédente, on a

$$\Delta(1)[D - (-1)^n] = 0.$$

Si n est pair, on aura certainement la racine 1, quand $D = -1$. Si n est impair, on l'aura au contraire, pour $D = +1$.

De même, nous avons

$$\Delta(-1)[D - 1] = 0.$$

Donc, si $D = -1$, on aura toujours la racine -1, quelle que soit la parité de n.

J. HAAG.

Bonne solution de M. R. Dontot.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1846. — *On considère un paraboloïde de révolution d'axe Oz, tangent en son sommet O au plan xOy. Le cylindre droit ayant pour base un cercle quelconque C du plan xOy coupe le paraboloïde suivant une conique située dans le plan polaire d'un certain point γ de l'espace. A tout point de l'espace correspond donc un cercle du plan et inversement. On demande d'étudier la correspondance ainsi définie. En particulier :*

Lieu des points γ correspondant à des cercles concentriques.

Lieu des points γ qui correspondent aux cercles orthogonaux à un cercle fixe, ou le coupant sous un angle V donné ;

Lieu des points γ correspondant aux cercles tangents à un cercle fixe.

Lieu des points γ correspondant à des cercles de rayon R donné.

Lieu des points γ qui correspondent aux cercles homothétiques d'un cercle donné par rapport à un point fixe.

Lieu des points correspondant aux cercles qui enveloppent une quartique bicirculaire.

Points γ correspondant à deux faisceaux de cercles orthogonaux.

Etudier ce que devient la transformation par inversion par rapport à un cercle d'inversion ayant l'origine O pour centre, ou par rapport à un cercle quelconque du plan xOy.

Prenons le paraboloïde (P) $x^2 + y^2 = 2pz$, et un cercle quelconque (C) du plan xOy,

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

Le cylindre droit défini par ce cercle coupe le paraboloïde suivant une conique située dans le plan $2pz - 2ax - 2by + c = 0$.

Identifions ce plan avec le plan polaire de (γ) (α, β, γ), qui est $\alpha x + \beta y - p\gamma - pz = 0$.

On trouve immédiatement $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = 2p\gamma$.

L'équation du cercle (C) correspondant ainsi au point (γ) de coordonnées α, β, γ est

$$(C) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2p\gamma = 0.$$

Le point (γ) est donc sur l'axe du cercle considéré. Considérons les cas particuliers qui peuvent se présenter : cercles points ; cercles réels ou imaginaires, etc. Le rayon R est donné par

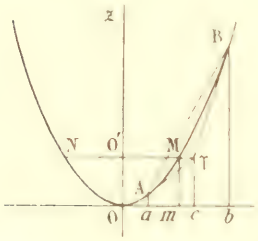
$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2p\gamma.$$

Donc le cercle est réel quand (γ) est extérieur au paraboloïde, imaginaire dans le cas contraire. Il est réduit à un point si (γ) est sur (P). Enfin on verrait que les cercles-droites sont représentés par des points à l'infini faciles à obtenir.

La puissance de l'origine par rapport au cercle (C) est $2p\gamma$, du signe de γ. Donc si le point représentatif est au-dessus de xOy, on a un cercle ne contenant pas l'origine. Sinon, la cote de (γ) est négative. En particulier, les cercles passant par O ont des points représentatifs à cote nulle.

Géométriquement, on sait que les coniques d'un paraboloïde de révolution se projettent suivant des cercles sur le plan tangent au sommet, et inversement. De plus le pôle du plan d'une de ces coniques est sur la parallèle à l'axe passant par son centre, ce qui établit l'existence du point représentatif d'un cercle donné et montre qu'il est sur l'axe de ce cercle. On établira sans peine les autres propriétés énumérées ci-dessus et concernant la réalité de ces cercles et les cas où ils sont réduits à un point ou à une droite.

Etablissons les autres propriétés : représentons la section de la figure par le plan de symétrie passant par l'axe Oz de (P) et par c, centre de (C) ; aA et bB sont deux génératrices du cylindre (C). Admettons, ce qui sera démontré plus loin, que deux cercles orthogonaux ont des points représentatifs conjugués par rapport à (P). Le cercle MN de section plane de (P) contenant dans son plan le point (γ), est alors en projection horizontale orthogonal à (C). La puissance de O par rapport à (C) est donc $\overline{Om}^2 = Oa.Ob = \overline{OM}^2 = 2p.Mm = 2p.\gamma$, résultat déjà obtenu par le calcul.



On en déduit pour le rayon de (C), $R^2 = Oc^2 - \overline{Om}^2 = \overline{Oc}^2 - 2p\gamma$, qui est encore le résultat déjà obtenu.

Cercles concentriques. — Le calcul montre que, α, β restant fixes, le point (γ) décrit une parallèle à Oz. Le point où elle coupe (P) sépare les points représentatifs des cercles réels et des cercles imaginaires.

Géométriquement, ceci résulte immédiatement des remarques précédentes.

Cercles orthogonaux ou se coupant sous l'angle V. — Traitons les deux cas simultanément ; α', β', R' étant pour un cercle (C') les quantités analogues à α, β, R, on a pour l'angle V sous lequel se coupent les deux cercles, en désignant par d la distance des centres, $d^2 = R^2 + R'^2 - 2RR' \cos V$; ou encore en chassant les radicaux que contiennent R et R', $(d^2 - R^2 - R'^2)^2 = 4R^2R'^2 \cos^2 V$, qui devient ici

$$[(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2p\gamma] - (\alpha'^2 + \beta'^2 - 2p\gamma')]^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2 - 2p\gamma)(\alpha'^2 + \beta'^2 - 2p\gamma') \cos^2 V$$

Si l'on simplifie, et que pour avoir le lieu des points (γ') correspondants aux cercles coupant (C) sous l'angle V, on remplace α', β', γ' par des coordonnées courantes, on trouve

$$(\alpha x + \beta y - p\gamma - pz)^2 = (x^2 + y^2 - 2pz)(\alpha^2 + \beta^2 - 2p\gamma) \cos^2 V,$$

quadrique circonscrite à (P) tout le long de la conique du plan polaire de (γ). On sait que ces quadriques dépendent d'un seul paramètre qui est précisément ici $\cos^2 V$. Le cas où $\cos V = 0$ est celui des cercles orthogonaux qui donne comme lieu le plan $\alpha x + \beta y - pz - p\gamma = 0$, plan polaire de ($\gamma$). En particulier, on obtient ce résultat remarquable : deux cercles orthogonaux sont représentés par deux points conjugués par rapport à (P).

Géométriquement, considérons deux cercles orthogonaux (C) et (C'), se coupant en un point a, projection du point A de (P) où se coupent les coniques projetées horizontalement suivant ces cercles. Les deux tangentes à ces coniques en A sont conjuguées par rapport à (P), car en projection horizontale elles sont conjuguées par rapport à la projection de la section de (P) par le plan tangent en A, projection qui est un cercle de rayon nul. Ces tangentes étant conjuguées, on en déduira aisément que les deux points représentatifs le sont également.

Quant au cas de deux cercles se coupant sous l'angle V, nous ne donnerons pas de démonstration élémentaire, et nous nous bornerons à la démonstration suivante : cherchons combien il y a de points du lieu sur une droite quelconque. Remarquons d'abord que les cercles (C) passant par un point a du plan xOy correspondent aux points du plan tangent à (P) en A, aA étant parallèle à Oz. On en déduit que les cercles passant par deux points fixes a et b, ou cercles d'un faisceau, correspondent aux points d'une droite et inversement ; nous retrouverons d'ailleurs plus loin cette propriété. Or ici il y a deux cercles coupant (C) sous l'angle V et passant par deux points donnés a et b du plan xOy (on le démontre en transformant la figure par inversion avec a pour centre) ; donc il y a deux points du lieu sur une droite quelconque, et par suite le lieu est une quadrique. Si l'on remarque de plus qu'il y a une double infinité de cercles coupant le cercle (C) sous l'angle V en un point donné de ce cercle, on en déduira aisément l'existence sur cette quadrique d'un double système de génératrices, tangentes à (P) tout le long de la conique qui se projette sur xOy, suivant ce cercle (C) ; ceci montre que la quadrique cherchée est réglée et est circonscrite à (P).

Cercles tangents. — Ce cas correspond à $\cos V = \pm 1$, ou $\cos^2 V = 1$. On obtient alors pour la quadrique lieu des points représentatifs des cercles tangents à un même cercle (C) :

$$(\alpha x + \beta y - p\gamma - pz)^2 = (x^2 + y^2 - 2pz)(\alpha^2 + \beta^2 - 2p\gamma)$$

C'est le cône circonscrit à (P) ayant pour sommet le point (γ). En particulier, on voit que deux cercles tangents donnent deux points sur une même tangente à (P).

Géométriquement, il est évident que les deux points représentatifs de deux cercles tangents en a sont dans le plan tangent à (P) en A, et de plus en ligne droite avec ce point, donc sur une tangente en A à (P). On en déduit que tous les cercles tangents à (C) sont sur un cône de sommet (γ).

Cercles de rayon donné R. — On a vu que l'on a $R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2p\gamma$, ou avec des coordonnées courantes, $R^2 = x^2 + y^2 - 2pz$. Donc le lieu des points correspondant à de pareils cercles est un paraboloïde déduit du premier par une translation parallèle à Oz. Le nouveau sommet est au-dessous du premier à la cote $\frac{-R^2}{2p}$, qui varie comme le carré de R.

Géométriquement, on peut donner une démonstration analogue : remarquons d'abord que le lieu est de révolution et cherchons sa méridienne. En se reportant à la figure déjà faite, le point γ dont on cherche le lieu est tel que $\overline{Oc}^2 - 2p.\gamma c = R^2 =$ Constante. On en déduit immédiatement que le lieu est une parabole déduite de la parabole déjà tracée par une translation.

Cercles homothétiques. — On peut pour simplifier prendre le centre d'homothétie sur un des axes : H $(h, 0)$, le cercle (C) étant le cercle que l'on transforme par des homothéties de centre H en de nouveaux cercles de centre x, y et rayons ρ :

$$\frac{x-h}{\alpha-h} = \frac{y}{\beta} = \frac{\rho}{R}.$$

Les premières équations montrent que le lieu est dans un plan parallèle à Oz, et contenant la ligne des centres Hc. Si l'on élève au carré les deux dernières en remplaçant R et ρ par leurs valeurs, on a

$$y^2(\alpha^2 + \beta^2 - 2p\gamma) = \beta^2(x^2 + y^2 - 2pz) = 0 \quad \text{ou} \quad y^2 x^2 + y^2 - 2p\gamma y^2 - \beta^2 x^2 - \beta^2 y^2 + 2p\beta^2 z = 0,$$

paraboloïde, d'axe parallèle à Oz, qu'il faut couper par un plan parallèle à Oz ; on obtient donc comme lieu une parabole à axe vertical passant naturellement par (γ) qui correspond à (C) ; elle sera déterminée si l'on remarque, ce qui est facile à vérifier, qu'elle est tangente au paraboloïde (P) au point de (P) projeté horizontalement en H.

Géométriquement, nous nous bornerons au cas où le centre d'homothétie est extérieur à (C), cas où il y a deux droites fixes auxquelles sont tangents tous les cercles considérés. Les cercles tangents à la première droite ont leurs centres sur un cylindre circonscrit à (P), facile à déterminer d'après les propriétés ci-dessus. Il en est de même pour les cercles tangents à la seconde droite. Or ces deux cylindres se coupent suivant deux paraboles tangentes à (P) au même point ; l'une d'elles correspond à l'une des deux familles de cercles tangents à deux droites, et l'autre à la seconde famille. L'une des deux familles contient le cercle (C) et donne bien la parabole trouvée ci-dessus par le calcul.

Cercles enveloppant une quartique bicirculaire. — Ils sont, comme l'on sait, déterminés par la condition d'être orthogonaux à un cercle quelconque, par exemple à (C) et d'avoir leurs centres sur une conique, x, y, z étant le point représentatif correspondant, on a donc pour x, y la relation $f(x, y) = 0$, équation de la conique, et de plus la condition d'orthogonalité : $\alpha x + \beta y - pz - p\gamma = 0$; l'ensemble de ces équations définit une conique se projetant sur xOy suivant la conique déférente, et par suite de même nature. Il est facile de voir que toute conique de l'espace correspond ainsi à une quartique bicirculaire.

Géométriquement, il suffit de reprendre le même raisonnement.

Faisceaux de cercles orthogonaux. — Nous nous bornerons à la solution géométrique, le calcul ne présentant aucune difficulté. Nous avons déjà montré que les cercles passant par deux points fixes ou cercles d'un faisceau correspondent aux points d'une droite, et que deux cercles orthogonaux correspondent à deux points conjugués. Les points conjugués à tous les points d'une première droite étant sur une seconde droite, on voit que deux faisceaux de cercles orthogonaux correspondent à deux droites conjuguées, et inversement. L'une des droites coupe le paraboloïde en deux points réels ; elle correspond au faisceau dont les points limites sont réels. Le cas particulier de deux faisceaux orthogonaux formés de cercles passant tous en un même point fixe, correspond au cas de deux droites conjuguées et tangentes en un même point à (P).

Inversion. — Supposons que le cercle d'inversion soit quelconque, et prenons simplement son centre sur Ox, en H$(h, 0)$, la puissance d'inversion étant k^2. Le cercle d'inversion sera représenté dans l'espace par le point K de coordonnées h, 0, $\dfrac{h^2 - k^2}{2p}$; prenons un cercle quelconque, (C) par exemple, correspondant au point α, β, γ, et son inverse (C′) correspondant à α', β', γ'. On a entre ces quantités

les relations faciles à établir

$$\frac{\alpha - h}{\alpha' - h} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{h^2 - 2\alpha h + 2p\gamma}{h^2} = \frac{h^2}{h^2 - 2\alpha' h + 2p\gamma'},$$

relations que l'on obtient en effectuant la transformation par inversion indiquée. On verra aisément que les rapports ci-dessus donnent successivement

$$\frac{\alpha - h}{\alpha - h} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{h^2 - h^2 + 2p\gamma}{h^2 - h^2 + 2p\gamma'} = \frac{\dfrac{h^2 - k^2}{2p}}{\dfrac{h^2 - k^2}{2p}},$$

et ceci montre que les points (γ) et (γ') sont en ligne droite avec le point k. Mais ceci ne suffit pas à définir (γ') connaissant (γ). Pour obtenir une seconde relation entre ces deux points, il est bon de considérer le cas où $h = 0$, cas facile à étudier, qui indique la marche à suivre dans le cas général.

Cherchons le point de rencontre de la droite qui joint les trois points considérés avec le plan polaire de K par rapport à (P),

$$2hx - h^2 + k^2 - 2pz = 0.$$

Un tel point peut être pris sous la forme $\dfrac{\alpha + m\alpha'}{1 + m}$; $\dfrac{\beta + m\beta'}{1 + m}$; $\dfrac{\gamma + m\gamma'}{1 + m}$. On trouve pour valeur de m la valeur commune des rapports précédents : par exemple $\dfrac{\beta}{\beta'}$; si l'on cherche la valeur qui correspond au point K qui est aussi sur la droite considérée, on trouve $\dfrac{-\beta}{\beta'}$; donc deux points représentatifs de cercles inverses sont conjugués harmoniques par rapport au point K et à son plan polaire. C'est donc une transformation homographique simple qui permet dans l'espace de passer de l'un à l'autre.

Géométriquement, il est évident que les trois points γ, γ', K sont en ligne droite, car deux cercles inverses et le cercle d'inversion font partie d'un même faisceau. Quant à la seconde propriété, elle peut se démontrer de façon élémentaire, mais nous nous bornerons à remarquer que les deux cercles considérés coupent sous le même angle le cercle d'inversion, et que par suite leurs points représentatifs sont sur une quadrique qui admet précisément comme plan polaire du point K, le même plan que (P), car elle est circonscrite à (P) suivant la conique de section par ce plan.

Applications diverses. — Les applications du procédé qui précède sont des plus nombreuses, et l'on peut de façon générale faire correspondre à tout point de l'espace un cercle du plan, et inversement. Rappelons que les cercles d'un faisceau correspondent à une droite dans l'espace; une conique de l'espace correspond aux cercles qui enveloppent une quartique bicirculaire. Une quadrique correspond à un ensemble de cercles tel qu'il y en ait toujours deux ayant un centre donné, ou mieux, dont passant par deux points donnés. On peut étudier les courbes du plan xOy, en les considérant comme enveloppes de leurs cercles osculateurs, ou comme enveloppes de cercles passant par l'origine, etc. Nous allons indiquer quelques applications de ces diverses méthodes.

La puissance d'un cercle par rapport à O est d'autant plus grande que le point représentatif est plus haut; donc, étant donnée une famille de cercles homothétiques, les cercles dont la puissance est la même par rapport à O ont deux à deux leurs centres symétriques par rapport à un point de la ligne des centres qui correspond au cercle pour lequel la puissance est minimum.

Une quartique bicirculaire se transforme par inversion en une autre quartique bicirculaire. Une quartique bicirculaire est de quatre façons différentes une enveloppe de cercles, etc.

Les cercles coupant sous des angles connus deux cercles fixes donnés ont leurs points représentatifs

sur deux quadriques circonscrites à (P), donc sur deux coniques ; ils se groupent donc en deux familles, chacune d'elles étant une famille de cercles bitangents à une quartique bicirculaire, etc...

A. SAINTE-LAGUE.

Bonnes solutions : MM. Nevitans, 2e Artillerie ; A. Gerardots, lycée de Douai ; A. Boussac, à Landrecies.
Solution partielle de M. Amblard.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1865. — *Un paraboloïde hyperbolique équilatère a pour sommet le point de cote* 10cm *et d'éloignement* 10cm *projeté sur le grand axe de la feuille ; une parabole principale* P *est horizontale et son foyer de cote* 10cm *et d'éloignement* 10cm *est situé à* 4cm,5, *à droite du sommet.*

Un second paraboloïde hyperbolique a pour plan directeur un plan de profil ; il admet pour génératrices rectilignes : 1° l'axe du premier paraboloïde ; 2° une horizontale de cote 13cm, *dont la projection sur le plan de la parabole* P *rencontre l'axe de cette parabole à* 3cm *à gauche du sommet et la tangente au sommet à* 3cm *en avant du sommet.*

On considère, d'une part, la région A *de l'espace limitée par le premier paraboloïde et qui correspond à l'intérieur de la parabole* P ; *d'autre part la région* B *de l'espace limitée par le second paraboloïde et qui correspond à la partie du plan horizontal de cote* 10cm *située en avant de l'axe du premier paraboloïde.*

Représenter le solide limité par les deux paraboloïdes, par les plans horizontaux de cotes 17cm *et* 2cm *et par le plan de profil situé à* 10cm *à droite du sommet du premier paraboloïde, la partie solide étant à la fois dans les régions* A *et* B.

On supposera les plans de projection transparents.

(Concours des lycées mathématiques, épreuves pratiques, 1909.)

Soit s, s' le sommet du premier paraboloïde dont la parabole principale P, P a pour foyer f en projection horizontale. Ce paraboloïde étant équilatère et son axe étant l'axe de la parabole P qui est horizontale, ses deux plans directeurs passent par cette droite et sont inclinés à 45° sur le plan de la parabole. Ils coupent le plan de profil s, s' suivant deux droites symétriques par rapport au plan de front de l'axe et qui sont les deux génératrices de la surface contenues dans le plan tangent au sommet.

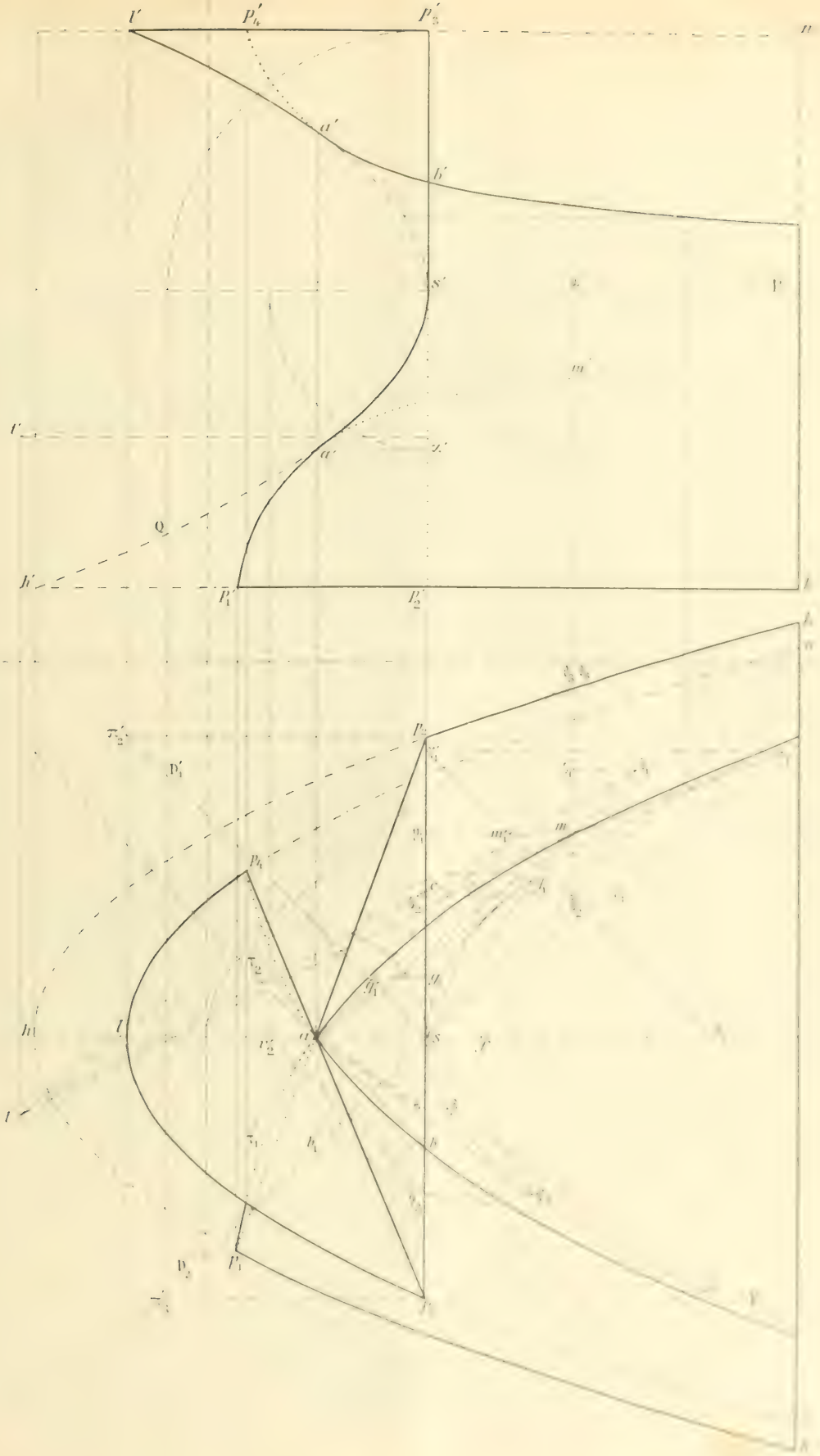
Soit ab la projection horizontale de la seconde génératrice donnée sur le second paraboloïde ; la cote du point B de l'espace au-dessus du plan de la parabole P qui contient la première génératrice étant égale à l'éloignement sb de ce point par rapport au plan de front as, la droite SB parallèle au plan directeur de profil est inclinée à 45° sur le plan horizontal et par suite coïncide avec l'une des génératrices contenues dans le plan tangent au sommet du premier paraboloïde. C'est d'ailleurs une génératrice de la seconde surface. Donc les deux paraboloïdes ont en commun cette génératrice SB.

Nous pourrons donc trouver leur ligne d'intersection, qui est une cubique gauche, en faisant passer des plans auxiliaires par SB et prenant chaque fois le point commun aux deux génératrices de systèmes différents sur chaque surface.

Détermination d'un point courant de l'intersection. — Nous commencerons par construire avec soin la parabole principale P dont nous connaissons le foyer et le sommet. Considérons maintenant le plan auxiliaire défini par SB et par sa trace $s\gamma$ sur le plan de P ; il coupe le premier paraboloïde suivant une seconde génératrice qui est tangente à la parabole P au point γ et que nous obtenons en prenant l'intersection c de la tangente au sommet sc avec le diamètre cc_1 mené par le milieu de la corde $s\gamma$, soit $c\gamma$. Le même plan auxiliaire coupe le second paraboloïde suivant une génératrice parallèle à son second plan directeur qui est horizontal et qui rencontre la génératrice verticale projetée au point a. Cette génératrice se projette donc suivant la parallèle menée par a à l'horizontale $s\gamma$ du plan qui la contient, soit am, et elle coupe $c\gamma$ au point m de la courbe d'intersection.

Nous pouvons maintenant projeter la figure sur le plan de profil du sommet S, ce qui donne les deux génératrices D'_1 et D'_2 du premier paraboloïde et la projection verticale $\gamma'_1\delta'_1$ de la génératrice $c\gamma$, parallèle à D'_1 ; nous en déduisons la cote $\mu m'_1$ du point M et par suite la projection verticale m' de ce point sur le plan vertical primitif, en prenant $\mu' m' = \mu_1 m_1$.

Tangente au point courant. — La tangente en m à la courbe d'intersection est l'intersection des plans tangents aux deux surfaces. Nous aurons chacun de ces plans en construisant la seconde génératrice qui passe au point M sur chaque surface et l'associant à celle qui a donné le point M. Sur le premier paraboloïde la seconde génératrice est parallèle au plan directeur D'_2 et elle rencontre la génératrice D'_1 ; sa projection verticale auxiliaire est donc $g'_1 m'_1 0'_1$ parallèle à D'_2 et sa projection horizontale est $gm0_1$. Si nous coupons les deux génératrices par le plan horizontal de cote $\mu_1 m$, nous obtiendrons en $0'_1 0'_2$, $0_1 0_2$ l'horizontale du plan tangent en M au premier paraboloïde.



Echelle $\frac{3}{4}$.

Sur le second paraboloïde la seconde génératrice est de profil et rencontre l'axe de la parabole P. Sa projection verticale auxiliaire est donc sm'_1 et le point θ'_3, θ_3 où elle coupe $\theta'_1\theta'_2$ nous donne sa trace θ_3 sur le plan horizontal choisi précédemment. D'ailleurs nous savons que la trace du plan tangent au second paraboloïde sur ce plan est parallèle à la génératrice horizontale am, c'est donc la droite $\theta_3 t$, qui coupe $\theta_1\theta_2$ au point t de la tangente cherchée. Cette tangente est donc tm et sa projection verticale $t'm'$ s'obtient de suite, puisque nous connaissons la cote du point t.

Points remarquables. — Nous construirons d'abord les sections de chaque surface par les plans qui limitent le solide défini dans l'énoncé. A cet effet nous tracerons la parabole Q' section du premier paraboloïde par le plan principal de front et qui est égale à la première ; les points où elle coupe les deux horizontales de cote 2 et 17 font connaître les sommets h et l des deux paraboles horizontales égales à la parabole P, qui limitent le premier paraboloïde et dont les axes coïncident en projection avec celui de la parabole P. Le second paraboloïde est coupé par ces deux mêmes plans horizontaux suivant la génératrice p_1p_2, $p'_1p'_2$ et suivant la génératrice p_3p_4, $p'_3p'_4$. Le plan de profil KK' donne dans le premier paraboloïde une hyperbole et dans le second une génératrice dont les projections se confondent sur la ligne de profil K, K'.

La courbe d'intersection se compose d'abord de la génératrice commune sb, $s'b'$, puis de la cubique dont nous avons déterminé un point m, m' et dont la projection horizontale passe au point a, que nous obtenons deux fois en prenant les plans auxiliaires définis par les points de contact q_1, q_2 des tangentes menées à la parabole P par le point a ; les tangentes sont les projections des génératrices correspondantes du second paraboloïde, $a\pi_1$ parallèle à sq_1 et $a\pi_2$ parallèle à sq_2.

On peut remarquer que la projection horizontale de la courbe commune aux deux surfaces est symétrique par rapport à af, car le plan de front af est un plan de symétrie pour le premier paraboloïde, et le second admet la génératrice sf comme axe de symétrie, puisque si l'on fait tourner de 180° autour de cette droite les deux génératrices SB et la verticale aa' ainsi que le plan directeur horizontal qui suffisent à le définir, la figure ne change pas.

Pour les mêmes raisons, le plan horizontal de la parabole P étant plan de symétrie du premier paraboloïde, la projection verticale de l'intersection sera symétrique par rapport à $s'P'$.

On déduit de là les deux projections verticales a' des points a en prenant la cote des génératrices horizontales telles que $a\pi_2$. A cet effet nous projetons la génératrice aq_2 du premier paraboloïde en $q'_2v'_2$ parallèlement à sD'_1 et nous prenons la cote du point v'_2 où elle coupe la génératrice verticale ; nous reportons cette cote sv'_2 en $s'\alpha'$, d'où nous déduisons a'. Les points sur les paraboles horizontales hk et ln sont évidemment à l'intersection de ces paraboles par chacune des génératrices horizontales de même cote du second paraboloïde ; nous avons obtenu précédemment ces génératrices au moyen des projections verticales auxiliaires π'_2 et π'_3.

Asymptotes. — Le point m s'éloigne à l'infini dans deux cas : 1° Si la tangente en γ à la parabole est parallèle à $s\gamma$, ce qui ne se présente que si le point γ vient au sommet s ; le plan auxiliaire coïncide alors avec un des plans directeurs du premier paraboloïde. Il est d'ailleurs tangent au second paraboloïde au point s. Donc la construction de l'asymptote par la méthode ordinaire est en défaut, les deux plans tangents qui la donneraient étant confondus. On peut l'obtenir de la manière suivante :

Imaginons que l'on coupe les deux surfaces par une série de plans de profil se déplaçant de droite à gauche. Tant que le plan mobile n'a pas atteint le point s il coupe le premier paraboloïde suivant une hyperbole équilatère située dans l'angle COA des asymptotes et le second paraboloïde suivant une génératrice LL' dont la pente est inférieure à l'unité et qui coupe par conséquent l'hyperbole en question.

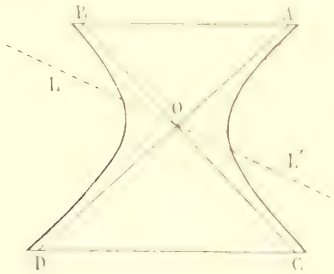


Fig. 1.

Au point s le plan de profil coupe les deux surfaces suivant la génératrice commune de pente unité.

A gauche du point s et jusqu'à la position symétrique de s par rapport à la génératrice verticale A, le plan de profil coupe encore l'hyperbole, qui désormais sera située dans l'angle AOB. Mais au delà, la pente de la génératrice du second paraboloïde devient inférieure à l'unité et cette génératrice ne coupe plus la première surface. Nous obtiendrons donc les points à l'infini de l'intersection sur la génératrice de profil symétrique de sp_3 par rapport à a, et c'est sa projection qui donne l'asymptote cherchée.

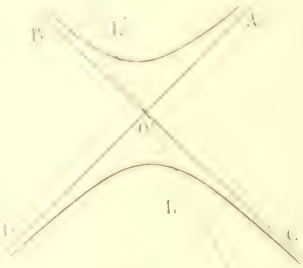


Fig. 2.

Les points de l'intersection s'éloignent encore à l'infini quand la seconde génératrice du premier paraboloïde s'éloigne à l'infini, sa projection horizontale touchant la parabole à l'infini. Le plan auxiliaire est alors hori-

zontal et comme il passe par l'axe de la parabole P on voit bien que les points de l'intersection viennent à la limite se placer sur cette parabole dont ils s'approchent indéfiniment.

Visibilité. — Tout d'abord nous remarquerons que le second paraboloïde ayant une génératrice verticale, la courbe d'intersection serait entièrement vue si cette surface restait seule. Il suffit donc d'examiner ce qui reste du premier solide. A cet effet nous reprendrons les plans de profil qui nous ont déjà servi à déterminer l'asymptote et suivrons le mouvement de la génératrice qu'ils donnent dans la seconde surface. D'après l'énoncé, si nous supposons l'observateur debout sur le plan horizontal vers l'infini, à droite et regardant le plan de profil, l'avant de la figure est à sa gauche et le solide commun aux deux régions de l'espace qui ont été définies est coupé suivant la surface couverte de hachures et affectant la forme (3) tant que le plan de profil n'a pas atteint le sommet S, puis la forme (4) entre ce sommet et le point A. Dans les deux cas, les deux points de l'intersection sont vus en projection horizontale. Mais après avoir dépassé le point A, la figure prend la forme (5) et on voit bien que les deux points d'intersection sont cachés.

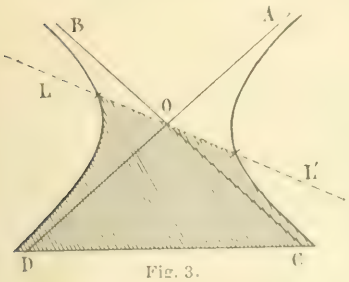


Fig. 3.

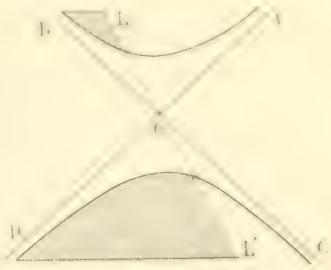


Fig. 4.

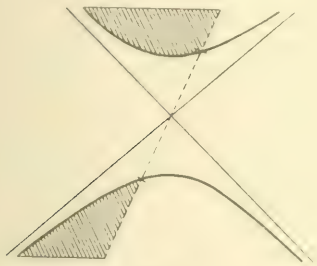


Fig. 5.

Le même raisonnement permet de reconnaître sans difficulté ce qui reste des deux paraboles horizontales qui limitaient le premier paraboloïde, et conduit à la ponctuation de l'épure.

La projection verticale se déduit sans peine de la projection horizontale et la ponctuation est déterminée d'une manière analogue par la considération des sections de profil et du plan de front de l'axe du premier paraboloïde.

On aurait pu construire l'intersection des deux surfaces en employant comme plans auxiliaires des plans horizontaux ; chacun d'eux donne sur le premier paraboloïde une parabole égale à la parabole P, et dont le sommet est projeté verticalement au point où la trace du plan coupe la parabole principale de front qu'on a préalablement tracée avec soin ; il donne sur le second paraboloïde une horizontale dont la projection horizontale passe toujours par le point a et dont on peut se donner un second point sur la génératrice de profil de pente unité. Il y a avantage à graduer d'abord cette génératrice, puis déterminer les plans horizontaux auxiliaires précisément par les cotes des points ainsi obtenus.

Pour ne pas avoir à construire les paraboles, on peut amener la figure sur le plan de la parabole P par une translation dont la grandeur est définie par la corde qui joint le point s' au sommet de la parabole auxiliaire ; il suffit alors d'effectuer sur la génératrice horizontale du second paraboloïde une translation égale à la projection horizontale de cette corde, et de prendre les points d'intersection de la droite ainsi obtenue avec la parabole P. On ramène ensuite les points d'intersection à leur vraie position par une translation égale et contraire à la première.

Si maintenant l'on remarque que l'un des deux points où chaque génératrice horizontale perce le premier paraboloïde est sur la génératrice commune SB, on est conduit à cette construction très simple : par un point quelconque δ de la parabole P on mène la parallèle à son axe, et on prend son intersection β avec sb, on a ainsi la translation $\beta\delta$ qui correspond à la cote du point β. On joint a et β, on mène par δ la parallèle à $a\beta$ et on prend son intersection ζ avec la parabole P, puis on donne à ce point [illegible] La translation [illegible] égale et contraire [illegible] donne le point de la courbe cherchée. Sa projection verticale s'obtient immédiatement puisque la cote du point est [illegible]

Bonne épure : M. Rousseau, à Fourmies.

PHYSIQUE

1784. — *Un point lumineux très brillant,* A, *est fixé à un diapason qui vibre verticalement en donnant* N = 800 *vibrations par seconde. L'on veut se trouver un miroir plan* P *tournant autour d'un axe vertical* L *situé dans son plan. Dans le plan horizontal passant par la position du point* A *et dans une direction* D *inclinée à* AL *on trouve l'image d'une lunette. L'objectif* O *est à une*

distance IO = IA *et la lunette est mise au point pour une distance double de* IO *; son champ angulaire est alors de* 7°,2 *et ce champ est plus que rempli par le miroir* P *quand celui-ci est à* 45° *de* AI. *Que verra-t-on dans la lunette quand le nombre* n *de tours accomplis par le miroir en une seconde ira en augmentant progressivement ? Que verra-t-on en particulier quand le miroir fera par seconde :* 1° 8 *tours ;* 2° 8 *tours et* $\frac{1}{500}$ *de tour ;* 3° 8 *tours moins* $\frac{1}{500}$ *de tour ?*

La lunette est précisément au point pour la distance à laquelle se forme, dans le miroir plan, l'image du point A. Cette image, en même temps qu'elle oscille, défile dans le champ de la lunette d'un mouvement uniforme dans une direction normale à la direction d'oscillation ; elle semble donc décrire une sinusoïde et la persistance des sensations lumineuses rend effectivement cette sinusoïde visible. Cherchons combien on peut en voir de concamérations dans le champ de la lunette.

Les positions extrêmes des images visibles sont à une distance angulaire α de 7°,2 ou $\frac{1}{25}\pi$, vues du point O ; elles sont donc à une distance angulaire 2α par rapport au point I qui en est deux fois plus rapproché. Or une rotation 2α de l'image autour de I correspond à une rotation α du miroir. Celui-ci tourne de $2n\pi$ en une seconde, de $\frac{1}{25}\pi$ en $\frac{1}{25}\pi \frac{1}{2n\pi} = \frac{1}{50n}$ de seconde. En une seconde, le diapason exécute N vibrations, en $\frac{1}{50n}$ de secondes, il en exécute $\frac{1}{50}\frac{N}{n} = \frac{800}{50}\frac{1}{n} = \frac{16}{n}$; tel est le nombre des sinuosités visibles dans le champ de la lunette. En particulier, pour $n = 8$, on en verra deux.

Supposons n petit ; on verra, deux fois par tour puisque le miroir est argenté sur ses deux faces, le champ sillonné par la sinusoïde. Si n augmente, les apparitions augmentent de fréquence et le nombre de sinuosités va en diminuant.

Pour une vitesse suffisante, les sensations résultant de deux apparitions consécutives se superposeront ; la sensation résultante sera plus ou moins confuse si les positions de deux sinusoïdes consécutives n'ont aucune relation simple ; mais si, pendant un tour du miroir, le diapason exécute un nombre entier de vibrations, les sinusoïdes successives se superposent et produisent la sensation d'une sinusoïde fixe. Or, pendant n tours du miroir, le diapason fait N vibrations ; pendant un tour il en fait $\frac{N}{n} = k$, qui doit être un nombre entier. Pour $N = 800$ et $n = 8$, la condition est remplie et $k = 100$.

Supposons qu'après un tour du miroir le diapason se retrouve dans la même position ; deux sinusoïdes consécutives coïncident. Si le miroir va un peu plus vite, toutes les images formant la seconde sinusoïde sont déplacées dans le sens du mouvement du miroir et la sinusoïde paraît se déplacer dans le sens de la rotation. Si au contraire le miroir va un peu moins vite, la sinusoïde paraît se déplacer en sens inverse.

Quel est le déplacement correspondant à $\frac{1}{500}$ de tour ? Un tour est effectué sensiblement en $\frac{1}{8}$ de seconde. $\frac{1}{500}$ de tour en $\frac{1}{4\,000}$ de seconde. La période du diapason étant $\frac{1}{800}$, $\frac{1}{4\,000}$ représente une fraction de période $\frac{800}{4\,000} = \frac{1}{5}$. Donc, au bout de 5 secondes, le déplacement correspondra à une période entière et la sinusoïde apparaîtra à la même place qu'au début. En d'autres termes, une sinuosité complète défile dans le champ en 5 secondes, à raison de 16 apparitions par seconde.

CONCOURS DE 1910 (*Suite*).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

(Places réservées aux sous-ingénieurs et contrôleurs des Mines.)

Analyse.

I. — **1910.** Calculer avec 6 décimales exactes la racine réelle de l'équation : $2x^5 + 10x - 1 = 0$.

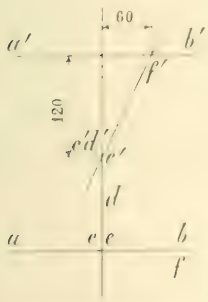
II. — **1911.** Étant donnée une fonction $F(x)$ représentée par une série. $F(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$ former la série qui représente $F'(x)$, la sommer et en déduire la fonction $F(x)$.

En tirer un développement du nombre $\frac{\pi}{4}$.

Géométrie et Mécanique.

I. — **1912.** Enveloppe et trajectoires orthogonales des paraboles qui ont même axe et même directrice.

II. — Une plaque rectangulaire pesante non homogène oscille successivement autour de chacun de ses quatre côtés placé horizontalement. Connaissant les durées des petites oscillations réalisées dans ces quatre positions, trouver le centre de gravité de la plaque.



III. — Une barre homogène AB repose sans frottement sur un plan horizontal ; elle est d'abord immobile. Une sphère S animée de la vitesse horizontale V_0 vient choquer normalement cette barre à une distance x du milieu. Trouver le mouvement du système après le choc en supposant les deux corps parfaitement élastiques.

Épure et Géométrie descriptive.

1913. — Les droites $(ab, a'b')$ et $(cd, c'd')$ sont les axes de deux cylindres de révolution A et B ayant respectivement pour diamètres 90 mètres et 80 mètres. La droite $(ef, e'f')$ est l'axe d'un cône de révolution dont le sommet est situé sur la surface du cylindre B, à gauche de cd, $c'd'$. Ce cône est en outre bitangent au cylindre A.

1° Représenter la portion du cône comprise entre les deux cylindres supposés enlevés.

2° Construire le développement de la surface latérale de cette portion de cône.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

1855. — *Calculer l'intégrale* $\int_0^1 \frac{x \operatorname{L} x \, dx}{(1+x^2)^2}$, *ainsi que l'intégrale* $\int_0^{\infty} \frac{x^4 - 3x - 3}{(x+1)^5} \sin x \, dx$.

I. Nous calculerons d'abord l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{x \operatorname{L} x \, dx}{(1+x^2)^2}$$

en appliquant la méthode de l'intégration par parties ; nous posons $u = \operatorname{L} x$, $dv = \frac{x \, dx}{(1+x^2)^2}$,

d'où $v = -\frac{1}{2(1+x^2)}$.

Nous avons alors

$$\int \operatorname{L} x \cdot \frac{x \, dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{\operatorname{L} x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

Or
$$\frac{1}{x(1-x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1-x^2},$$
et par suite
$$\int \frac{dx}{x(1-x^2)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{1-x^2} = \mathrm{L}x - \frac{1}{2}\mathrm{L}(1-x^2).$$

On en déduit
$$\int \frac{x\mathrm{L}x\,dx}{(1-x^2)^2} = \varphi(x)$$
en posant
$$\varphi(x) = -\frac{\mathrm{L}x}{2(1-x^2)} - \frac{1}{2}\mathrm{L}x + \frac{1}{4}\mathrm{L}(1-x^2).$$
et
$$\int_0^x \frac{x\mathrm{L}x\,dx}{(1-x^2)^2} = \varphi(x) - \varphi(0).$$

Reste à calculer $\varphi(x)$ et $\varphi(0)$ qui se présentent sous des formes indéterminées.

Mais on peut écrire
$$\varphi(x) = \frac{x\mathrm{L}x}{2(1-x^2)} - \frac{1}{4}\mathrm{L}(1-x^2),$$
et l'on voit que pour $x = 0$, $\varphi(x)$ est nul.

On a aussi
$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{L}x}{2(1-x^2)} - \frac{1}{4}\mathrm{L}\frac{x^2}{1-x^2}$$
et sous cette forme on reconnaît que pour $x = 1$, $\varphi(x)$ a pour limite 0. Donc $\varphi(0) = \varphi(x) = 0$, et
$$\int_0^1 \frac{x\mathrm{L}x\,dx}{(1-x^2)^2} = 0.$$

II. Décomposons en éléments simples la fonction rationnelle $\frac{x^2+3x-3}{(x+1)^3}$: nous obtenons
$$\frac{x^2+3x-3}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}.$$
et nous en déduisons
$$(1)\qquad \int \frac{x^2+3x-3}{(x+1)^3}e^x\sin x\,dx = \int \frac{e^x\sin x\,dx}{(x+1)^3} - \int \frac{e^x\sin x\,dx}{(x+1)^2} - \int \frac{e^x\sin x\,dx}{x+1}.$$

Calculons la première intégrale du second membre en intégrant par parties $\left(u = e^x\sin x,\ dv = \frac{dx}{(x+1)^3}\right)$. Nous avons
$$(2)\qquad \int \frac{e^x\sin x\,dx}{(x+1)^3} = -\frac{e^x\sin x}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{e^x\cos x\,dx}{(x+1)^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{e^x\sin x\,dx}{(x+1)^2}.$$
et de même
$$(3)\qquad \int \frac{e^x\cos x\,dx}{(x+1)^2} = \frac{e^x\cos x}{x+1} - \int \frac{e^x\sin x\,dx}{x+1} = \int \frac{e^x\cos x\,dx}{x+1}.$$
$$(4)\qquad \int \frac{e^x\sin x\,dx}{(x+1)^2} = \frac{e^x\sin x}{x+1} - \int \frac{e^x\cos x\,dx}{x+1} = -\int \frac{e^x\sin x\,dx}{x+1}.$$

Multiplions les égalités (2), (3) et (4) respectivement par 1, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, puis ajoutons-les membre à membre ; nous avons, en tenant compte de l'égalité (1),
$$\int \frac{x^2+3x-3}{(x+1)^3}e^x\sin x\,dx = -\frac{e^x\sin x}{2(x+1)^2} - \frac{e^x\cos x}{2(x+1)} - \frac{e^x\sin x}{2(x+1)}.$$

Le second membre s'annule pour $x = +\infty$, il prend la valeur $-\frac{1}{2}$ pour $x = 0$, on a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 3x + 3}{(x+1)^3} e^{-x} \sin x\,dx = \frac{1}{2}.$$

J. THOMAS, à Lyon.

Bonnes solutions par MM. G. Fougry, à Reims ; R. Halbronn, à Toul ; G. Lacu, à Rodez ; Paul Lioz, à Bordeaux ; A. Marescalchi ; P. Pattin, à Béziers ; Névejans ; A. Rousseau ; L. Simon, à Fourmies.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1838 et **1856**. — *Un point* M *se déplaçant sur une parabole* P *de foyer* F :

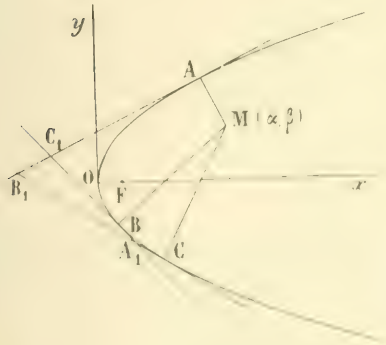
1° *Le lieu du centre du cercle* C *circonscrit au triangle normal circonscrit correspondant au point* M *est une parabole* P' ;

2° *Cette parabole* P' *est aussi le lieu du sommet d'un triangle isocèle normal circonscrit à la parabole* P *et correspondant à un point* M' *de la normale en* M *à la parabole* P ;

3° *Le lieu du point* M' *est une cubique. Cette cubique est aussi le lieu du point à égale distance de la parabole* P *et de son foyer* F ;

4° *Soit* C' *le cercle circonscrit au triangle normal circonscrit à la parabole* P *et correspondant à* M. C *et* C' *se rencontrent en* F *et en un second point dont on demande le lieu.*

Préliminaires. — La parabole P ayant pour équation $y^2 - 2px = 0$, et α, β étant les coordonnées d'un point M quelconque du plan, nous allons former l'équation générale du cercle circonscrit au triangle normal circonscrit correspondant à M.



Soient A, B, C les pieds des normales issues de M : y_0, y_1, y_2 les ordonnées de ces pieds ; A_1, B_1, C_1 les points de rencontre des tangentes en A, B, C qui forment le triangle normal $A_1B_1C_1$ circonscrit correspondant au point M ; (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) les coordonnées de A_1, B_1, C_1.

On sait que l'équation aux ordonnées des pieds des normales issues de (α, β) est $y^3 - 2p\alpha y - py - 2\alpha p^2 = 0$. d'où les relations

(1) $$y_0 + y_1 + y_2 = 0,$$

(2) $$y_1y_2 + y_0y_1 + y_0y_2 = -2p(\alpha + p),$$

(3) $$y_0y_1y_2 = 2p^2\beta.$$

On a aussi

(4) $$X_1 = \sqrt{x_0x_1} = \frac{y_0y_1}{2p} = \frac{p\beta}{y_1}, \qquad Y_1 = \frac{y_1 + y_0}{2} = \frac{-y_2}{2}.$$

donc

(5) $$\left(X_1 = \frac{p\beta}{y_1},\quad Y_1 = -\frac{y_2}{2}\right), \qquad \left(X_2 = \frac{p\beta}{y_2},\quad Y_2 = -\frac{y_1}{2}\right), \qquad \left(X_3 = \frac{p\beta}{y_0},\quad Y_3 = -\frac{y_0}{2}\right).$$

Pour calculer les coordonnées du centre du cercle circonscrit à $A_1B_1C_1$, formons l'équation de la *médiatrice* de A_1B_1 (ou perpendiculaire élevée à A_1B_1 en son milieu). Les coordonnées du milieu de A_1B_1 sont, puisque

$$\frac{X_1 + X_2}{2} = \frac{p\beta}{2}\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right) = \frac{p\beta(y_1 + y_2)}{2y_1y_2} = \frac{-\beta(2\alpha + p)}{2\alpha + p} = -\frac{\beta(2\alpha + p)}{4\alpha + 2p},$$

$$\frac{X_1 + X_2}{2} = -\frac{y_0^2}{4p}, \qquad \frac{Y_1 + Y_2}{2} = \frac{-(y_1 + y_2)}{4} = \frac{y_0}{4}.$$

Le coefficient angulaire de la médiatrice est celui de la normale en A_0, c'est-à-dire $-\frac{y_0}{p}$.

De sorte que l'équation de la médiatrice de A_1B_1 est

$$y - \frac{Y_1 + Y_2}{2} = -\frac{y_0}{p}\left(x - \frac{X_1 + X_2}{2}\right) \quad \text{ou} \quad y - \frac{y_0}{4} = -\frac{y_0}{p}\left(x + \frac{y_0^2}{4p}\right)$$

(6) $$xy_3 + py = \frac{py_3}{4} - \frac{y_3^2}{4p}.$$

La médiatrice de A_1C_1 a de même pour équation

(7) $$xy_2 + py = \frac{py_2}{4} - \frac{y_2^2}{4p}.$$

En résolvant (6) et (7) par rapport à x et à y, on obtient pour les coordonnées du centre du cercle circonscrit à $A_1B_1C_1$, après avoir supprimé le facteur $(y_2 - y_3)$,

$$x = \frac{p}{4} - \frac{1}{4p}(y_2^2 + y_3^2 + y_2y_3), \qquad y = \frac{y_2y_3(y_2 + y_3)}{4p^2} = -\frac{y_1y_2y_3}{4p^2}.$$

Or, $\quad y_2 + y_3 = -y_1, \qquad y_2^2 + y_3^2 + 2y_2y_3 = y_1^2,$ d'où, en tenant compte de (2) et (3),

$$y_2^2 + y_3^2 + y_2y_3 = y_1^2 - y_2y_3 = y_1^2 + (y_1y_2 + y_2y_3 + 2p(\alpha - p)) = y_1(y_1 + y_2 + y_3) + 2p(\alpha - p) = 2p(\alpha - p).$$

$$x = \frac{p}{4} - \frac{1}{4p} \times 2p(\alpha - p), \qquad y = -\frac{2p^2\beta}{4p^2}.$$

(8) $$x = \frac{3p - 2\alpha}{4}, \qquad y = -\frac{\beta}{2}.$$

Comme on sait que le cercle $A_1B_1C_1$ passe par le foyer $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$, l'équation de ce cercle est

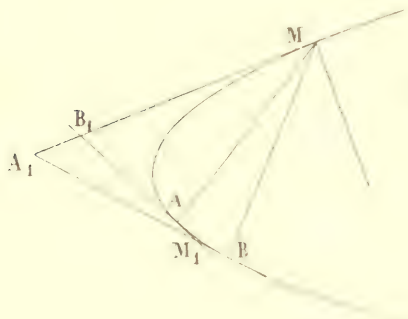
$$\left(x + \frac{2\alpha - 3p}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 = \left(\frac{2\alpha - 3p}{4} + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{\beta^2}{4},$$

ou

(9) $$x^2 + y^2 + \frac{x(2\alpha - 3p)}{2} + \beta y - \frac{p(\alpha - p)}{2} = 0.$$

Revenons maintenant à la question proposée.

1. Si le point M se déplace sur la parabole P, on a



(10) $$\beta = 2p\alpha, \qquad \beta = y_3, \qquad \alpha = \frac{y_3^2}{2p}, \qquad \lambda = p.$$

Le point M se confond avec C, et on a les deux autres normales MA, MB. (3) donne $y_1y_2 = 2p^2$.

Si on élimine α et β entre les deux équations (8) et l'équation (10), on a

(P') $$4y^2 + 4px - 3p^2 = 0.$$

C'est l'équation de la parabole P'.

2. Soient M' un point de la normale en M, A' et B' les pieds des deux autres normales issues de M'; M'_1, A'_1, B'_1 les points de rencontre des tangentes en M, A' et B'; (X'_1, Y'_1), (X'_2, Y'_2), (X'_3, Y'_3) les coordonnées de A'_1, B'_1, M'_1; y'_1, y'_2, y_3 les ordonnées de A', B' et M; (α', β') les coordonnées de M'. On voit sur la figure que si le triangle $A'_1B'_1M'_1$ est isocèle avec son sommet en M'_1, *la normale* MM' *est bissectrice extérieure de l'angle des deux autres normales* MA' *et* MB'.

Les coefficients angulaires de M'M, M'A', M'B' étant $-\frac{y_3}{p}$, $-\frac{y'_1}{p}$, $-\frac{y'_2}{p}$, on a la relation des bissectrices

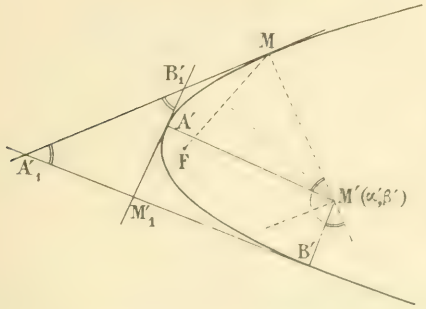
$$\frac{-\frac{y'_1}{p} + \frac{y_3}{p}}{1 + \frac{y_3y'_1}{p^2}} = \frac{-\frac{y_3}{p} + \frac{y'_2}{p}}{1 + \frac{y_3y'_2}{p^2}}.$$

ou

(11) $$2y_3y'_1y'_2 + p^2(y_3 + y'_1 + y'_2 - 2y_3) - y_3^2(y'_1 + y'_2) = 0.$$

Or $$y'_1 + y'_2 - y_3 = 0, \qquad y_3y'_1 + y'_2y_3 + y'_1y'_2 = -2p(\alpha' - p).$$

$$y'_1y'_2y_3 = 2p^2\beta'.$$



En faisant $y'_1 + y'_2 = -y_3$ dans (11), on a

$$(12) \qquad y_1^2 + 2y_1y_2 = 3p^2,$$

d'où

$$y_1y_2 = \frac{3p^2 - y_3^2}{2}.$$

On a alors α' et β' en fonction de y_3 :

$$-2p(\alpha' - p) = -y_3^2 - \frac{3p^2 - y_3^2}{2}, \qquad 2p\beta' = \frac{y_3(3p^2 - y_3^2)}{2}.$$

$$(13) \quad \alpha' = \frac{3y_3^2 + p^2}{4p}, \qquad \beta' = \frac{y_3(3p^2 - y_3^2)}{4p^2}.$$

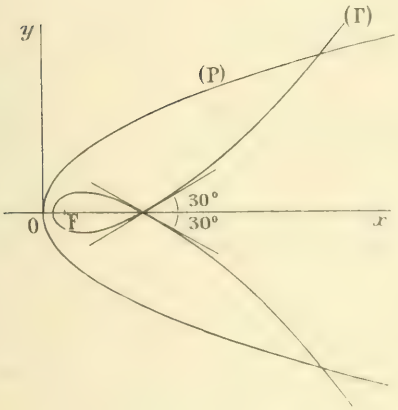
Cherchons maintenant le lieu du sommet M'_1 du triangle isocèle $A_1B_1M_1$. On a pour les coordonnées de M_1, d'après (5), $X'_3 = \frac{p\beta'}{y_3}$, $Y'_3 = -\frac{y_3}{2}$ et, d'après (13),

$$X'_3 = \frac{3p^2 - y_3^2}{4p}, \qquad Y'_3 = -\frac{y_3}{2}.$$

L'élimination de y_3 entre ces deux dernières équations donne

$$4Y_3'^2 + 4pX'_3 - 3p^2 = 0.$$

On retrouve bien la parabole P'.



3. Le lieu du point M' s'obtient en éliminant y_3 entre les deux équations (13), ce qui donne la cubique Γ,

$$(\Gamma) \qquad \beta'^2 = \frac{(4\alpha' - p)(2\alpha' - 3p)^2}{108p}.$$

Nous allons montrer que cette cubique est aussi le lieu des points à égale distance de la parabole P et de son foyer F. Cela revient à trouver le lieu du point de rencontre de la normale en M avec la perpendiculaire élevée à FM en son milieu.

Le coefficient angulaire de FM est $\frac{2py_3}{y_3^2 - p^2}$. La perpendiculaire élevée à FM en son milieu est donc

$$y - \frac{y_3}{2} = \left(x - \frac{y_3^2 + p^2}{4p}\right)\frac{(p^2 - y_3^2)}{2py_3}.$$

L'équation de la normale en M est $y - y_3 = -\frac{y_3}{p}\left(x - \frac{y_3^2}{2p}\right)$.

Si l'on résout ces deux équations par rapport à x et à y, on a, après avoir supprimé le facteur $(y_3^2 + p^2)$,

$$x = \frac{3y_3^2 + p^2}{4p}, \qquad y = \frac{y_3(3p^2 - y_3^2)}{4p^2}.$$

On retrouve les coordonnées (13), et par conséquent la cubique $y^2 = \frac{(4x - p)(2x - 3p)^2}{108p}$.

4°. L'équation de la ligne des centres CC' est

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{3p - 2\beta}{4} & -\frac{\beta}{2} & 1 \\ \frac{3p - 2\alpha}{4} & -\frac{\alpha}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en fonction de l'ordonnée y_3,

$$x(\beta - \beta') - y(\alpha - \alpha') - \frac{1}{4}\left[3p(\beta - \beta') + 2(\beta\alpha' - \alpha\beta')\right] = 0.$$

$$\alpha' - \alpha = \frac{y_3^2 + p^2}{4p}, \qquad \beta' - \beta = -\frac{y_3(y_3^2 + p^2)}{4p^2}, \qquad \beta\alpha' - \alpha\beta' = \frac{y_3}{8p}(y_3^2 + p^2)(y_3^2 + 2p^2).$$

L'équation de CC′ est donc, après disparition du facteur $(y_3^2 + p^2)$,

$$xy_3 + py + \frac{y_3(y_3^2 - p^2)}{4p} = 0. \tag{14}$$

La droite CC′ est donc parallèle à la normale en M.

La perpendiculaire abaissée du foyer F sur CC′ a pour équation

$$px - y_3 y - \frac{p^2}{2} = 0. \tag{15}$$

En résolvant (14) et (15), on a, pour coordonnées de la projection de F sur CC′,

$$x = \frac{2p^2 - y_3^2}{4p}, \qquad y = -\frac{y_3}{4}. \tag{16}$$

Le second point de rencontre des cercles C et C′ est le symétrique de F par rapport au point (16). Ses coordonnées sont donc

$$x = \frac{p^2 - y_3^2}{2p}, \qquad y = -\frac{y_3}{2}.$$

L'élimination de y_3 donne pour le lieu du second point de rencontre des cercles C et C′ la parabole

$$4y^2 + 2px - p^2 = 0. \tag{17}$$

Remarques. — Voici quelques autres lieux géométriques, conséquences de l'étude précédente.

1. *Si le point* M *est quelconque comme point d'intersection des tangentes* MA, MB, MC, *les médiatrices du triangle* $A_1B_1C_1$ *sont normales* [1] *à la parabole fixe* P, $4y^2 + 4px - 3p^2 = 0$.

2. *Lorsque* M *est situé sur la parabole* P, *le lieu de* M_1 *est la droite* $x = p$, *et le lieu des points* A_1 *et* B_1 *est la cubique*

$$y^2 = \frac{x^3}{2x - p}.$$

3. *Le lieu du sommet* M_1' *du triangle isocèle* $M_1'A_1'B_1'$ *est* (comme nous l'avons vu) *la parabole* P′,

$$4y^2 + 4px - 3p^2 = 0.$$

Le lieu des deux autres sommets A_1' *et* B_1' *de ce triangle est la quartique*

$$12y^4 + 8y^2(4px + 3p^2) - (8x^2 - 2px - 3p^2)^2 = 0.$$

Une recherche directe du lieu donnant à la fois les trois sommets de ce triangle conduit à l'équation

$$(8y^2 - 4px - 3p^2)(4y^2 - 2px - 3p^2) - 4(2px + 3p^2)^3 = 0,$$

qui est du sixième degré, et dont l'équation se compose de celles de la parabole et de la quartique précédentes.

4. *Les cercles circonscrits aux triangles* MAB *et* $M_1A_1B_1$ *enveloppent chacun une cubique.*

5. La cubique Γ, $y^2 = \dfrac{(4x - p)(2x - 3p)^2}{108p}$, est connue sous le nom de *cubique de Tschirnhausen* ou encore de cubique de l'Hôpital. Elle a de nombreuses et intéressantes propriétés, dont voici les principales :

I. — *La cubique* Γ *est le lieu des points à égale distance de la parabole* P $(y^2 - 2px = 0)$ *et de son foyer* F.

II. — *La cubique* Γ *est le lieu des points tels que l'une des normales abaissées de ce point sur la parabole* P *est la bissectrice extérieure de l'angle des deux autres normales issues de* P.

III. — *La cubique* Γ *est l'antipodaire de la parabole* Q $(4y^2 - 4px - p^2 = 0)$ *par rapport à son foyer* (qui est le même que celui de P).

IV. — *La caustique par réflexion de la cubique* Γ *est la développée de la parabole* P, *le point lumineux étant au foyer.*

V. — *La courbe* Γ *est la caustique par réflexion de la parabole* Q *pour des rayons lumineux perpendiculaires à l'axe de la parabole.*

VI. — *Une droite quelconque menée par le foyer* F *coupe la courbe* Γ *en trois points : les tangentes en ces trois points forment un triangle équilatéral* [2].

VII. — *Les tangentes à la courbe* Γ *aux extrémités de deux rayons vecteurs font un angle égal aux* $\frac{2}{3}$ *de l'angle de ces rayons vecteurs.*

---

[1] Les médiatrices enveloppent la cubique $(4x - p)^3 + 108py^2 = 0$, qui est la développée de la parabole P.

[2] Voir Revue, n° de novembre 1907, p. 337.

VIII. — *La polaire réciproque de la courbe* Γ *par rapport à une circonférence dont le centre est un point de* Γ *est une cardioïde.*

IX. — *La cubique* Γ *est le lieu du point tel que le cube de sa distance à une droite fixe est proportionnel au carré de sa distance à un point fixe.* La droite fixe et le point fixe sont la directrice et le foyer de P. D'ailleurs l'équation de Γ s'écrit

$$\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)^3}{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\frac{27p}{4}=\text{constante}.$$

X. — *La cubique* Γ *est le lieu du point qui divise chaque rayon de courbure de la parabole* P *dans le rapport de* 1 *à* 3, *à l'intérieur du rayon, le plus grand segment étant du côté du centre de courbure.*

XI. — *Les quatre courbes suivantes :* 1° *la parabole* P ; 2° *son cercle-foyer* F ; 3° *sa développée ;* 4° *la cubique* Γ *sont tangentes entre elles et ont pour corde de contact commune la directrice de* P.

XII. — *Périmètre de la boucle de la courbe :*

$$S=3p\sqrt{3}.$$

XIII(1). — *Aire de la boucle :*

$$I=\frac{9p^2\sqrt{3}}{10},\qquad U=\frac{3p}{10}\times S.$$

E.-N. BARISIEN.

Bonnes solutions : MM. G. Lagh, à Denain ; A. Rousseau, à Landrecies ; L. Sidon, à Fourmies ; Neveians, G. Fé... Assez bonne solution de M. J. Souraigné.

ÉCOLE CENTRALE

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1910)

Arithmétique, Algèbre, Trigonométrie — (M. Gérard)

5054. — La suite des nombres premiers est illimitée.

5055. — Si un nombre est premier avec deux autres, il est premier avec leur produit.

5056. — Démontrer que $\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}$.

5057. — Effectuer le produit $2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{2}{3}}$ et justifier la règle.

5058. — Calculer au moyen de la règle à calcul le produit $2{,}718\times 1{,}34$, le quotient $\frac{2{,}718}{2\sqrt{2}}$.

5059. — Calculer à 1/10 près $\pi\sqrt{3}$, πe, $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$, $\frac{\pi}{e}$. — Calculer d'abord une valeur approchée à l'aide de la règle à calcul.

5060. — Résoudre le système $x+y+z=1$, $ax+by+cz=k$, $a^2x+b^2y+c^2z=k^2$.

5061. — Résoudre le système $x+y+z=1$, $ax+by+cz=\alpha$, $\frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b}=\frac{\gamma}{c}=\frac{1}{\eta}$.

5062. — Résoudre le système $x+y+z=3$, $ax+by+cz=10$, $a^2x+b^2y+c^2z=10$, a, b, c étant les racines de l'équation $x^3-5x+1=0$.

5063. — Résoudre le système $bz-cy=l$, $cx-az=m$, $ay-bx=n$.

5064. — Formule de Taylor pour un polynome entier $f(x)$. Appliquer au calcul de l'expression

$$f(x+h)+4f\left(x+\frac{h}{2}\right)+hf'(x+h)+2hf'\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

5065. — Trouver un polynome $f(x)$, tel que $f(x+h)+4f\left(x+\frac{h}{2}\right)+hf'(x+h)+2hf'\left(x+\frac{h}{2}\right)=\varphi(x)$.

5066. — Somme des carrés des n premiers nombres entiers. Démontrer que $n(n+1)(n-1)$ est divisible par 6.

5067. — Somme des n premiers termes de la suite $u_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

5068. — Somme des cubes des n premiers nombres entiers. — Calculer la somme des n premiers termes de la suite $u_n=n(n+1)(n+2)$.

(1) Nous ajouterons que la cubique de Tschirnhausen est la seule cubique qui soit rectifiable algébriquement ou rationnellement. C'est donc la courbe de plus petit degré dont l'arc soit exprimable algébriquement ou rationnellement en fonction d'un paramètre. N. de J. M.

5069. — Limite de $\left(1 - \frac{1}{3m}\right)^m$ pour m infini. Montrer que $e < 2.72$.

5070. — Calculer e^2 au moyen de la règle à calcul. Vérifier en calculant la valeur de e^2 à $\frac{1}{100}$ près.

5071. — Calculer à 1/10 près $\sqrt{e}$, $\sqrt[3]{e}$, $\sqrt[4]{e}$, $e^{-\frac{1}{2}}$. Vérifier au moyen de la règle à calcul.

5072. — Trouver les logarithmes au moyen de la règle à calcul ; trouver par exemple le logarithme de 4.

5073. — Intérêts composés. Annuités. Annuités d'amortissement.

5074. — Etudier les séries :

$u_n = \frac{1}{3^{2n}+1}$, $u_n = \frac{1}{3^n - 2}$, $u_n = \frac{1}{4^n - 5}$, $u_n = \frac{n+2}{n \cdot 10^n}$, $u_n = \frac{2^n}{3 + 10^n}$, $u_n = \frac{3n}{4 + 10^n}$,

$u_n = \frac{10n}{3 + 10^n}$, $u_n = \frac{n}{1 + 2^n}$, $u_n = \frac{2n+1}{3 + 3^n}$, $u_n = \frac{2^n}{4 + 3^n}$, $u_n = \frac{3^n}{n + 4^n}$, $u_n = \frac{3^n}{n + 10^n}$,

$u_n = \frac{n^2}{3^n}$, $u_n = \frac{n^2+1}{2^n+4}$, $u_n = \frac{n+2^n}{n+3^n}$, $u_n = \frac{n+2^n}{n+10^n}$, $u_n = \frac{n+3}{n!}$, $u_n = \left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n$,

$u_n = \left(\frac{2n+4}{2n+5}\right)^n$, $u_n = \left(\frac{2n+5}{2n+8}\right)^n$, $u_n = \frac{1}{2n-5}$, $u_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, $u_n = \frac{1}{n^2}$, $u_n = \frac{n}{n^2+1}$,

$u_n = \frac{n+1}{n^3}$, $u_n = \frac{1+n}{n^{\frac{3}{2}}}$, $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$, $u_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n^2+1}$, $u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{3n^2-1}$, $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2n^2-1}$,

$u_n = \frac{2n+1}{\sqrt{n^3+1}}$, $u_n = \frac{\sin nx}{n^2}$.

5075. — Etudier la série $u_n = \frac{n+1}{4^n+1}$. Limite supérieure de l'erreur commise en prenant la somme des trois premiers termes comme valeur approchée de la somme de la série.

5076. — Etudier la série $u_n = \frac{n^2}{1+10^n}$. Limite supérieure de l'erreur commise en négligeant tous les termes à partir du quatrième. — Même question avec la série $u_n = \frac{n}{1+n^2}$.

5077. — Calculer à $\frac{1}{100}$ près la somme des termes de la série $u_n = \frac{1}{3+10^n}$.

5078. — Calculer à $\frac{1}{1000}$ près la somme des termes de la série $u_n = \frac{1}{2n \cdot 10^n}$.

5079. — Calculer à $\frac{1}{10}$ près la somme des termes de la série $u_n = \frac{2^n}{3+n^2}$.

5080. — Etant données deux séries u_n et v_n, si le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 1, les deux séries sont de même nature.

5081. — Étudier les séries :

$u_n = \mathrm{L}\,\frac{n^2+1}{n^2-3}$, $u_n = \frac{\mathrm{L}n}{e^n}$, $u_n = \frac{\mathrm{L}n}{n^2}$, $u_n = \frac{\mathrm{L}n}{n^2+1}$, $u_n = \frac{\mathrm{L}n}{\sqrt{n^2+1}}$,

$u_n = \frac{\sqrt{n}\,\mathrm{L}n}{2n^2-1}$, $u_n = \frac{\mathrm{L}n}{3^n-4}$, $u_n = \frac{n}{(n^2+1)\mathrm{L}n}$, $u_n = \mathrm{L}\cos\frac{n\pi}{n^2+1}$, $u_n = \sin\frac{1}{2n-5}$,

$u_n = 1 - \cos\frac{\pi}{2n+1}$, $u_n = \mathrm{tg}\,\frac{\pi n}{3n+1}$, $u_n = \arcsin\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$, $u_n = \arcsin\frac{2n}{4n^2-5}$, $u_n = \arccos\frac{2n-1}{2n+1}$,

$u_n = \arccos\frac{n^2+1}{n^2+2}$.

5082. — Étudier les séries :

$u_n = \frac{x^n}{3n+1}$, $u_n = \frac{x^n}{3n+4}$, $u_n = \frac{x^n}{\sqrt{3n+4}}$, $u_n = \frac{x^n}{3n^2+1}$, $u_n = \frac{x^n+n}{\sqrt{n}}$, $u_n = \frac{nx^n}{4n^2-5}$,

$u_n = \frac{nx^n}{\sqrt{n+1}}$, $u_n = \frac{n^2+1}{x^n}$, $u_n = \frac{n^2+1}{x^n+3}$, $u_n = \frac{1}{(n^2+1)x^n}$, $u_n = \frac{x\,\mathrm{L}n}{n^2}$, $u_n = \frac{(-1)^n}{3n-4}$,

$u_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$, $u_n = (-1)^n\,\frac{n^2+1}{n+3n}$, $u_n = \frac{(-2)^n}{3^n+4}$, $u_n = (-1)^n \cdot \frac{\mathrm{L}n}{n}$, $u_n = (-1)^n \cdot \frac{\mathrm{L}n}{3n-4}$, $u_n = \frac{(-1)^n}{2+\mathrm{L}n}$,

$u_n = \frac{(-1)^n}{\mathrm{L}3n}$.

5083. — Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$y = x^n$, $y = \mathrm{L}x$, $y = \arcsin x$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $y = x^{-\frac{1}{n}}$,

$y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = x^{\frac{4}{3}}$, $y = x^{\frac{3}{4}}$, $y = 2^{\sin x}$, $y = 3^{\sin x}$, $y = \mathrm{arc\,tg}\,x$, $y = e^x$, $y = e^{\sin x}$.

5084. — Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$y = e^{x L \sin x}$, $y = e^{x L \sin^2 x}$, $y = \sqrt[3]{1 - 2x}$, $y = L\sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{x}}$, $y = \sqrt{1 - L x}$,

$y = \dfrac{e^x \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$, $y = \text{arc} \sin 3x$, $y = \text{arc} \cos (2x^2 - 1)$, $y = \text{arc} \cos (4x^3 - 3x)$, $y = \text{arc tg} \dfrac{1 + x}{1 - x}$,

$y = \text{arc tg} \dfrac{2 + x}{1 - 2x}$, $y = \text{arc tg} \dfrac{2x}{1 - x^2}$, $y = L \operatorname{tg} x$, $y = L\left(\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right)$, $y = L \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)$,

$y = \dfrac{Lx}{x^n}$, $y = \sin (n \text{ arc} \sin x)$.

5085. — On donne $x = \cos t$, $y = f(t)$, calculer la dérivée de y par rapport à x. Même question en prenant $x = L(1 + t)$, $y = f(t)$.

5086. — Calculer y'_x sachant que $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

5087. — Même question avec $x = \sin 3t$, $y = e^{2t}$.

5088. — On donne $x = L(2t + 3)$, $y = e^{\sin t}$, t désignant un paramètre variable. Calculer les dérivées première et seconde de y par rapport à x.

5089. — Même question avec $x = \cos 3t$, $y = L(2t + 3)$.

5090. — Calculer la dérivée seconde de y par rapport à x, sachant que :

1° $x = 2^t$, $y = \text{arc tg } t$; 2° $x = \text{arc tg} \dfrac{1 + t}{1 - t}$, $y = Lt$

5091. — Formule des accroissements finis. Appliquer à la fonction $e^{\sin x}$.

5092. — Appliquer la formule des accroissements finis aux expressions suivantes :

$L15 - L14$, $\operatorname{tg} 8^\circ - \operatorname{tg} 7^\circ$, $2^{\sin 5^\circ} - 2^{\sin 4^\circ}$, $e^{\operatorname{tg} 5^\circ} - e^{\operatorname{tg} 4^\circ}$.

5093. — Dérivée de $y = \sin \dfrac{u}{v}$, u et v étant des fonctions données de x.

5094. — Dérivées des fonctions suivantes :

$y = x^x$ (variation), $y = x^{3x}$, $y = x^{x^2}$, $y = x^{x^x}$, $y = x^{\sqrt{x}}$, $y = x^{\sqrt{x^x}}$,

$y = x^{Lx}$, $y = x^{\operatorname{tg} x}$, $y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$, $y = (\sin x)^{\cos x}$, $y = (\sin x)^{x}$, $y = (\operatorname{tg} x)^{x}$.

5095. — Dérivée d'une fonction implicite. — Faire la démonstration sur l'exemple suivant : $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

5096. — Dérivée par rapport à x de la fonction y définie par l'une des équations suivantes :

$x^{\frac{2}{3}} = 2^y$, $x + y = 2^y$, $x^{\sin y} = h$, $2^x = \text{arc tg} \dfrac{y}{x}$,

$y^3 + y = e^{2x}$, $e^y + e^{-y} = 2x$ (Résoudre l'équation par rapport à y),

$x + 1 = 2^x + x^y$, $x = \text{arc} \cos y - \sqrt{1 - y^2}$, $y = 2x + 3 \text{ arc tg}(y - 2x)$.

5097. — Calculer y'_x, sachant que $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.
Limite de cette dérivée quand x tend vers 0.

5098. — Même question avec l'équation $x^3 + x^2 + xy - y^2 = 0$.

5099. — On donne l'équation $\text{arc tg } y = 2 \text{ arc tg } x$. — Trouver la dérivée y'_x. — Résoudre l'équation. — Exprimer $\operatorname{tg} ma$ en fonction de $\operatorname{tg} a$.

5100. — Théorème d'Euler sur les fonctions homogènes. Appliquer à

$z = \text{arc tg} \dfrac{x}{y}$, $z = \text{arc tg} \dfrac{x + y}{x - y}$.

5101. — Ayant trouvé la formule (fonctions homogènes) $xf'_x + yf'_y = mt^{m-1} f(x, y)$, dériver les deux membres par rapport à t.

5102. — Dérivées partielles par rapport à x et à y de la fonction z définie par l'équation $z = x^{\frac{y}{x}} + y^x$.

5103. — Soit $z = f(u, v)$, $u = x \cos y$, $v = x \sin y$. — Calculer les dérivées partielles de z.

5104. — On donne $z = f(u)$, $u = \sqrt{x^2 + y^2}$; calculer z'_x.

5105. — Etant donné $z = f(u, v)$, calculer z'_x, u et v étant des fonctions données de x et de y.

5106. — Dérivées partielles par rapport à x et à y de la fonction z définie par l'équation $f(u, v) = 0$, sachant que $u = x + 2z$, $v = y + 3z$.
Appliquer à $(x + 2z)^{y+3z} = 4$.

5107. — On a l'équation $x = f(y, z)$. Calculer z'_x.

5108. — On donne l'équation $y = 2x - f(x, z)$. Dérivée de z par rapport à x.

5109. — On a $x = y^{\frac{z}{y}}$; dérivées partielles de z par rapport à x et à y.

5110. — z est une fonction de x et y définie par l'équation $Lz = 2y + z$, trouver ses dérivées par rapport à x et à y.

5111. — Différentielle totale d'une fonction $u = f(x, y)$, sachant que $u = x^2 y$, $y = x^2 + y^2$.

5112. — Limite pour x infini de l'expression $y = x - Lx - \sqrt{1 + x^2}$.

5113. — x désignant l'infiniment petit principal, ordre infinitésimal de $L \sin \dfrac{2^x - 1}{x}$.

5114. — Variations de $y = \mathrm{L}\, x + \sqrt{x^2 + 1}$.

5115. — Maximum de $y = \cos x \cos 3x$.

5116. — Variations de $y = \sin x + \sin 4x$, $y = 2 \sin x + 3 \cos x$, $y = \operatorname{arc\,tg} a \sin x$,

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \qquad y = 3x^2 e^{-x}, \qquad y = \frac{1}{x^2}, \qquad y = (x-1)^{\frac{1}{3}}, \qquad y = x - 1(x-1)^{\frac{1}{3}}.$$

5117. — Maximum de $\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}$ dans un triangle rectangle.

5118. — On donne dans un cercle une corde $AB = l$. Étudier les variations de l'aire du segment quand l'angle au centre x varie en même temps que le rayon R du cercle.

5119. — Démontrer que $(2e^{m\pi i})^m = 2^m e^{m^2 \pi i}$.

5120. — Trouver la valeur de l'expression $\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^6$.

5121. — Trouver deux nombres réels x et y vérifiant l'équation $(x + yi)^4 = i$.

5122. — Calculer la racine carrée de $1 - i$.

5123. — Racines cubiques de l'unité ; racines cubiques de -1.

5124. — Racines cubiques de i, de $-i$, de $1 + i$, de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, de $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$, de $\frac{i - \sqrt{3}}{2}$, de $i - \sqrt{3}$.

5125. — Résoudre les équations

$$x^3 + 27 = 0, \qquad x^3 - 1 = 0, \qquad x^3 + 1 = 0, \qquad x^4 + 1 = 0,$$

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 0, \qquad x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 4 = 0, \qquad x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = 0, \qquad x^4 - x^2 + 9 = 0.$$

5126. — Relation indépendante de a et b entre les racines de l'équation $x^3 + (a - 1)x^2 + bx + (a + 1) = 0$. Somme des carrés des racines. — Condition pour que cette équation ait une racine double.

5127. — Condition de réalité des racines des équations

$$x^3 + 3px + 2q = 0, \qquad x^3 + 3px^2 + q = 0, \qquad x^3 + 3px + q = 0.$$

5128. — Discuter l'équation $4x^3 - 3x + m = 0$. Relation entre les coefficients et les racines. Somme des carrés des racines. — Calculer deux des racines en fonction de la troisième.

5129. — Nombre de racines réelles de l'équation $x^3 - 3x + m(1 - 3x^2) = 0$. Relation entre les coefficients et les racines. — Calculer deux des racines en fonction de la troisième.

(A *suivre*.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1914. — En prenant x comme infiniment petit principal, déterminer la partie principale des infiniment petits

$$\frac{e^x + 1}{2} \times \frac{x}{e^x - 1} - 1, \qquad \frac{e^x + 4e^{\frac{x}{2}} + 1}{6} \times \frac{x}{e^x - 1} - 1, \qquad \frac{e^x + 3e^{\frac{x}{3}} + 3e^{\frac{2x}{3}} + 1}{8} \times \frac{x}{e^x - 1} - 1,$$

$$\frac{7e^x + 32e^{\frac{x}{4}} + 12e^{\frac{x}{2}} + 32e^{\frac{3x}{4}} + 7}{90} \times \frac{x}{e^x - 1} - 1.$$

(Les coefficients numériques sont ceux des premières formules de quadrature de Cotes.)

G. Fontené.

1915. — Enveloppe des paraboles de directrice fixe dont le foyer décrit une droite ou un cercle.

Piglowski.

1916. — Une droite de longueur constante k est mobile et s'appuie à la fois sur une ellipse E et sur son grand axe.

1° Le lieu du milieu de cette droite est une quartique. La construire dans les trois cas suivants : k supérieur, inférieur ou égal au demi-petit axe.

2° Que devient la quartique lorsque l'ellipse devient un cercle et que k est égal à son rayon.

3° Trouver dans le cas général l'aire de la quartique.

E.-N. Barisien.

Erratum. — Page 32, ligne 3 de la question 1908. Au lieu de : « L'aire de la courbe P », lire : « L'aire de la courbe Q ».

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

21e Année. Décembre 1910. N° 3.

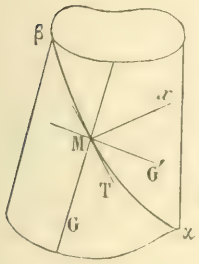
REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SURFACES RÉGLÉES RÉCIPROQUES

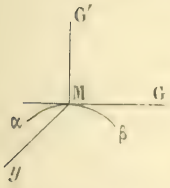
par M. **E. Keraval**.

On considère une surface réglée S à cône directeur et sa ligne de striction $\alpha\beta$. Soit G une génératrice rectiligne, M son point central, G′ la perpendiculaire à G située dans le plan tangent en M. G′ décrit une seconde surface réglée S′ que j'appelle *réciproque* de S. Je vais prouver cette réciprocité et faire voir que S, S′ sont tangentes tout le long de $\alpha\beta$ qui est leur ligne de striction commune.

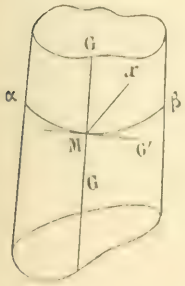


Soit Mx la perpendiculaire en M au plan GG′. Considérons le cône directeur de sommet M : GMx est le plan tangent le long de G, donc le cône directeur de S′ est réciproque de celui de S. Le plan tangent le long de MG′ est donc G′Mx ; donc GMG′ est le plan central pour S′. D'ailleurs en M le plan tangent à S′ est bien le plan GG′, car il contient G′ et la tangente MT à $\alpha\beta$.

Cas d'exception. — La démonstration suppose que MT ne coïncide ni avec G ni avec G′.



Premier cas. — MT coïncide avec G, c'est-à-dire que S est une surface développable, G est tangent à la ligne de striction $\alpha\beta$. Le long de G il n'y a plus à proprement parler de plan central. Soit G′ la binormale et My la normale principale : le plan osculateur étant parallèle à deux génératrices infiniment voisines peut être considéré comme le plan asymptote, le plan central serait GG′. Je suis donc tenté à prendre G′ suivant la binormale. Alors pour S, S′ les cônes directeurs sont encore réciproques et le plan tangent à S qui est asymptote c'est le plan yMG′, donc GMG′ est le plan central et par suite M le point central.



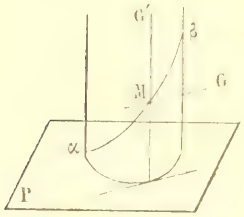
Ainsi $\alpha\beta$ est encore la ligne de striction commune, mais S, S′ se coupent à angle droit.

Second cas. — La ligne de striction $\alpha\beta$ de S est trajectoire orthogonale des génératrices.

G′ est perpendiculaire à G et à la génératrice infiniment voisine (1). GMx est tangent au cône directeur de sommet M pour S. Pour S′ le cône directeur est réciproque, son plan tangent le long de G′ est G′Mx lequel est le plan osculateur en M. C'est le même cas que précédemment, il suffit d'échanger S et S′.

Cas particulier où S est une surface réglée à plan directeur. — Soit P le plan directeur, $\alpha\beta$ la ligne

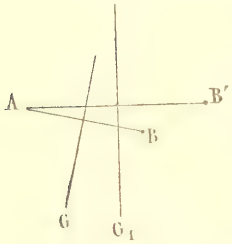
(1) Ici la perpendiculaire commune à deux génératrices infiniment voisines MM′ vers la tangente à la ligne de striction.



de striction. Je figure le cylindre droit qui projette $\alpha\beta$ sur P. S' sera ce cylindre. S, S' sont circonscrites le long de $\alpha\beta$.

Théorème. — *Si l'on considère les symétriques* B *d'un corps fixe* A *par rapport aux génératrices* G *de* S, *la surface* S' *représente le lieu de l'axe du mouvement hélicoïdal du corps* B. *En outre le rapport des vitesses de glissement et de rotation est égal au paramètre de distribution sur la génératrice* G *de* S.

Soient G, G_1 deux génératrices infiniment voisines de S. Je représente le corps A par un de ses points, soient B, B' les symétriques du corps A par rapport à G, G_1. On peut amener B sur B' par deux renversements autour de G et G_1; si donc j'appelle d la perpendiculaire commune à GG_1 et φ leur angle aigu, le mouvement hélicoïdal qui amène B' sur B sera une rotation 2φ plus une translation $2d$ le long de cette perpendiculaire commune.



On en déduit immédiatement le théorème.

Si S est développable on a un mouvement du corps B qui possède à chaque instant une rotation tangente. (Voir Kœnigs, *Cinématique*, p. 349 et 204.)

Enfin je proposerai aux lecteurs de la Revue la démonstration du théorème suivant :

Théorème. — *Le mouvement du corps* B *défini plus haut est identique au mouvement inverse (Voir par exemple Kœnigs, p. 352) et réciproquement tout mouvement à un paramètre identique au mouvement inverse peut être considéré comme le mouvement d'un corps* B *symétrique d'un corps fixe* A *par rapport à une droite* G *qui décrit une surface réglée* S.

SUR L'INTÉGRATION DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par M. **Ch. Bioche.**

La méthode généralement indiquée pour intégrer une équation différentielle où ne figurent comme variables que y, y' et y'' consiste à poser $y' = p$ et à prendre y comme variable indépendante. On est conduit à intégrer une équation du premier ordre en p et à effectuer une quadrature.

En pratique, le calcul peut être compliqué. Dans le cas où l'équation est du type

$$y'' - my' + Ay'^2 + By + Cy^{m+1} = 0,$$

où m, A, B, C sont des constantes, il est plus avantageux de faire un changement de variables qui ramène facilement l'équation proposée à une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Je pose

$$y = u^\alpha,$$

α étant une constante que je déterminerai tout à l'heure. On a

$$y' = \alpha u^{\alpha-1}u', \qquad y'' = \alpha u^{\alpha-1}u'' + \alpha(\alpha-1)u^{\alpha-2}u'^2,$$

l'équation qui détermine u est alors

$$\alpha u^{\alpha-1}u'' + \alpha(\alpha-1)u^{\alpha-2}u'^2 - m\alpha u^{\alpha-1}u' + A\alpha u^{\alpha-1}u' + Bu^\alpha + Cu^{(m+1)\alpha} = 0.$$

Pour que le terme en u'^2 disparaisse il faut prendre

$$\alpha = \frac{1}{1-m},$$

ce qui suppose $m \neq 1$. Si on avait $m = 0$ l'équation proposée aurait y en facteur dans tous ses termes et la suppression de ce facteur donnerait une équation linéaire à coefficients constants. Supposons ces

cas écartés; si on divise tous les termes de la dernière équation par $u^{2(1-m)}$ ou $u^{\frac{1}{1-m}}$, on obtient l'équation

$$zu'' + Azu' + Bu + C = 0 \qquad \text{ou} \qquad u'' + Au' + B(1-m)u + C(1-m) = 0,$$

équation à coefficients constants.

Si $m = 1$ les deux derniers termes de l'équation initiale étant semblables, celle-ci peut s'écrire

$$yy'' - y'^2 + Ayy' + Dy^2 = 0;$$

si on pose

$$y = e^u,$$

on a

$$y' = e^u u', \qquad y'' = e^u u'' + e^u u'^2,$$

et on obtient, pour déterminer u, l'équation

$$e^{2u}u'' + e^{2u}u'^2 - e^{2u}u'^2 + Ae^{2u}u' + De^{2u} = 0;$$

le terme en u'^2 disparaît et, après avoir divisé par e^{2u}, on obtient l'équation à coefficients constants

$$u'' + Au' + D = 0.$$

J'indiquerai pour terminer quelques exemples.

1° $yy' - 2y'^2 + 2y^3 = 0$, équation dont l'intégrale est $y = \dfrac{1}{x + C_1 x + C_2}$

2° $2yy' - y'^2 - 4y^2 = 0$, équation dont l'intégrale est $y = (C_1 e^x + C_2 e^{-x})^2$.

3° $yy'' - 2y'^2 - y^2 + ky' = 0$, équation dont l'intégrale est $y = \dfrac{1}{C_1 \cos x + C_2 \sin x + k}$

4° $yy'' - y'^2 - yy' = 0$, équation dont l'intégrale est $y = C_1 e^{C_2 x}$.

ÉCOLE PROFESSIONNELLE SUPÉRIEURE DES POSTES ET TÉLÉGRAPHES (2e section).

Concours de 1908.

1857. — *Intégrer l'équation différentielle linéaire*

$$xy' - (x+a)y' + y = 0,$$

sachant qu'elle admet pour intégrale particulière un polynome entier $(x+a)$. Montrer que l'intégrale générale s'exprime sans aucun signe de quadrature lorsque la constante a est un nombre entier positif.

L'équation $xy' - (x+a)y' + y = 0$ admet évidemment la solution $y = x + a$. Si alors nous posons $y = z(x+a)$, en désignant par z une autre fonction inconnue, nous aurons

$$y = z(x+a), \qquad y' = z'(x+a) + z, \qquad y'' = z''(x+a) + 2z',$$

et l'équation différentielle deviendra

$$zx(x+a) - z'(x-a)^2 - 2x = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{z'}{z} = \frac{x+a}{x} - \frac{2}{(x-a)^2} = 1 + \frac{a}{x} - \frac{2}{(x-a)^2}.$$

Nous tirons de là $\quad L\dfrac{z'}{C} = x + aLx - 2L(x-a), \qquad z' = \dfrac{Ce^x x^a}{(x-a)^2}$,

et enfin $\quad z = C\displaystyle\int \frac{e^x x^a\,dx}{(x+a)^2} + C_1$, en désignant par $\displaystyle\int \frac{e^x x^a\,dx}{(x+a)^2}$ une intégrale particulière de la différentielle sous le signe $\displaystyle\int$. La solution de l'équation proposée est donc

$$y = C(x+a)\int \frac{e^x x^a\,dx}{(x+a)^2} + C_1(x+a).$$

Dans tous les cas, cette intégrale se ramène à $\displaystyle\int \frac{e^x x^a\,dx}{(x+a)^2} = -\frac{e^x x^a}{x+a} + \int e^x x^{a-1}\,dx$. Il suffit d'une intégration par parties. Quant à cette dernière intégrale, si a est entier et positif, elle peut s'abaisser et se ramener à l'intégrale $\displaystyle\int e^x\,dx$ qui est immédiate. On a ou elle

$$\int e^x x^a dx = e^x x^a - a \int e^x x^{a-1} dx,$$

$$\int e^x x^{a-1} dx = e^x x^{a-1} - (a-1) \int e^x x^{a-2} dx,$$

$$\int e^x x^{a-2} dx = e^x x^{a-2} - (a-2) \int e^x x^{a-3} dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int e^x dx = e^x + \int e^x dx;$$

puis

$$\int e^x x^a dx = e^x \left[x^a - a x^{a-1} + a(a-1) x^{a-2} - \ldots \pm a(a-1)\ldots 2 x + a(a-1)\ldots 1 \right] \pm a(a-1)\ldots 1 \int e^x dx,$$

avec

$$P(x) = \frac{x^a}{(a+1)!} - \frac{x^{a-1}}{(a-2)!} + \frac{x^{a-2}}{(a-3)!} - \ldots \pm 1.$$

On a de suite $P(x) = P(-x)$.

Si a est fractionnaire, le procédé ne réussit pas : l'exposant de x ne disparaît jamais. Si a est négatif, on peut remonter jusqu'à $\int e^x x^{a+1} dx$, mais on ne peut aller plus loin.

HOULLEGAND, élève à l'École normale supérieure.

Bonnes solutions : MM. G. Lyon, à Besançon ; Lyonnet, à Montpellier ; A. Rousseau, à Tourcoing ; H. L., à Lyon ; G. Leroy, à Reims.

1858. — *Soient* Ox *et* Oy *deux axes de coordonnées rectangulaires.* M *un point d'une courbe plane* C *du plan* xOy, MP *la distance du point* M *à l'axe* Ox, OM *la distance de l'origine à la tangente en* M *à la courbe* C.

On demande de déterminer les courbes C *telles que le rapport* $\frac{OT}{PM}$ *soit égal à une constante donnée* k, *et d'exprimer les coordonnées d'un point* M *de l'une de ces courbes en fonction de l'angle* φ *que fait la tangente avec l'axe* Ox.

Construire les courbes C *dans les deux cas particuliers suivants :* $k = 1$, $k = \frac{1}{2}$.

Évaluer dans ce dernier cas la longueur de l'arc compté à partir de l'origine.

Soit φ l'angle de la tangente MT avec Ox, l'équation de cette droite est de la forme

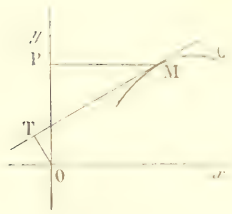
$$x \sin\varphi - y \cos\varphi + p = 0, \tag{1}$$

p étant une fonction de φ qu'il s'agit de déterminer.

Le point de contact M de cette tangente sera défini par l'équation (1) et par la suivante,

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi + p' = 0,$$

qui s'en déduit en dérivant la première par rapport à φ ; p' désigne la dérivée de p.



En résolvant ces deux équations par rapport à x et y, on obtient les coordonnées du point M,

$$(2) \qquad x = p \cos\varphi - p' \sin\varphi, \qquad y = p \sin\varphi + p' \cos\varphi.$$

On a, d'autre part,

$$OT = |p|, \qquad PM = |p \cos\varphi + p' \sin\varphi|,$$

de telle sorte que la fonction p est définie par l'équation

$$\left| \frac{p}{p \cos\varphi + p' \sin\varphi} \right| = k.$$

Nous écrirons cette équation sous la forme

$$(3) \qquad \frac{p}{p'\cos\varphi + p\sin\varphi} = k,$$

en supposant que k peut avoir une valeur positive ou négative.

Nous en tirons

$$(4) \qquad \frac{p'}{p} = \frac{1}{k\cos\varphi} - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

et, en intégrant,

$$\mathrm{L}p = \frac{1}{k}\,\mathrm{L}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \mathrm{L}\cos\varphi + \mathrm{LC},$$

C désignant une constante arbitraire, ou

$$p = \mathrm{C}\cos\varphi\,\mathrm{tg}^{\frac{1}{k}}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Calculons maintenant les coordonnées x, y du point M. Il suffit de remplacer p et p' par leurs valeurs dans les formules (2). On peut diriger le calcul très simplement de la manière suivante.

D'abord, la relation (3) nous donne

$$x = p'\cos\varphi + p\sin\varphi = \frac{p}{k} = \frac{\mathrm{C}}{k}\cos\varphi\,\mathrm{tg}^{\frac{1}{k}}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right);$$

puis, de (4) nous déduisons

$$p' = p\,\frac{1 - k\sin\varphi}{k\cos\varphi},$$

et par suite

$$y = p'\sin\varphi - p\cos\varphi = p\left[\frac{(1 - k\sin\varphi)\sin\varphi}{k\cos\varphi} - \cos\varphi\right] = p\,\frac{\sin\varphi - k}{k\cos\varphi},$$

et enfin

$$y = \frac{\mathrm{C}}{k}(\sin\varphi - k)\,\mathrm{tg}^{\frac{1}{k}}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Les coordonnées du point M sont donc, en fonction de φ,

$$x = \frac{\mathrm{C}}{k}\cos\varphi\,\mathrm{tg}^{\frac{1}{k}}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \qquad y = \frac{\mathrm{C}}{k}(\sin\varphi - k)\,\mathrm{tg}^{\frac{1}{k}}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

nous obtenons ainsi les équations paramétriques de la courbe cherchée.

Quand on fait varier la constante C on obtient des courbes homothétiques par rapport à l'origine; il suffira donc de donner à C une valeur particulière. Nous poserons $\frac{\mathrm{C}}{k} = a$.

Pour simplifier les équations paramétriques, nous ferons le changement de variables $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$, qui nous donne

$$(5) \qquad x = a\sin\theta\,\mathrm{tg}^{\frac{1}{k}}\frac{\theta}{2}, \qquad y = -a\cos\theta\,(\sin\theta - k)\,\mathrm{tg}^{\frac{1}{k}}\frac{\theta}{2}$$

Remarquons enfin qu'à des valeurs de k égales et de signes contraires correspondent deux courbes symétriques par rapport à Ox ; il suffit pour le voir de changer dans les formules (5) θ en $-\theta$, k en $-k$ et θ en $-\theta$.

Nous pourrons donc supposer $k \geq 0$.

Premier Cas. $k = 1$. La courbe est définie par les équations

$$x = a\sin\theta\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}, \qquad y = -a(\cos\theta - 1)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}$$

ou $x = 2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = 2a\sin^2\frac{\theta}{2} = a(1 - \cos\theta)$, $\qquad y = -2a\cos^2\frac{\theta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = -a\sin\theta$.

Nous en tirons $-a\cos\theta = x - a$, $-a\sin\theta = y$, et, en faisant la somme des carrés,

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2.$$

La courbe est un cercle tangent à l'axe des y à l'origine. On vérifie aisément que cette courbe jouit de la propriété indiquée dans l'énoncé, $OT = MP$.

Deuxième Cas. $k = \frac{1}{2}$. Les équations paramétriques de la courbe sont alors

$$x = a \sin\theta \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}, \qquad y = -\frac{a}{2}(2\cos\theta - 1)\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}.$$

Si l'on pose $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t$, on a

$$x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \qquad y = \frac{a}{2}\,\frac{(t^2-3)t^2}{1+t^2};$$

on voit ainsi que la courbe est unicursale et du quatrième degré.

Pour discuter sa forme nous conserverons la variable θ. Si l'on change θ en $2\pi+\theta$ x et y ne changent pas ; donc, il suffit de faire varier θ dans un intervalle dont l'étendue soit égale à 2π, par exemple l'intervalle $(-\pi, +\pi)$. Mais en changeant θ en $-\theta$, x change simplement de signe et y ne change pas ; donc, la courbe est symétrique par rapport à Oy, et aux deux intervalles $(-\pi, 0)$ et $(0, +\pi)$ correspondent des branches symétriques. Il suffira donc de faire varier θ dans l'intervalle $(0, \pi)$ et d'achever par symétrie par rapport à Oy.

Les dérivées de x et y par rapport à θ sont

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{a \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}(\sin\theta\cos\theta + 2)}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}, \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{a \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}(\cos\theta\cos\theta - 2)}{2\cos^2\frac{\theta}{2}};$$

nous en tirons

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cotg}\theta.$$

Ce résultat était à prévoir, car le coefficient angulaire de la tangente, $\operatorname{tg}\varphi$, devient $-\operatorname{cotg}\theta$ si on remplace φ par $\theta - \frac{\pi}{2}$.

On en déduit le tableau de variation suivant (a est supposé positif) :

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
x	0	croît	a	croît	$\frac{3a\sqrt{3}}{2}$	croît	$+\infty$
y	0	décroît	$-\frac{a}{2}$	croît	0	croît	$+\infty$
$\frac{dy}{dx}$	$-\infty$	croît	0	croît	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	croît	$+\infty$

On obtient ainsi la branche de courbe OABL, et on achève par symétrie par rapport à Oy.

Soit M un point quelconque de l'arc OABL, nous allons calculer la longueur de l'arc OM. Nous avons

$$dx = \frac{a \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}(\sin\theta\cos\theta + 2)}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta,$$

$$dy = -\frac{a \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}(\cos\theta\cos\theta + 2)}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta.$$

et
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} (\cos\theta + 2)^2}{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta^2,$$

d'où, en extrayant la racine et en remarquant que s varie dans le même sens que θ, et que θ varie de 0 à π,

$$ds = \frac{a \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (\cos\theta + 2)}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta.$$

Ceci peut s'écrire

$$ds = -\frac{a(\cos\theta + 2)}{\cos^3 \frac{\theta}{2}} d\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{a\left(2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1\right)}{\cos^3 \frac{\theta}{2}} d\cos\frac{\theta}{2},$$

ou
$$ds = -\frac{2a\, d\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} - \frac{a\, d\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^3 \frac{\theta}{2}}.$$

Intégrons en remarquant que pour $\theta = 0$, $s = 0$; nous avons

$$s = -2a \operatorname{L}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{a}{2\cos^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{a}{2},$$

ou
$$s = \frac{a}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - 2a \operatorname{L}\cos\frac{\theta}{2}.$$

NEVEIANS.

Solutions satisfaisantes par MM. G. Fouchy, à Reims; E. Hachesson, à Toul; G. Lica, à Bolbec; A. [illegible], à Fourmies-en-Weppe; J. Soubaigné, à Mont-de-Marsan.

1859. — *Un point matériel pesant est mobile sur une circonférence horizontale qui tourne avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical ne passant pas par son centre. On donne ω en fonction du temps et l'on demande :*

1° *De former l'équation différentielle du mouvement du point, en supposant que ce point éprouve, par le fait du frottement, une résistance proportionnelle à sa pression sur la circonférence ;*

2° *D'étudier en particulier le mouvement du point dans le cas où le frottement est négligeable et où la quantité ω est constante ; de dire quelles sont, dans ce cas, les conditions pour que le point effectue des oscillations infiniment petites et de calculer la durée d'une oscillation.*

1° Soient un système d'axes rectangulaires fixes $Oxyz$ et un système d'axes mobiles $Ox_1y_1z_1$ ayant en commun avec le premier l'axe des z, la vitesse angulaire de ce dernier système autour de Oz étant une fonction ω du temps, la position du système mobile par rapport au système fixe sera définie à tout instant t par l'angle θ de Ox et de Ox_1, donné par

$$\theta = \int_0^t \omega\, dt,$$

si l'on suppose les deux systèmes confondus au temps $t = 0$.

Nous supposerons que le centre O_1 du cercle variable est situé sur Ox et a pour abscisse a et que le rayon a pour valeur R; la position du point mobile M sera définie sur ce cercle par l'angle α de O_1x

et de O_1M ; ce point aura donc pour coordonnées dans le système mobile

$$x = a + R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi, \qquad z = 0.$$

On peut étudier le mouvement de ce point M sur le cercle en supposant le cercle fixe à condition d'adjoindre aux forces directement appliquées, d'après la théorie du mouvement relatif, la force centrifuge et la force centrifuge composée.

La première est un vecteur opposé au vecteur mJ_e, m désignant la masse du point et J_e l'accélération d'entraînement du point M dans la rotation.

Les projections de ce vecteur J_e sur les axes fixes ont pour valeurs $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, les dérivations ayant été faites en considérant φ comme une constante et θ seul comme variable ; elles sont donc, en remarquant que $\frac{d\theta}{dt} = \omega$,

$$-\omega^2 x - \frac{d\omega}{dt}\, y, \qquad -\omega^2 y + \frac{d\omega}{dt}\, x, \qquad 0$$

et les projections sur les axes mobiles sont

$$(J_e)_x = -\omega^2 x - \frac{d\omega}{dt}\, y, \qquad (J_e)_y = -\omega^2 y + \frac{d\omega}{dt}\, x, \qquad (J_e)_z = 0.$$

La seconde est un vecteur ayant pour projections sur les axes mobiles d'après les formules connues, en remarquant que la rotation instantanée a pour projections sur les mêmes axes 0, 0, ω,

$$2m\omega\frac{dy}{dt}, \qquad -2m\omega\frac{dx}{dt}, \qquad 0.$$

Quant aux forces directement appliquées, elles se composent de la pesanteur, de projections 0, 0, $-mg$ et de la force de frottement. Pour déterminer cette dernière, nous devons calculer la pression normale du point sur le cercle et pour cela projeter les différentes forces déjà énumérées sur deux axes du plan normal en M, par exemple sur un axe parallèle à Oz et sur le rayon O_1M.

La somme des projections de ces trois forces sur l'axe parallèle à Oz est $-mg$.

La somme des projections sur le rayon O_1M, en prenant par exemple O_1M comme sens positif, est

$$\left(m\omega^2 x - \omega\frac{d\omega}{dt}\, y\right)\cos\varphi + \left(m\omega^2 y + \omega\frac{d\omega}{dt}\, x\right)\sin\varphi - 2m\omega\frac{dy}{dt}\cos\varphi - 2m\omega\frac{dx}{dt}\sin\varphi.$$

Si l'on désigne par F cette quantité, la pression normale aura pour grandeur $\sqrt{m^2g^2 + F^2}$ et la force de frottement, si l'on appelle f le coefficient de frottement, sera

$$f\sqrt{F^2 + m^2g^2}.$$

Elle sera dirigée suivant la tangente en M en sens inverse du mouvement de M.

Elle aura donc comme projections sur les axes

$$-f\sqrt{F^2 + m^2g^2}\sin\varphi, \qquad f\sqrt{F^2 + m^2g^2}\cos\varphi, \qquad 0.$$

Appliquons alors au mouvement du point M et au système de forces ainsi défini, le théorème de la force vive relative. Si l'on appelle V_r la vitesse relative, X, Y, Z les projections d'une des forces, dx, dy, dz le déplacement relatif, on aura

$$\frac{m}{2}\, dV_r^2 = \Sigma X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

et cette combinaison aura l'avantage de faire disparaître, outre les réactions, la force de pesanteur et la force centrifuge composée.

L'équation différentielle demandée sera donc

$$\frac{m}{2}\, d\left[R^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = m\omega^2 a R\sin\varphi\, d\varphi - \omega\frac{d\omega}{dt}R^2 - aR\cos\varphi\, d\varphi - f\sqrt{F^2 + m^2g^2}\, d\varphi.$$

On devra choisir le signe $\pm$ de façon que le travail de la force de frottement soit toujours

négatif. On passera donc d'une équation différentielle à l'autre chaque fois que le mobile changera de sens dans son mouvement.

2° Dans le cas particulier indiqué, qui se déduit du précédent en faisant dans l'équation

$$f = 0, \qquad \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

on est conduit à l'équation

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left[R^2.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = -m.\omega^2 aR\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt}.$$

Une première intégration donne immédiatement

$$R^2.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = +2\omega^2 aR\cos\varphi - C.$$

Il se présentera donc deux cas principaux.

Si la quantité $C + 2\omega^2 aR\cos\varphi$ ne peut pas s'annuler, on voit que la vitesse du point ne s'annulera jamais, le point tournera toujours dans le même sens.

Si, au contraire, il existe une valeur φ_0 telle que l'on ait

$$C + 2\omega^2 aR\cos\varphi_0 = 0,$$

ce qui permet d'écrire l'équation sous la forme

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \pm\omega\sqrt{\frac{2a}{R}}\,dt,$$

le mouvement aura lieu alternativement dans les deux sens. Ce n'est que dans ce cas qu'il peut y avoir des oscillations infiniment petites ; à cause de l'analogie avec l'équation classique du pendule

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt,$$

celles-ci auront lieu si φ_0 est infiniment petit. Quant à la durée des oscillations, qui est $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ dans le pendule, elle sera pour le problème qui nous occupe $\frac{\pi}{\omega}\sqrt{\frac{R}{a}}$, comme le montre l'identification des deux équations.

H. DE LAPIERRE.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1910)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Suite*)

7685. — Trouver une courbe passant par l'origine telle que l'aire limitée par cette courbe, l'axe des x et l'ordonnée du point $M(x, y)$ soit égale à kxy. Cas particulier : $k = \frac{1}{2}$, $k = \frac{2}{3}$.

7686. — Construire la courbe $(x^2 + y^2)^2 = ax^2 + by^2$. Aire.

7687. — De deux points fixes A et B on abaisse les perpendiculaires AP et BQ sur la tangente en un point M d'une courbe. Déterminer la courbe de façon que $\frac{MP}{MQ}$ ait une valeur constante k.

7688. — La tangente en un point M d'une courbe rencontre Ox au point T et Oy au point S. Déterminer la courbe de façon que $\frac{MT}{MS} = k$. Comment déduit-on ces courbes les unes des autres ?

7689. — La tangente en un point M d'une courbe rencontre Ox en T et Oy en T'. La normale au même point coupe Ox en N, Oy en N'. On joint NT' et N'T qui se rencontrent au point K. Déterminer la courbe de façon que MK ait une direction fixe. Ces courbes forment une famille à un paramètre dont on demande les trajectoires orthogonales et le lieu des points de contact des tangentes issues de l'origine.

7690. — La tangente et la normale en un point M d'une courbe rencontrent Ox aux points T et N. Déterminer la courbe de façon que $\frac{MN}{MT}$ soit constant.

7691. — On considère une courbe rencontrant Oy au point A ; soit M un point quelconque de la courbe ayant pour abscisse x. Déterminer la courbe de façon que l'on ait $AM = \frac{kx}{2}$.

7692. — Trouver les courbes telles que la tangente et la normale interceptent sur une droite fixe un segment dont le milieu soit fixe.

7693. — Trouver une courbe telle que la tangente en un point M et la perpendiculaire abaissée de M sur Ox tracent sur Ox des divisions homothétiques.

7694. — Trouver les courbes dans lesquelles l'abscisse du point de rencontre T de la tangente en un point M avec Ox soit une fonction de l'abscisse du point M.

7695. — Trouver une courbe telle que la tangente et la normale en un point quelconque forment avec Ox un triangle d'aire constante.

7696. — La tangente en un point M d'une courbe rencontre Ox au point T ; par ce point on mène une perpendiculaire à TM qui rencontre en N la parallèle à Oy menée par le point O. On mène OP qui rencontre en P la normale en M. Quelle doit être la courbe pour que le point P soit le centre de courbure au point M ?

7697. — Trouver une courbe telle que, sur la normale en un point M, on porte une longueur constante $MP = a$, le cercle OMP soit tangent en O à Ox.

7698. — La tangente en un point M d'une courbe rencontre Ox au point T ; par ce point on mène une perpendiculaire à TM qui rencontre en N la parallèle à Oy menée par le point M. Par le point N, on mène une parallèle à Ox qui rencontre en P la normale en M. Quelle doit être la courbe pour que le point P soit le centre de courbure au point M ?

7699. — Du point O on abaisse OP perpendiculaire sur la tangente en un point M à une courbe. On pose $(x, OM) = \omega$, $(Ox, OP) = \theta$. Déterminer la courbe de façon que $\theta = \omega + k\omega$ (k constante).

7700. — Mêmes notations. On pose $OM = \rho$, $OP = p$. Déterminer la courbe de façon que $\rho^2 - p^2 = a^2$ (a est une constante).

7701. — Trouver les courbes telles que le segment intercepté sur une droite fixe par la tangente et la normale au même point soit constant.

7702. — D'un point M d'une courbe on abaisse MP perpendiculaire sur Ox, on mène AI parallèle à MP qui rencontre Ox au point T, et on abaisse les perpendiculaires PK et OH sur MT. Déterminer la courbe de façon que $TK = m.OH$. Cas particulier : $m = 1$.

7703. — Trouver une courbe telle que la distance de l'origine à la normale soit égale à la longueur de cette normale.

7704. — Soit M un point d'une courbe, M' le point symétrique par rapport à Ox, et P le point de rencontre de la normale en M avec OM'. Déterminer la courbe de façon que $OP = k.OM$.

7705. — Soit C le centre de courbure en un point M d'une courbe. Déterminer la courbe de façon que le milieu de MC décrive une droite.

7706. — Trouver une courbe telle que le rayon de courbure en chaque point soit inversement proportionnel à l'ordonnée.

7707. — D'un point M d'une courbe on abaisse MP perpendiculaire sur Oy, et du point P on abaisse PT perpendiculaire sur la tangente en M. Déterminer la courbe de manière que le point T décrive une développante de cette courbe.

7708. — [illegible] rapport à une ellipse [illegible]

7709. — Soient A et A' les sommets d'une ellipse. Par le point A' on mène une sécante qui rencontre l'ellipse en M et la tangente en A au point D. Soit M_1 le conjugué harmonique de M par rapport à A' et D. Trouver le lieu du point M_1.

7710. — En chaque point d'une parabole, M, on mène une normale MN de longueur constante. Trouver l'aire comprise entre la parabole, le lieu du point N, la normale au sommet et une normale quelconque.

7711. — On donne deux axes rectangulaires ; deux cercles variables, le premier tangent à Ox et Oy, le deuxième tangent au premier et à Ox en un point fixe A. Lieu de leur point de contact.

7712. — Équation générale des coniques admettant Ox pour tangente au sommet, passant par un point fixe de Oy, et homothétiques d'une conique donnée. Lieu des centres.

7713. — Toute conique peut être représentée par une équation de la forme $y^2 = 2px + qx^2$. Condition pour que ce soit une ellipse. Distinguer l'axe focal de l'axe non focal.

7714. — L'équation $y^2 = 2px - qx^2$ représentant une ellipse dont Ox est le grand axe, $y^2 = 2p'x - q'x^2$ représentant la même ellipse dont Ox est le petit axe, calculer p' et q' en fonction de p et q.

7715. — On donne les droites

$$P = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \qquad Q = x\sin\alpha - y\cos\alpha - q = 0,$$
$$P' = x\cos\alpha' + y\sin\alpha' - p' = 0, \qquad Q' = x\sin\alpha' - y\cos\alpha' - q' = 0$$

qui sont rectangulaires deux à deux. Que représente l'équation $PQ' + P'Q = 0$? Trouver son centre et ses axes.

7716. — Longueur d'un arc de parabole. Interpréter la partie algébrique de l'expression trouvée. En déduire que si une parabole roule sur une droite, le foyer décrit une chaînette.

7717. — Rapport anharmonique de quatre points sur une conique. Dans quel cas est-il harmonique ?

7718. — Une droite passant par l'origine coupe la conique [illegible] en deux points A et B. Lieu du point M conjugué harmonique de O par rapport à A et B.

7719. — Une parallèle fixe à Oy rencontre la parabole variable [illegible] en un point A. Enveloppe de la tangente au point A quand λ varie.

7720. — Calculer le deuxième foyer de la conique $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(Ax+By+C)^2$.

7721. — Normale à la parabole en fonction du coefficient angulaire. Équation aux coefficients angulaires des normales issues d'un point. Condition pour que deux de ces normales soient rectangulaires.

7722. — Démontrer que le rayon de courbure en un point de la courbe $y=f(x)$ est proportionnel au cube de la normale limitée à Ox. Réciproquement, trouver toutes les courbes jouissant de cette propriété.

7723. — Étant donnée l'équation d'une conique $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, interpréter géométriquement les conditions $A=0$, $B=0$, $D=0$.

7724. — Équation générale des coniques dont on donne un foyer et un sommet de l'axe non focal.

7725. — Former l'équation du cercle passant par les pieds des normales issues d'un point à une parabole.

7726. — Un côté d'un angle droit reste tangent à une parabole pendant que le sommet décrit une droite perpendiculaire à l'axe. Enveloppe du deuxième côté.

7727. — Intersection de deux coniques ayant un foyer commun.

7728. — Équation générale des coniques inscrites dans un carré dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées.

7729. — Trouver toutes les coniques qui coupent l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ orthogonalement en leurs quatre points de rencontre.

7730. — La tangente en un point M d'une parabole de sommet S rencontre la tangente au sommet au point T. Calculer l'aire MTS.

7731. — Équation générale des paraboles ayant un foyer donné et passant par un point donné.

7732. — On considère une parabole ayant pour sommet le point O et pour axe Ox. Par un point M de la parabole on mène une droite MN symétrique de MO par rapport à l'ordonnée du point M. Enveloppe de MN. Trajectoires orthogonales des droites MN.

7733. — Par quatre points mener une conique tangente à une droite.

7734. — On donne un triangle ABC ; soit I le milieu de BC et D un point quelconque de AI. Équation de la conique tangente en B à AB, en C à AC et passant par le point D. Quelle est la nature de cette conique ? Où faut-il prendre le point D sur AI pour avoir une parabole ?

7735. — Équation générale des hyperboles équilatères dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des axes, passant par l'origine et tangentes à l'hyperbole $xy=1$. Enveloppe de ces courbes. Lieu des points du plan tels que les deux courbes qui y passent soient orthogonales en ces points.

7736. — Soient A et A′ les sommets du grand axe d'une ellipse. D'un point M du plan on mène à l'ellipse les tangentes qui rencontrent le grand axe en P et Q. Lieu des points M pour lesquels on a $(PAA'Q)=-1$.

7737. — D'un point M on mène les tangentes MP et MP′ à une ellipse. Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MPP′ quand le point M décrit une parallèle au petit axe.

7738. — Intersection d'un cercle et d'une ellipse concentriques.

7739. — On considère des coniques homothétiques et concentriques [illegible] des tangentes aux points de rencontre avec une droite fixe. Enveloppe de ces tangentes.

7740. — Équation générale des paraboles tangentes à Ox, Oy et à la droite $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

7741. — Équation générale des coniques admettant un sommet donné A, pour tangente en ce point une droite donnée D et passant par un point donné. Lieu des sommets.

7742. — On donne une conique et une droite D. On considère deux points M et M′ de la droite D conjugués par rapport à la conique. Tous les segments MM′ sont vus d'un point C sous un angle droit. Lieu du point C lorsque D se déplace parallèlement à elle-même.

7743. — Équation générale des paraboles passant par un point donné et ayant en ce point un cercle osculateur donné.

7744. — Enveloppe des cordes d'une parabole telles que l'aire du segment compris entre une seconde corde et la courbe soit constante.

7745. — Équation générale des hyperboles ayant une asymptote et un sommet donnés. Lieu du deuxième sommet.

7746. — On donne un cercle et deux points fixes A et B de ce cercle. Par un point donné P on mène une sécante PCD. Lieu du point de rencontre de AC et BD. Étude géométrique.

7747. — Équation générale des paraboles osculatrices à un cercle donné et dont les axes sont parallèles à une droite donnée. Lieu des sommets.

7748. — On considère les paraboles $y^2=2px+\alpha$, $y^2=2px+\alpha'$ [illegible] Ox, α [illegible] On donne une tangente commune. Lieu du point de contact sur la parabole variable.

7749. — Construire la courbe $x=\frac{(t+1)^2}{t^2+1}$, $y=\frac{t^2-1}{t^2+1}$. Degré. Trouver le centre.

7750. — Condition pour qu'une conique soit homothétique à une parabole.

7751. — Équation générale des coniques tangentes à une droite donnée en un point donné et ayant un centre donné.

7752. — Lieu des foyers des hyperboles ayant une asymptote et un sommet donnés.

7753. — Lieu des sommets des hyperboles ayant une asymptote et un foyer donnés.

7754. — Lieu des foyers des paraboles osculatrices à un cercle en un point donné.

7755. — On donne une parabole et un point P intérieur ; par le point P on mène une sécante PAB. Trouver le minimum de la longueur AB. Cas où le point P est sur la tangente au sommet.

7756. — La tangente en un point M de l'hyperbole équilatère $xy = a^2$ rencontre les axes de coordonnées en A et B. Sur AB on construit un triangle équilatéral ABC. Lieu du point C.

7757. — Sur la tangente en un point M d'une ellipse on porte dans un sens déterminé une longueur constante MP. Trouver l'aire comprise entre l'ellipse et le lieu du point P.

7758. — Équation générale des coniques ayant pour foyers deux points donnés F et F'. Par tout point du plan il ne passe deux. Il y en a une tangente à une droite.

7759. — Équation générale des paraboles osculatrices à une courbe donnée en un point donné. Lieu des foyers.

7760. — On donne la courbe $x^3 + y^2 = 1$ rapportée à deux axes rectangulaires. D'un point P du plan on abaisse PM et PN perpendiculaires sur Ox et Oy. Quel lieu doit décrire le point P pour que la droite MN soit tangente à la courbe ? Où doit se trouver le point P pour que MN rencontre la courbe en trois points réels ?

7761. — On considère une ellipse et les cercles osculateurs à cette courbe aux extrémités de deux diamètres conjugués. Lieu du point de rencontre des cordes communes à chacun des cercles et à l'ellipse.

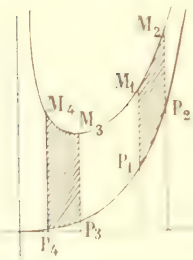
7762. — On considère l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et la parabole $y^2 - 2px = 0$ $(p > 0)$. Cette parabole rencontre l'ellipse en deux points réels M et M', symétriques par rapport à Ox. Calculer l'aire OMAM'. limitée par la parabole et l'ellipse. A est le sommet de l'ellipse $(a, 0)$.

7763. — Lieu des centres des coniques passant par quatre points.

7764. — On donne deux points A et B sur le grand axe d'une ellipse. Trouver sur l'ellipse un point M tel que MA et MB soient symétriques par rapport à la normale au point M.

7765. — Etudier les tangentes issues d'un point à la courbe $y = x^3 - px^2$. Equation tangentielle. Lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires.

7766. — Construire la courbe $x^4 + a^4 = a^4xy$. La placer par rapport à la courbe $y_1 = \frac{x^4}{a^3}$. Evaluer l'aire comprise entre ces deux courbes et deux parallèles à Oy. Soit A l'aire $P_1P_2M_2M_1$ et B l'aire $P_3P_4M_4M_3$. A devient infini si P_1 tend vers le point O. B devient infini si P_3 s'éloigne indéfiniment. Peut-on régler les mouvements de P_2 et P_4 pour que $B - A$ reste fini quand A et B augmentent indéfiniment.



7767. — On a $X = (X - t - (y))$. Que décrit le point (X, Y) si le point (t, y) décrit un cercle ?

7768. — Enveloppe de la droite $\frac{x}{x-t} + \frac{y}{y-t} = 1$.

7769. — Trouver l'enveloppe des cordes de la courbe $y^2 = \frac{x^3}{1-x}$ qui sont vues de l'origine sous un angle droit.

7770. — On donne un point O et une droite D. Par le point O on mène une droite variable rencontrant D au point A ; sur D on prend le point B tel que $AB = a$, et par le point B on abaisse BM perpendiculaire sur OA. Lieu du point M. Etudier géométriquement le degré du lieu.

7771. — On donne deux droites D et D' et un point A. Par le point A on mène une sécante rencontrant D en B, D' en B', et par B on mène une parallèle à D', par B' une parallèle à D. Ces deux parallèles se coupent au point M. Lieu du point M.

7772. — Construire la courbe $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Calculer la longueur d'un arc. Développante.

7773. — Construire la courbe $y = \sin x \cos x$. Evaluer l'aire comprise entre Ox et le premier arc de cette courbe. Centre de gravité de cette aire.

7774. — Enveloppe de la droite $Y = f(x) - f'(x)(X - x)$, x étant un paramètre.

7775. — Enveloppe de la corde commune à un cercle fixe et à un cercle variable dont le centre décrit une droite et dont le rayon est constant. Remarques géométriques.

7776. — D'un point M on abaisse MP et MQ perpendiculaires sur deux axes rectangulaires Ox, Oy, et des points P et Q on abaisse PP' et QP'' perpendiculaires sur OM. On construit les points P_1, P_2, sommets du rectangle qui a pour diagonale P'P'' et dont les côtés sont parallèles aux axes. Calculer les coordonnées des points P_1 et P_2 en fonction de celles du point M. Lieux de P_1 et de P_2 si M décrit une droite. Lieu de M si P_1 décrit une droite.

7777. — Trouver les développantes de l'enveloppe de la droite $x \sin t - y \cos t - t = 0$.

7778. — On donne deux droites et un point P. Par ce point on mène une sécante rencontrant les droites en A et B. On prend sur cette droite un point M tel que $\overline{PM} = \overline{AB}$. Lieu du point M.

7779. — Soit M un point de la cubique $x(x^2 + xy + y^2) - y^2 = 0$. La tangente en M

rencontre la cubique en M'. De même, les tangentes en P et Q rencontrent la cubique en P' et Q'. Si M, P, Q sont en ligne droite, il en est de même de M', P', Q'.

IV. — Géométrie analytique à trois dimensions

7780. — Symétrique d'un point par rapport à un plan ou par rapport à une droite.

7781. — Rapport anharmonique de quatre plans. Cas où l'un d'eux est à l'infini.

7782. — Établir analytiquement la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, en se donnant les cosinus directeurs des demi-droites joignant le centre de la sphère aux sommets du triangle.

7783. — On fait tourner le point $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$ d'un angle droit autour de la droite

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{5}.$$

Trouver les nouvelles coordonnées du point.

7784. — On fait tourner le point x', y', z' autour de l'axe $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ d'un angle θ dans le sens direct. Trouver les coordonnées du point après la rotation.

7785. — On fait tourner l'axe des z d'un angle droit autour de la droite $x = 2y = 3z$. Trouver les équations de la nouvelle position.

7786. — Soient M et M' deux points infiniment voisins d'une courbe gauche. Distance du point M' au plan osculateur au point M. Ordre infinitésimal de cette distance, MM' étant l'infiniment petit principal.

7787. — Étudier la surface engendrée par une conique tournant autour d'un axe.

7788. — Mener par un point des plans osculateurs à la courbe $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

7789. — Évaluer l'arc de la courbe $y = ax^5$, $z = bx^3$. Peut-on déterminer a et b de façon que l'intégrale soit rationnelle ?

7790. — On considère un cône de révolution d'axe Sx et de demi-angle au sommet α. On le coupe par un plan qui rencontre l'axe au point A tel que SA $= a$, et qui fait l'angle β avec l'axe. Trouver le volume compris entre le sommet et le plan.

7791. — Que représentent les deux équations $y^2 + z^2 - 2az = 0$, $x^2 - 2az = 0$? Construire la projection de l'intersection de ces deux surfaces sur le plan des xy. Volume commun à ces deux cylindres.

7792. — Que représente la surface $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$? Loi de variation du plan tangent quand le point de contact se déplace sur une génératrice. Conditions pour qu'en deux points d'une génératrice les plans tangents soient perpendiculaires.

7793. — Si l'arc S d'une courbe est de la forme $ax + by + cz + d$, a, b, c, d étant des constantes, la courbe est une hélice.

7794. — Que représente l'équation $PQ = RS$, P, Q, R, S étant les premiers membres d'équations de sphères ?

7795. — Plan tangent en un point de la surface $z = \frac{x^2y^2(x+y)}{a}$. Lieu des points de contact des plans tangents menés par un point de Oz.

7796. — Volume de l'ellipsoïde.

7797. — On considère la surface engendrée par la droite $x = az + p$, $y = bz + q$, a, b, p, q étant fonctions d'un paramètre. On suppose que des plans parallèles au plan des xy coupent la surface suivant une courbe fermée. Trouver le volume de la surface compris entre les plans $z = z_0$ et $z = z_1$.

7798. — Les coordonnées d'un point d'une sphère s'expriment rationnellement en fonction de deux paramètres.

7799. — Si le plan osculateur à une courbe passe par un point fixe, cette courbe est plane.

7800. — On donne trois axes de coordonnées rectangulaires et une sphère ayant son centre sur Ox. On coupe cette sphère par un plan perpendiculaire à Oz, qui rencontre la sphère suivant un cercle C et Oz au point I. Par le point I on mène des tangentes au cercle C. Surface engendrée par ces tangentes quand le plan varie.

7801. — Trouver une courbe tracée sur un cylindre de révolution et dont les tangentes rencontrent un cercle ayant son centre sur l'axe du cylindre et son plan perpendiculaire à cet axe.

7802. — Trouver la ligne de plus grande pente d'un cylindre à base circulaire dans le plan de xy, supposé horizontal.

7803. — On considère un cylindre ayant pour section droite une spirale logarithmique. On coupe ce cylindre par un plan quelconque. Équation du développement de la section.

7804. — On considère la courbe $y = x^2$, $z = \frac{x}{\sqrt{3}}$ et la droite $x = y = z - 1$. Déterminer les cordes de la courbe qui rencontrent la droite. Parmi ces cordes, y en a-t-il pour lesquelles les tangentes aux extrémités sont rectangulaires ?

7805. — Lieu des points de l'espace dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite fixe soit constant.

7806. — Que représentent les équations $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, $z = \alpha + f(r)$, où α et r sont des paramètres ? Plan tangent en un point. Pouvait-on prévoir le résultat ?

7807. — Les tangentes à la courbe $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ font un angle constant avec une direction fixe. Trouver l'équation du cylindre s'appuyant sur la courbe et dont les génératrices sont parallèles à la direction fixe. Section droite de ce cylindre. Comparer l'arc de cette section droite et celui de la courbe.

7808. — Étudier la surface $x = -ka\cos v$, $y = (ku + b)\sin v$, $z = ky$. Génératrices. Contour apparent horizontal.

7809. — Étudier la surface $x = \left(a + \frac{v}{u}\right)\cos u$, $y = \left(b + \frac{v}{u}\right)\sin u$, $z = v\sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u}$. Contour apparent de la surface sur le plan des xy.

7810. — Une sphère variable passe par deux points fixes et reste tangente à une sphère fixe. Lieu du point de contact.

7811. — On donne un cercle dans le plan des xy passant par l'origine et par un point A de Ox, et une droite D, parallèle au plan des yz et passant par le point A. Trouver l'équation de la surface engendrée par une droite qui rencontre le cercle, la droite D et Oz.

7812. — Étudier la surface $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$. Section par un plan tangent. Section par le cylindre $x^2 + y^2 = 1$. Aire latérale du cylindre comprise entre le plan $z = 0$ et la surface.

7813. — Enveloppe des plans tangents menés par l'origine à la courbe $x = \ldots$

7814. — Plan tangent à la surface $x = t + y$, $y = t^2 + z$, $z = t^3 + x$. Désigner les deux des plans.

7815. — Trouver le plus petit arc d'hélice tel que les tangentes aux extrémités se rencontrent.

7816. — La perspective d'une hélice sur un plan a-t-elle des points doubles ?

7817. — Trouver l'équation de la surface engendrée par une droite rencontrant Oy, parallèle au plan xOz et rencontrant la courbe $y = z$, $y = x^2$. Trouver le volume limité par la surface et les plans $x = 1$, $y = 1$.

7818. — Équation de la surface engendrée par Oz tournant autour de la droite $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$. En prenant un autre axe de rotation, peut-il arriver que les deux surfaces se raccordent suivant Oz ?

7819. — Trouver une courbe [illegible] telle que le plan osculateur en un point M coupe Oy en point du même côté que M.

7820. — Trouver les courbes tracées sur un cône de révolution et coupant les génératrices sous un angle constant.

7821. — Trouver sur un cône de révolution d'axe Oz une courbe dont les tangentes fassent avec Oz un angle constant.

7822. — Sur chaque corde d'une ellipse parallèle à une direction donnée comme diamètre on décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire au plan de l'ellipse. Trouver la surface engendrée par ce cercle.

7823. — Étudier la surface $z = a\frac{y - x}{y^2 + x^2}$. Plan tangent et normale. Section par le plan $z = x$. Normales issues d'un point.

7824. — Étudier la courbe $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$. Tangente, normale principale, plan osculateur, courbure.

7825. — Sur la tangente en un point M d'une courbe gauche, on porte une longueur constante $MP = a$. Étudier les propriétés du plan normal en P à la courbe lieu de ce point.

7826. — Trouver une courbe tracée sur un paraboloïde équilatère telle que la tangente en chaque point soit bissectrice de l'angle des génératrices de la surface qui passent par ce point.

7827. — Propriétés de la normale principale à une courbe gauche pour laquelle on a $xdy - ydx = adz$. Montrer que cette normale rencontre une droite fixe.

7828. — Étudier la surface $\sin z = \sin x \sin y$. Rayon de courbure à l'origine de la section par le plan $x + y - z = 0$.

7829. — Mener par un point de l'espace des plans osculateurs à la courbe $x = \cos z$, $y = \sin z$.

7830. — Même question pour la courbe $x = \operatorname{ch} z$, $y = \operatorname{sh} z$.

7831. — On considère la courbe $x = \ldots$, $y = \ldots$, $z = \ldots$. Plan osculateur et normale principale.

7832. — Trouver les courbes tracées sur le paraboloïde $yz - ax = 0$ qui coupent les génératrices d'un même système à angle droit.

7833. — Étudier la surface engendrée par les tangentes à une hélice circulaire.

7834. — Étant donnée la surface $x(x + y) - az = 0$, trouver les courbes tracées sur cette surface qui coupent orthogonalement les génératrices parallèles au plan $x = 0$.

7835. — Surface engendrée par une droite de longueur constante dont les extrémités décrivent deux droites rectangulaires. Lieu du milieu de cette droite.

7836. — Trouver les génératrices rectilignes de la surface $xyz = \ldots$

7837. — Étudier la surface engendrée par une droite tangente à une sphère et rencontrant deux droites fixes.

7838. — Que représentent les équations $yz = zx = xy$, $x + y + z = 0$, $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = 0$?

7839. — On mène les tangentes en deux points A et M d'une hélice circulaire. Calculer la plus courte distance δ de ces deux droites. On suppose que M se rapproche indéfiniment de A. Évaluer la partie principale de δ.

7840. — Étant donnée l'équation d'une surface de révolution $f(S, P) = 0$, comment pourrait-on déterminer la méridienne ?

7841. — Lieu des points d'où l'on peut mener deux plans osculateurs rectangulaires à la courbe $y = x^2$, $z = x^3$.

7842. — Trouver l'équation du cône qui a pour sommet le point (1, 1, 1) et pour directrice la courbe

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t.$$

7843. — Reconnaître les quadriques :

$x^2 - 2yz + y^2 - 2zx - 2x - 2y - 2z = 0$, $\quad xy + xz + z + 3 = 0$, $\quad xy + yz + zx + 1 = 0$,
$x^2 - hxy + z^2 + x - y = 0$, $\quad xy + yz + zx - x - y + z = 0$, $\quad y^2 + xz + x - 1 = 0$ (coniques dans principaux),
$x^2 + 2yz + y^2 - 2x - 2y = 0$, $\quad x^2 - y^2 + 2yz + 2x = 0$, $\quad x^2 + y^2 - 2yz + 2x - 2y = 0$ (coniques circulaires),
$ay - z^2 + b(z - x)^2 + c(x - y)^2 = 1$, $\quad x^2 + y^2 + 2yz + zx + 3xy - z = 0$, $\quad x^2 + 10y^2 + 4z^2 + 1 = 0$ (coniques circulaires).

7844. — Que signifie dans l'équation d'une quadrique l'absence du terme en x^2, en xy, en x ?

7845. — Lieu des pieds des perpendiculaires communes à Oz et aux génératrices de la surface $x^2 - y^2 + z^2 = a^2$.

7846. — Trouver les quadriques réelles qui passent par les deux droites $x = z$, $y = z - 1$ et $x = \omega z$, $y = \omega^2 z - \omega$, ω désignant une racine cubique imaginaire de l'unité.

7847. — Existe-t-il une quadrique réelle passant par les trois droites $x = z + 1$, $y = z - 1$; $x = \omega z + 1$, $y = \omega^2 z - \omega$; $x = \omega^2 z + 1$, $y = \omega z - \omega^2$, ω étant une racine cubique imaginaire de l'unité ?

7848. — La droite joignant l'origine O à un point M du paraboloïde $xy = az$ rencontre le plan $x = 0$ au point M'. Étudier la correspondance entre M et M'. Si M' décrit une conique, quel est le lieu de M ?

(A. Boutin.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1917. 1° — Étant donnée une parabole (P) tangente aux axes de coordonnées Ox et Oy, supposés rectangulaires, en A et B, on considère un point p quelconque de Ox et la tangente issue de p à la parabole autre que Ox, pT. On désigne par t la projection de T sur Ox ; montrer qu'à un point p correspond en général un point t et un seul, et qu'à un point t correspondent deux points p, p et p'. Le point p étant donné construire p'. p et p' décrivent une involution.

2° On prend un point M du plan projeté sur les axes en p et q. On mène de p et q deux tangentes à la parabole (P) qui se coupent en N. Montrer qu'à un point M correspond en général un point N et réciproquement N correspondent deux points M, M et M'. M étant donné, construire M'. Cas où M, M' sont confondus. Cas où M et N sont confondus.

3° Lieu de N si M décrit AB ou une parallèle à AB. Lieu de M si N décrit (P). Trouver des paraboles déduites de (P) par translation et telles que le lieu de M soit simple si N décrit l'une d'elles.

4° On prend une hyperbole équilatère (H) d'asymptotes parallèles à Ox et Oy, coupant les axes en deux points situés sur une même parallèle à AB et telle de plus qu'elle contienne les deux points M et M'. Quelles sont les positions successives des hyperboles (H) quand N décrit AB ou une parallèle à AB ?

5° On projette un point M sur les axes en p et q et l'on considère la parabole (PH) tangente aux axes de coordonnées en p et q. Elle admet avec (P) une tangente commune ΔM différente de Ox ou Oy. Lieu des points M donnant une même droite ΔM. Peut-on trouver sur ce lieu deux points M et M' associés de la façon indiquée au 2°. Que devient alors le point N ?

A. Sainte-Lague, professeur au lycée de Douai.

1918. — 1° On considère un point M mobile dont la trajectoire est la cubique gauche Γ, $x = at$, $y = bt^2$, $z = ct^3$, a, b, c étant les coordonnées d'un point P fixe et t désignant le temps. On suppose a, b, c positifs et non nuls. On suppose dans la suite que le point P reste sur une surface (S) telle que pour les valeurs convenables de a, b, c, le vecteur-vitesse en chaque point de Γ fasse un angle constant, que l'on déterminera, avec une droite Δ convenablement choisie.

P étant fixe, étudier en chaque point de Γ la vitesse. Hodographe. (On déterminera en vraie grandeur les éléments de l'hodographe.)

2° Calculer en chaque point de Γ l'accélération totale et l'accélération tangentielle du mobile. Déduire de leur comparaison le rayon de courbure de Γ. Variations de ce rayon de courbure.

3° A chaque point P de (S) correspond un certain mouvement. P étant supposé arbitraire sur (S), y a-t-il un nombre fini ou infini de mouvements faisant passer le point M par un point Q donné de l'espace (Deux mouvements distincts pouvant d'ailleurs correspondre à une même trajectoire). Discuter suivant la position de Q.

4° Étant donné un point Q, on considère le mouvement qui fait passer M en Q au temps t (le temps t correspondant au passage du mobile à l'origine). On suppose que le mobile quitte sa trajectoire en Q suivant la tangente avec une vitesse uniforme égale primitivement à sa vitesse au passage par O. Lieu des points Q' pour

pés dans cette hypothèse par le mobile au temps $t' + 1$ quand Q occupe toutes les positions possibles (on suppose que t' a une valeur fixe donnée).

A. Sainte-Lague, professeur au lycée de Douai.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1844. — *On considère une strophoïde ayant pour point double le point O, origine des coordonnées, et pour tangentes en ce point O les deux axes :*

$$(\alpha x - \beta y)(x - y) - xy = 0.$$

1° *Soient* O_1 *et* O_2 *les deux points situés sur les deux branches de la strophoïde et confondus avec le point* O. A *et* B *deux autres points de la courbe tels que le rapport anharmonique* (O_1O_2AB) *soit égal à* -1. *Trouver l'enveloppe de la corde* AB *et le lieu du milieu de cette corde.*

2° *L'enveloppe de* AB *est une parabole. Trouver le lieu de son foyer, quand* α *et* β *varient de façon que l'asymptote de la strophoïde passe par un point fixe. Dans les mêmes conditions, trouver le lieu du sommet et construire ce lieu.*

1. Si on pose $y = tx$, les coordonnées du point variable de la strophoïde se mettent sous forme rationnelle en fonction de t ; la courbe est unicursale, et le rapport anharmonique de quatre points est égal à celui de leurs paramètres, c'est-à-dire au rapport anharmonique des quatre coefficients angulaires des rayons OO_1, OO_2, OA et OB. Si ce rapport est égal à -1, le couple OA, OB est harmonique par rapport au couple des tangentes au point double, OO_1 et OO_2. Celles-ci se confondent avec les axes ; donc les deux droites OA et OB doivent être également inclinées sur les axes, c'est-à-dire avoir des coefficients angulaires égaux et de signes contraires.

Cela posé, soit $ux + vy + w = 0$ l'équation de la droite AB ; les rayons qui joignent l'origine aux trois points de rencontre avec la strophoïde ont pour équation

$$(\alpha x - \beta y)(x^2 + y^2) + xy(ux + vy) = 0$$

et leurs coefficients angulaires sont fournis par

$$\alpha t - \beta t(1 + t^2) + t(u + vt) = 0,$$

ou

$$\beta u t^3 + \alpha v t^2 - (\beta w + \alpha u)t - \alpha w = 0.$$

Deux des racines t et t' doivent vérifier la relation $tt' + 1 = 0$, la troisième est donc $t = -\dfrac{\alpha w + v}{\beta u}$, et, en écrivant qu'elle vérifie la relation précédente, nous avons

$$(\beta u - \alpha)(\alpha w + v) - (\beta w + \alpha u) = 0,$$

ou

$$(1) \qquad \beta u v - \alpha u w + \alpha v w = 0.$$

C'est l'équation tangentielle de l'enveloppe de AB ; nous voyons de suite que cette enveloppe est une parabole tangente aux deux axes.

Nous aurons son équation ponctuelle en écrivant que les deux tangentes issues d'un point (x, y) sont confondues. Or l'équation aux coefficients angulaires de ces tangentes s'obtient en éliminant w entre (1) et $ux + vy + w = 0$, qui exprime que la tangente passe au point (x, y). C'est

$$\alpha x + \alpha y, \beta x - \alpha y - \alpha x - \alpha y = 0,$$

ou

$$\alpha y(x - y) - \alpha x(\beta x - \alpha y - 1) = 0.$$

En annulant le discriminant, nous aurons l'équation ponctuelle de la parabole

$$(2) \qquad (\beta x + \alpha y - 1)^2 - 4\alpha\beta xy = 0.$$

Elle touche les axes aux points où la droite $\beta x + \alpha y - 1 = 0$ les rencontre.

Le milieu de AB est conjugué harmonique du point à l'infini sur AB. En joignant tous ces points au point O, on voit que les deux droites OA et OB doivent être harmoniques à la droite qui joint l'origine au milieu, $y = mx$, et à la parallèle à la droite $ux + vy = 0$. La relation entre les coefficients angulaires est donc

$$2t't'' - 2m\frac{u}{v} - (t' + t'')\left(m - \frac{u}{v}\right) = 0.$$

Or $t' + t'' = 0$; nous avons donc

$$m = \frac{v}{u}t't''.$$

D'autre part, $$tt't'' = -\frac{\alpha}{\beta}, \qquad t = -\frac{\alpha u + v}{\beta u};$$

donc $$t't'' = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\beta u}{\alpha u + v} = \frac{\alpha u}{\alpha u + v}.$$

Mais l'équation (1) nous donne

$$\alpha u + v = -\frac{\beta v u}{u},$$

et, par suite, $$t't'' = -\frac{\alpha u}{\beta v}.$$

Nous voyons donc que $m = -\frac{\alpha}{\beta}$, et que le lieu du milieu est la droite fixe

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x, \qquad \alpha x + \beta y = 0.$$

C'est la parallèle à l'asymptote menée par le point O.

2. L'équation de l'asymptote à la strophoïde est immédiate ; c'est

$$\alpha x + \beta y + \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} = 0.$$

Elle s'obtient soit par la règle classique

$$d = -\frac{\alpha_{m-1}(c)}{\alpha_m(c)},$$

soit en exprimant que la droite $\alpha x + \beta y - \lambda = 0$ coupe la courbe en deux points à l'infini sur la direction $$\alpha x + \beta y = 0.$$

En écrivant qu'elle passe en un point fixe x_0, y_0, nous obtenons entre α et β la relation

(3) $$(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha x_0 + \beta y_0) + \alpha\beta = 0.$$

Les deux tangentes à la parabole issues du point O sont rectangulaires ; ce point est donc un point de la directrice, et le foyer est le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la corde des contacts ; ses coordonnées vérifient les deux équations $\beta x + \alpha y = 1$, $\alpha x - \beta y = 0$; celles-ci donnent de suite α et β,

$$\frac{\alpha}{y} = \frac{\beta}{x} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

La relation (3) devient alors

(4) $$x_0 y + y_0 x + xy = 0.$$

C'est l'équation du lieu du foyer ; elle représente une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes, et qui passe au point O.

Les coordonnées du foyer sont $$\frac{x}{\beta} = \frac{y}{\alpha} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

L'axe a donc pour équation

$$\beta\left(x - \frac{\beta}{x^2 + \beta^2}\right) - \alpha\left(y - \frac{\alpha}{x^2 + \beta^2}\right) = 0, \qquad \text{ou} \qquad \beta x - \alpha y = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{x^2 + \beta^2}.$$

La tangente au sommet passe aux projections du foyer sur les axes ; elle a pour équation

$$\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \alpha x + \beta y = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Le sommet est à l'intersection de ces deux droites ; il a pour coordonnées

$$x = \frac{\beta^3}{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad y = \frac{\alpha^3}{\alpha^2 + \beta^2},$$

α et β étant liés par la relation (3).

Cette relation donne $\frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = -\alpha x_0 - \beta y_0$; en comparant à l'équation de la tangente au sommet, nous avons la relation

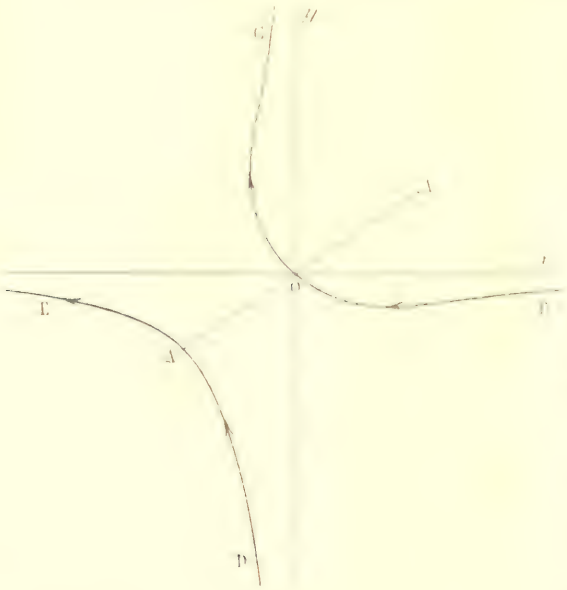
$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{\beta}{\alpha}$$

d'ailleurs $\frac{y}{x} = \frac{\alpha}{\beta}$: le lieu des sommets a donc pour équation

(5) $$x(y - y_0) = y(x - x_0).$$

Cette courbe a un point triple au point $-x_0$, $-y_0$: elle est donc unicursale.

Ce dernier point était d'ailleurs évident : il suffit en effet de poser $\beta = \alpha t$; x et y deviennent



$$x = \frac{t^3}{\alpha(1 + t^2)}, \qquad y = \frac{1}{\alpha(1 + t^2)},$$

et la relation (3) se change en

$$\alpha(1 + t^2)(x - x_0) - t(y - y_0) = 0.$$

$$\alpha(1 + t^2)y = -\frac{x}{x_0 - ty_0}.$$

Les équations paramétriques du lieu sont ainsi :

$$(6) \qquad x = \frac{-t^2 x_0 - ty_0}{1 + t^2}, \qquad y = -\frac{x_0 - ty_0}{\alpha(1 + t^2)}.$$

Elles permettent de construire facilement la courbe lieu des sommets. Nous le ferons en supposant x_0 et y_0 positifs, c'est-à-dire le point fixe A dans le premier angle des axes.

Pour $t = -\infty$, x est infini et positif, il a pour partie principale $-ty_0$; y est infiniment petit et négatif, sa partie principale est $\frac{-y_0}{t^2}$. Quand t varie de $-\infty$ à $\frac{-x_0}{y_0}$, x reste positif et y négatif ; pour $t = \frac{-x_0}{y_0}$, x et y deviennent nuls et la courbe passe au point O ; la tangente en ce point a pour coefficient angulaire $t^3 = -\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^3$. x devient alors négatif et y positif, et cela depuis $\frac{-x_0}{y_0}$ jusqu'à 0. Pour $t = -x_0$, x est nul et négatif, y infini et positif. Pour $t = x_0$, x est nul et négatif et y infini et négatif. Enfin, pour $t = +\infty$, x est infini et négatif et y nul et négatif. Ces remarques suffisent pour avoir une forme approchée de la courbe. La discussion rapide des dérivées de x et de y permet de vérifier la forme adoptée. Cette étude est aisée : en effet, formons ces dérivées ; ce sont $x' = \frac{-t(ty_0 - 3tx_0 - 2x_0)}{(1 + t^2)^2}$ et $y' = \frac{2t(y_0 - 3tx_0 - x_0)}{\alpha(1 + t^2)^2}$.

Les racines de x' sont $t = 0$ et l'unique racine négative de l'équation $ty_0 - 3tx_0 - 2x_0 = 0$.

Il est facile de voir que cette équation n'a qu'une racine réelle, car la quantité

$$4p^3 - 27q^2 = 4.27 - 27.\frac{4x_0^2}{y_0^2}$$

est essentiellement positive. Cette racine est d'ailleurs comprise entre $\frac{-x_0}{y_0}$ et 0 : elle correspond bien à un point de l'arc OC. De $-\infty$ à cette racine t_1, x diminue ; il croît ensuite de t_1 à 0 ; puis décroît de 0 à $+\infty$.

Les racines de $y' = 0$ se réduisent à l'unique racine négative de l'équation $2t^3y_0 + 3t^2x_0 + x_0 = 0$; elle est comprise entre $-\infty$ et $\frac{-x_0}{y_0}$; elle correspond bien à un point de l'arc BO. De $-\infty$ à cette racine t_2, y décroît ; ensuite, il croît toujours.

Bonnes solutions : MM. P. Leonzi, à Bordeaux ; G. Lach ; J. Soubeiran ; A. Rousseau ; L. Eyl, lycée d'Alger ; L. Pouyet, lycée Hoche ; M. Richard et P. Balzano ; Nebri, à Bordeaux ; C. Blaizot, école Sainte-Geneviève, à Paris ; L. N. Bassaget ; G. Foucry, à Reims ; G. Gay, lycée Saint-Louis.

Assez bonnes solutions : MM. A. Courtois ; Névéjan.

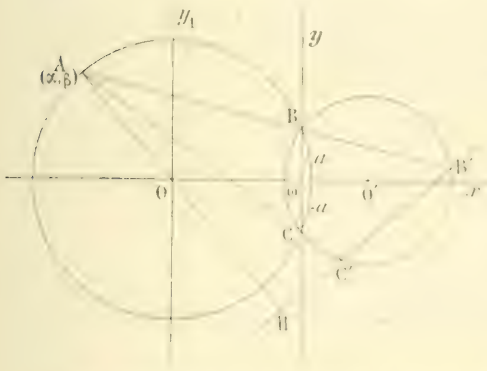
1851. — *On donne deux circonférences* O *et* O′ *qui se coupent en* B *et* C, *on prend un point* A *de la circonférence* O *à* B *et* C, *et on détermine ainsi sur* O′ *les points* B′ *et* C′.

Trouver le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de A *sur* B′C′ *ainsi que l'enveloppe de* B′C′.

Voir ce que deviennent ces courbes, quand les cercles O *et* O′ *sont orthogonaux ou tangents.*

Étude géométrique de la question.

Solution analytique. — Prenons pour axes les deux droites OO′ et BC.



On sait que dans ce cas les équations des deux cercles O, O′ sont

$$x^2 + y^2 - 2bx - a^2 = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2b'x - a^2 = 0.$$

Soient (α, β) les coordonnées de A.

L'équation de AB est

$$\frac{y-\beta}{\beta - a} = \frac{x-\alpha}{\alpha - a} \qquad \text{ou} \qquad x\beta - \alpha y - a\beta + \alpha a = 0$$

AC aura de même pour équation (en changeant a en $-a$)

$$x\beta + \alpha y - a\beta - \alpha a = 0.$$

Considérons le faisceau de coniques passant par B, C, B′, C′. Son équation est

$$(\beta x - \alpha y)^2 - a^2(x-\alpha)^2 - \lambda[x^2 + y^2 - 2b'x - a^2] = 0.$$

Pour une certaine valeur de λ, cette conique se décompose en BC et B′C′ ; λ est alors en facteur.

Si nous annulons le coefficient de y^2 et le terme constant, nous obtenons

$$a^2\alpha^2 + a^2\lambda = 0, \qquad a^4 - \lambda a^2 = 0, \qquad \text{d'où nous tirons} \qquad \lambda = -\alpha^2.$$

La conique que nous considérons est alors

$$\beta^2x^2 - 2\alpha\beta xy - a^2x^2 - 2a^2\alpha x + 2b'\alpha^2x + a^2\alpha^2 = 0,$$

qui se décompose en $x = 0$, BC ; $x(a^2 + \alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta y - 2\alpha(a^2 + b'\alpha) = 0$, B′C′.

La perpendiculaire AH a donc pour équation

$$y - \beta = (x - \alpha)\frac{2\alpha\beta}{a^2 + \alpha^2 - \beta^2} \qquad \text{ou encore} \qquad 2\alpha\beta x - (a^2 - \alpha^2 + \beta^2)y - \beta(\beta^2 - \alpha^2 - a^2) = 0.$$

Pour avoir le lieu du point H, nous éliminerons (α, β) entre les équations

$$(a^2 + \alpha^2 - \beta^2)x + 2\alpha\beta y - 2\alpha(a^2 + b'\alpha) = 0, \qquad \text{(BC)}$$

$$2\alpha\beta x - (a^2 + \alpha^2 - \beta^2)y - \beta(\beta^2 - \alpha^2 - a^2) = 0, \qquad \text{(AH)}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2b'\alpha - a^2 = 0 \qquad \text{(cercle O)}$$

Ces équations deviennent, en tenant compte de la dernière,

$$\beta x - b\beta - \alpha y = 0. \qquad \text{(AH)}$$

$$x\alpha - b\alpha + \beta y - (a^2 + b\alpha) = 0. \qquad \text{(BC)}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2b\alpha + a^2 = 0. \qquad \text{(cercle O)}$$

Il est évident sur l'équation de AH que cette droite passe par O. Cette remarque sera justifiée par la géométrie.

Prenons pour nouvel axe des y la perpendiculaire en O. Il suffit de changer x en $(x' + b)$.

Si nous conservons les mêmes coordonnées courantes (x, y), il vient alors

$$\beta x = \alpha y. \qquad \text{(AH)}$$

$$\alpha(b + x) + \beta y - (a^2 + b\alpha + b\beta) = 0, \qquad \text{(BC)}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2. \qquad \text{(cercle O)}$$

Nous en tirons $\qquad \beta = \alpha \dfrac{y}{x}$.

De la seconde équation nous tirons α :

$$\alpha\left[b + x + \frac{y^2}{x} - b\right] = a^2 + bb, \quad \alpha = \frac{(a^2 + bb)x}{x^2 + y^2 + (b - b')x}. \quad \text{De même,} \quad \beta = \frac{(a^2 + bb)y}{x^2 + y^2 + (b - b')x}.$$

Posons $b' - b = c$, distance des centres O et O', la troisième relation nous donne l'équation du lieu :

$$(a^2 + bb)^2(x^2 + y^2) = R^2(x^2 + y^2 + cx)^2$$

ou encore

$$(x^2 + y^2 + cx)^2 - \left(\frac{a^2 + bb}{R}\right)^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Ce lieu est une quartique bi circulaire ayant le point O pour point double et admettant les points I et J comme points de rebroussement. C'est donc un limaçon de Pascal. Le cercle directeur est le cercle décrit sur OO' comme diamètre $x^2 + y^2 - cx = 0$. Le pôle est le point O et la longueur constante portée sur le rayon vecteur du point O de part et d'autre du point d'intersection avec le cercle directeur est $\left(\dfrac{a^2 + bb}{R}\right)$.

Le seul cas particulier intéressant du lieu est celui dans lequel les cercles deviennent orthogonaux ; la relation d'orthogonalité nous donne $a^2 + bb' = 0$.

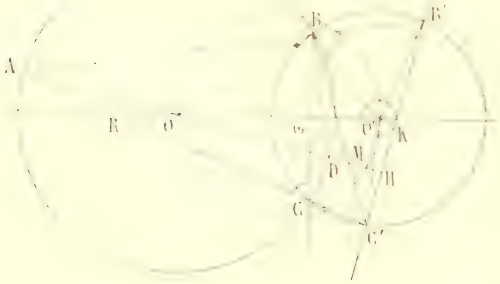
Le limaçon se réduit à son cercle directeur compté deux fois, $x^2 + y^2 - cx = 0$.

Étude géométrique. — Nous allons démontrer que le lieu du point H est une podaire de cercle.

I. — La droite AH passe par le point O.

En effet les triangles ADB et AHB' sont semblables.

$\widehat{D} = \widehat{ACB} = B$, comme ayant même mesure, donc $\widehat{ABD} = 1$ droit. AH passe par O.



II. — L'enveloppe de la droite B'C' est le cercle de centre O' et tangent à B'C'. Il suffit de démontrer que $\widehat{B'O'C'}$ ou sa moitié $\widehat{B'BC'}$ est constant.

En effet $\widehat{B'BC'} = \widehat{BAC'} + \widehat{BC'A} = C^{te}$, car chacun de ces deux angles est constant dans un des deux cercles.

Le lieu de H est donc la podaire de O par rapport au cercle, enveloppe de B'C'.

Le cercle directeur de ce limaçon de Pascal est bien (comme on l'a vu par le calcul) le cercle décrit sur OO' comme diamètre.

La longueur constante est $MH = O'K$, rayon du petit cercle. On voudra aisément que

$$OK = \frac{a^2 - bb'}{R}.$$

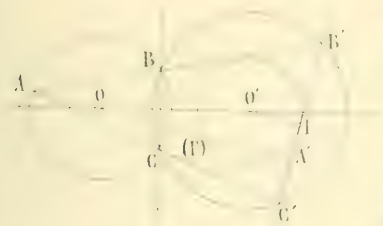
Enfin dans le cas particulier où les deux cercles sont orthogonaux, $B'C'$ passe par O',

$$\widehat{OBO'} = 1 \text{ droit} = \widehat{B'BC} = \widehat{BAC} = \widehat{BCA}.$$

Le lieu de H est donc le cercle décrit sur OO' comme diamètre.

René TAYON, lycée Louis-le-Grand.

Bonnes solutions : MM. L. Simon, à Fourmies ; G. Lagl, à Rodez ; Rême, à Alger ; Maréchaux, C. Beabez, élève, sainte-Geneviève, à Paris ; Nevejans ; A. Haegelen, à Dijon.



Autre solution géométrique. — Transformons par inversion en prenant A pour pole, le module étant la puissance de ce point par rapport au cercle O'. Le cercle O devient la droite BC, le cercle O' se transforme en lui-même.

Cela prouve : 1° que BC est perpendiculaire sur AO, 2° que BC coupe le cercle O' sous un angle constant V égal à l'angle des cercles O et O'. On en déduit que B'C' enveloppe un cercle (Γ) de centre O' et que la projection A' de A sur B'C' décrit la podaire de O par rapport à (Γ), c'est-à-dire un limaçon de Pascal de pôle O par rapport au cercle de diamètre OO'.

Lorsque les cercles O et O' sont orthogonaux, $V = \frac{\pi}{2}$; le cercle (Γ) se réduit à son centre O' et le limaçon devient le cercle de diamètre OO'.

Lorsque les cercles O et O' sont tangents, $V = 0$ ou π ; le cercle (Γ) se confond avec le cercle O' et le limaçon devient la podaire de O par rapport à ce cercle. Il est très facile d'obtenir ces deux résultats directement.

J. SOUBAIGNE, à Mont-de-Marsan.

Bonnes solutions de MM. G. Fouqay, à Reims ; E. N. Barisien ; R. Dentor ; A. Rousseau.

1860. — *Par un des foyers F d'une ellipse on mène une corde AB variable ; par le second foyer F' on mène la corde CD perpendiculaire à AB. Soient P et Q les pôles de AB et CD par rapport à l'ellipse. 1° La droite PQ enveloppe une ellipse ; 2° Le lieu du point de rencontre de PQ et AB est une cubique dont l'aire comprise entre la courbe et son asymptote est finie ; calculer cette aire.*

1. Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes. La droite AB qui passe par le foyer $F(c, 0)$ a une équation de la forme $y - m(x - c) = 0$, ou $mx - y - mc = 0$, et la droite perpendiculaire CD, passant par le foyer $F'(-c, 0)$, a pour équation $x + my + c = 0$.

D'autre part, les coordonnées du pôle P de la droite AB sont données par les équations

$$\frac{\frac{x}{a^2}}{m} = \frac{\frac{y}{b^2}}{-1} = \frac{-1}{-mc},$$

d'où l'on tire $x = \frac{a^2}{c}$, $y = \frac{b^2}{mc}$; on trouve de même pour les coordonnées du pôle Q de la droite CD $x = -\frac{a^2}{c}$, $y = -\frac{b^2 m}{c}$.

L'équation de la droite PQ est alors

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \dfrac{a^2}{c} & -\dfrac{b^2}{mc} & 1 \\ -\dfrac{a^2}{c} & -\dfrac{b^2 m}{c} & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a^2 m & -b^2 & cm \\ a^2 & b^2 m & -c \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore, en développant

$$b^2 c\,(1 - m^2)x + 2a^2 c m y + a^2 b^2 (1 + m^2) = 0.$$

Comme cette équation renferme le paramètre m au deuxième degré, la droite PQ enveloppe une conique, et pour avoir l'équation de cette conique, nous ordonnons l'équation de la droite par rapport à m :

$$b^2(a^2 - cx)m^2 - 2mac^2 y + b^2(a^2 + cx) = 0,$$

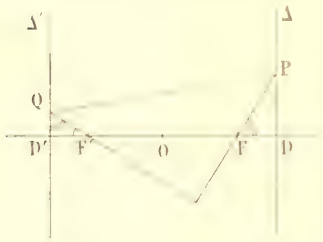
et nous écrivons que cette équation a une racine double en m.

Nous obtenons ainsi

$$a^4 c^2 y^2 - b^4(a^2 - c^2 x^2) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{x^2}{\left(\dfrac{a^2}{c}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{b^2}{c}\right)^2} - 1 = 0.$$

Cette équation représente une ellipse E′ ayant mêmes axes que l'ellipse donnée E, les demi-longueurs de ces axes étant $\dfrac{a^2}{c}$ et $\dfrac{b^2}{c}$. On voit que le grand axe de l'ellipse E′ est le segment de Ox qui est limité par les directrices de l'ellipse E.

Ce résultat peut s'établir géométriquement. En effet, puisque la droite AB passe par le foyer F, son pôle P est situé sur la directrice correspondante Δ, et la droite PF est perpendiculaire à AB. De même, le point Q est sur la directrice Δ′, relative au foyer F′ et QF′ est perpendiculaire à CD. Donc PF et QF′ sont perpendiculaires.



En conséquence, pour construire une position quelconque de PQ, on peut se donner arbitrairement le point P sur Δ, et le point Q correspondant est le point de rencontre de Δ′ avec la perpendiculaire menée à PF par le point F′.

Les deux triangles PFD et QF′D′ sont semblables et donnent

$$DP \cdot D'Q = FD \cdot F'D' = \left(\frac{b^2}{c}\right)^2.$$

On en conclut que la droite PQ enveloppe une ellipse qui a pour grand axe DD′ et dont la demi-longueur du petit axe est $\dfrac{b^2}{c}$.

2. Le lieu du point de rencontre de AB et de PQ s'obtient en éliminant m entre les deux équations

$$b^2(a^2 - cx)m^2 + 2mac^2 y + b^2(a^2 + cx) = 0, \qquad y = m(x - c);$$

il suffit pour cela de remplacer dans la première m par $\dfrac{y}{x - c}$ et on obtient

$$b^2(a^2 - cx)y^2 + 2ac^2 y^2(x - c) + b^2(a^2 + cx)(x - c)^2 = 0.$$

On reconnaît sous cette forme que le point F est un point double ; en transportant l'origine en ce point, on obtient $\quad b^2(b^2 - cx)y^2 + 2a^2 c y^2 x + b^2 x^2(a^2 + c^2 - cx) = 0,$

ou $\quad cx(b^2 x^2 - a^2 + c^2)y^2 + b^2(x^2 a^2 - c^2) + b^2 y^2 = 0.$

On voit ainsi que le lieu est une cubique symétrique par rapport à l'axe des x, admettant un point double isolé au point F et une seule direction asymptotique réelle, l'axe des y.

Pour construire cette courbe, nous résoudrons l'équation par rapport à y. Nous avons

$$y^2 = -b^2x^2 \cdot \frac{cx - a^2 + c^2}{cx(a^2 + c^2) + b^2}.$$

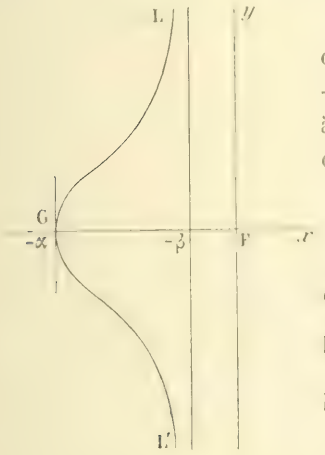
ou

$$y = \pm bx\sqrt{-\frac{cx + a^2 + c^2}{cx(a^2 + c^2) + b^2}} = \pm \frac{bx}{\sqrt{a^2 + c^2}}\sqrt{-\frac{x + \frac{a^2 + c^2}{c}}{x + \frac{b^2}{c(a^2 + c^2)}}}$$

Pour simplifier l'écriture, posons $\frac{b}{\sqrt{a^2 + c^2}} = k$, $\frac{a^2 + c^2}{c} = \alpha$, $\frac{b^2}{c(a^2 + c^2)} = \beta$, et remarquons que α est plus grand que β. Nous avons

$$y = \pm kx\sqrt{-\frac{x + \alpha}{x + \beta}}.$$

Les valeurs de y ne sont réelles que si x est compris entre $-\alpha$ et $-\beta$, et à chaque valeur de x comprise entre $-\alpha$ et $-\beta$ correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires. Nous considérerons seulement la positive



$$y = -kx\sqrt{-\frac{x + \alpha}{x + \beta}}$$

qui varie d'une manière continue de 0 à $+\infty$ lorsque x croît de $-\alpha$ à $-\beta$. On obtient ainsi la branche de courbe GL, normale en G et à l'axe des x et asymptote à la droite $x = -\beta$. Toute la courbe se compose de l'arc GL et de l'arc GL' symétrique par rapport à Ox.

L'aire comprise entre cette courbe et son asymptote est égale à l'intégrale

$$I = -2k\int_{-\alpha}^{-\beta} x\sqrt{-\frac{x + \alpha}{x + \beta}}\,dx,$$

et l'on voit immédiatement que cette intégrale a une valeur finie, puisque le facteur $x + \beta$ figure au dénominateur avec l'exposant $\frac{1}{2}$ qui est plus petit que 1.

Pour calculer cette intégrale nous posérons $\sqrt{-\frac{x + \alpha}{x + \beta}} = t$, en remarquant que lorsque x croît de $-\alpha$ à $-\beta$, t croît de 0 à $+\infty$. Nous en tirons

$$-\frac{x + \alpha}{x + \beta} = t^2, \qquad x = -\frac{\alpha - \beta t^2}{1 + t^2}, \qquad dx = \frac{2(\alpha - \beta)t\,dt}{(1 + t^2)^2}$$

et

$$I = 4k(\alpha - \beta)\int_0^{+\infty} \frac{(\alpha - \beta t^2)t}{(1 + t^2)^3}\,dt.$$

Mais on a

$$\frac{(\alpha - \beta t^2)t}{(1 + t^2)^3} = \frac{\alpha - \beta}{(1 + t^2)^2} + \frac{\beta - \alpha}{(1 + t^2)^3} = \frac{\alpha}{1 + t^2}$$

et par suite

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\alpha - \beta t^2)t}{(1 + t^2)^3} = -(\alpha - \beta)\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^2} + (\alpha - \beta)\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^3} = \alpha\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2}$$

Or, on sait calculer les intégrales qui figurent au deuxième membre, on a

$$\int \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arc\,tg} t, \qquad \int \frac{dt}{(1 + t^2)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{1 + t^2} + \operatorname{arc\,tg} t\right]$$

$$\int \frac{dt}{(1-t^2)^3} = \frac{1}{8}\left[\frac{t(5-3t^2)}{(1+t^2)^2} + 3 \operatorname{arc\,tg} t\right].$$

Les parties algébriques sont nulles pour $t = 0$ et pour $t = +\infty$, d'autre part, $[\operatorname{arc\,tg} t]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$, on en déduit

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^3} = \frac{3\pi}{16},$$

et

$$\int_0^\infty \frac{(\alpha+3t^2)t^2}{(1+t^2)} = -(\alpha-3)\frac{3\pi}{16} + (\alpha-2\beta)\frac{\pi}{4} + \beta\frac{\pi}{2} = (\alpha+3\beta)\frac{\pi}{16},$$

et par suite

$$I = \frac{k(\alpha-3\beta)(\alpha+3\beta)\pi}{4}.$$

En remplaçant k, α et β par leurs valeurs, on trouve aisément que l'aire cherchée est égale à

$$\frac{4a^2bc(b^2-c^2)\pi}{(a^2-c^2)^2\sqrt{a^2-b^2}}.$$

G. LACH, à Rodez.

Bonnes solutions par MM. R. Dontot, G. Gay, lycée Saint-Louis, G. Fouché, à Rennes, Nantes; A. Rousseau; J. Soubaigné, à Mont-de-Marsan; Georges Guillaume, à Aire-sur-l'Adour.

QUESTIONS PROPOSÉES

1919. — On considère trois axes de coordonnées rectangulaires, ox, oy et oz, et sur ox un vecteur égal à $+1$. Soit MV le moment linéaire de ce vecteur par rapport à un point quelconque de l'espace, M.

1° On prend le symétrique MF du vecteur MV par rapport à un plan parallèle au plan des yz et mené par le point M. Ce vecteur MF représente l'intensité d'un champ de forces au point M. Trouver les surfaces de niveau, les lignes de force du champ et le potentiel d'un point de masse 1, qui serait à la cote 100 sur oz.

2° On suppose que le point M décrive un cercle de rayon 1 qui a son centre sur ox et qui est situé dans le plan $x = 1$. Trouver le lieu du point V et la surface engendrée par la droite MV. Construire la trace de cette surface sur le plan des yz.

3° Trouver le plan tangent en un point quelconque de la génératrice variable MV, le plan asymptote et le plan central. Donner l'équation tangentielle de la surface et les équations de sa ligne de striction.

E. H.

1920. — Un barreau aimanté horizontal, long et mince, est suspendu par son milieu à un fil de torsion. Placé d'abord dans un champ magnétique négligeable et écarté de sa position d'équilibre, il fait $p = 150$ oscillations en 5 minutes. On produit ensuite un champ horizontal H, parallèle à sa position d'équilibre, il fait alors $p' = 430{,}5$ oscillations en 5 minutes. Le même barreau, placé verticalement et suspendu par un axe horizontal passant par une de ses extrémités, exécute, sous l'action de son poids, $q = 800$ oscillations en 5 minutes. On produit un champ égal au précédent, mais vertical. Combien le barreau fera-t-il d'oscillations en 5 minutes ?

N. B. — Les données numériques se rapportent à un barreau qui aurait les caractéristiques suivantes : longueur 21^{cm} ; section, $0^{cm^2},1$; poids 16^g. Masse magnétique de chaque pôle, 58 unités C. G. S. Coefficient du couple de torsion du fil, 1450. Champ H, 10 gauss.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

21e Année. Janvier 1911. N° 4.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$

par M. **R. Dontot**, à Valenciennes.

Considérons d'abord l'équation du troisième degré

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

dont les racines sont A, B, C, et prenons trois déterminations des radicaux $\sqrt{BC}$, $\sqrt{CA}$, $\sqrt{AB}$ dont le produit soit égal à ABC, c'est-à-dire à $-r$; puis, formons l'équation qui admet pour racines

$$\alpha = -\sqrt{AB} - \sqrt{BC} - \sqrt{CA}, \qquad \beta = -\sqrt{AB} + \sqrt{BC} + \sqrt{CA},$$
$$\gamma = \sqrt{AB} - \sqrt{BC} + \sqrt{CA}, \qquad \delta = \sqrt{AB} + \sqrt{BC} - \sqrt{CA}.$$

Cette équation est évidemment $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) = 0$, ou

$$[(x+\sqrt{AB})^2 - (\sqrt{BC} + \sqrt{AC})^2][(x-\sqrt{AB})^2 - (\sqrt{BC} - \sqrt{AC})^2] = 0,$$

ou encore

$$(x^2 + AB - BC - AC + 2x\sqrt{AB} - 2\sqrt{ABC})^2(x^2 + AB - BC - AC - 2x\sqrt{AB} + 2\sqrt{ABC})^2 = 0.$$

Cette équation s'écrit alors ainsi $(x^2 + AB - BC - AC)^2 - 4x\sqrt{AB} - \sqrt{ABC})^2 = 0$, et devient finalement, puisque le produit des trois radicaux est égal à ABC,

$$x^4 - 2x^2(AB + BC + AC) + 8x.ABC + A^2B^2 + B^2C^2 + A^2C^2 - 2ABC(A + B + C) = 0.$$

L'équation cherchée est donc $x^4 - 2qx^2 - 8rx + q^2 - 4rp = 0$.

C'est ce résultat qui va nous servir à résoudre l'équation du quatrième degré.

On sait que toute équation du quatrième degré peut se ramener par une transformation élémentaire à la forme

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Nous pouvons alors résoudre facilement cette équation en l'identifiant avec la précédente, ce qui donne $q = -\frac{a}{2}$, $r = -\frac{b}{8}$, $q^2 - 4rp = c$, puis $p = -\left(\frac{a^2}{4} - c\right)\frac{2}{b}$.

La résolvante du troisième degré est donc $x^3 + \frac{4c - a^2}{2b}x^2 - \frac{ax}{2}x - \frac{b}{8} = 0$.

Appelons A, B, C ses trois racines et représentons par $\sqrt{AB}$, $\sqrt{AC}$, $\sqrt{BC}$ trois déterminations des radicaux dont le produit soit égal à ABC, ou à $\frac{b}{8}$; les quatre racines α, β, γ, δ de l'équation donnée seront alors fournies par les sommes algébriques

$$\alpha = -\sqrt{AB} - \sqrt{BC} - \sqrt{AC}, \qquad \beta = -\sqrt{AB} - \sqrt{BC} + \sqrt{AC},$$
$$\gamma = \sqrt{AB} - \sqrt{BC} + \sqrt{AC}, \qquad \delta = \sqrt{AB} + \sqrt{BC} - \sqrt{AC}.$$

Discussion. — Rien n'est plus facile alors que de voir ce qui se passe pour l'équation du quatrième degré. Il suffit d'étudier tous les cas que présente l'équation du troisième degré.

Celle-ci nous donne deux cas principaux : elle a ses trois racines réelles ou deux imaginaires. Je

premier cas se subdivise en deux autres, suivant que les trois racines ont le même signe ou des signes différents.

1er CAS. — Supposons d'abord les trois racines réelles et de même signe. Alors les quatre racines de l'équation proposée sont réelles et distinctes ; réelles, cela est évident ; distinctes, cela découle de ce que $\alpha - \beta = 0$ donne $\sqrt{BC} = -\sqrt{AC}$, et, comme $\sqrt{AB}\sqrt{BC}\sqrt{AC} = ABC$, ceci conduit à $\sqrt{AB} = -B$, ou $AB = B^2$, $A = B$

Or, nous ne supposons pas que l'équation cubique ait une racine double.

2e CAS. — Les trois racines de l'équation cubique sont réelles, une est positive et deux sont négatives, par exemple. Supposons $A > 0$, $B < 0$, $C < 0$; alors $\sqrt{BC}$ est réel, $\sqrt{AB}$ et $\sqrt{AC}$ sont des imaginaires pures. Les quatre racines de l'équation proposée sont imaginaires conjuguées deux à deux.

3e CAS. — Supposons enfin A réel et B, C imaginaires conjugués. Alors $\sqrt{BC}$ est réel, $\sqrt{AB}$ et $\sqrt{AC}$ sont imaginaires conjugués si on veut : il suffit de choisir le signe de $\sqrt{BC}$ de façon que le produit

$$\sqrt{AB}.\sqrt{AC}.\sqrt{BC} = \frac{b}{8}.$$

Des quatre nombres α, β, γ, δ deux sont réels, α et γ ; et deux sont imaginaires, β et δ.

4e CAS. — L'équation cubique a une racine double, $A = B$. Alors on peut supposer $\sqrt{AC} = \sqrt{BC}$, et l'on voit de suite que l'équation proposée a une racine double, $\gamma = \delta$, et deux racines simples, α et β.

Si l'équation cubique a une racine triple, on voit de suite que l'équation proposée a aussi une racine triple.

Tous les cas ayant été étudiés, les réciproques sont vraies, et l'on peut énoncer les deux théorèmes suivants :

1° *Si la résolvante a ses racines distinctes, il en est de même de l'équation proposée. Si elle a une racine double ou triple, la proposée a aussi une racine double ou triple. Les réciproques sont vraies.*

REMARQUES. — Quand la résolvante a une racine double, $A = B$, nous avons vu qu'on peut prendre $\sqrt{AC} = \sqrt{BC}$, et, comme $\sqrt{AB}.\sqrt{BC}.\sqrt{AC} = ABC$, on voit que $\sqrt{AB}.BC = ABC$; donc $\sqrt{AB} = \sqrt{A^2} = A$

La racine double de l'équation du quatrième degré, $\gamma = \delta$, est égale aussi à $\sqrt{AB}$, c'est-à-dire à la racine double de la résolvante A.

Quand l'équation du quatrième degré a une racine quadruple, $\alpha = \beta = \gamma = \delta$, il faut regarder celle-ci comme étant triple et les trois racines de la résolvante sont égales, $A = B = C$. Alors on peut prendre $\sqrt{BC} = A$, $\sqrt{AC} = B$, $\sqrt{AB} = C$, et on a $\alpha = -3A$, $\beta = \gamma = \delta = A$. Il faut donc que A soit nul, et l'on retrouve ce résultat évident à priori que l'équation

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

ne peut avoir de racine quadruple que si a, b, c sont nuls.

2° *Si la résolvante a ses trois racines réelles et distinctes, la proposée a ses quatre racines réelles et distinctes ou toutes imaginaires suivant que celles de la résolvante sont de même signe ou non. Si la résolvante a deux racines imaginaires, la proposée a aussi deux racines imaginaires.*

Pour achever la discussion, il faut former des fonctions des coefficients a, b, c dont les signes donnent les divers cas. Désignons à cet effet par Δ le discriminant de l'équation cubique, c'est-à-dire le résultant des deux équations

$$3x^2 + \frac{4c - a^2}{2b}\cdot 2x - \frac{a}{2} = 0, \qquad \frac{4c - a^2}{2b}x^2 - ax - \frac{3b}{8} = 0,$$

nous aurons $$\Delta = \left[\frac{a(4c - a^2)}{4b} - \frac{9b}{8}\right]^2 - \left[3a + \frac{(4c - a^2)^2}{2b^2}\right]\left[\frac{3(4c - a^2)}{16} + \frac{a^2}{2}\right].$$

En multipliant par $64b^2$, qui est positif, nous pouvons prendre pour Δ la valeur suivante :

$$\Delta = [2a(4c - a^2 - 9b^2)]^2 - 256ab^2 + (4c - a^2)^2 \cdot (12c + 3a^2).$$

La discussion peut alors se résumer dans le tableau suivant :

$\Delta \neq 0$, 4 racines simples ;

$\Delta = 0$, 1 racine multiple ;

$\Delta < 0$, $a < 0$, $4c - a^2 < 0$, 4 racines simples et réelles ;

$\Delta < 0$, sans que les deux autres inégalités aient lieu, 4 racines simples imaginaires ;

Enfin $\Delta > 0$, 2 racines réelles et 2 imaginaires.

CONCOURS D'ADMISSION DES AGENTS DES POSTES AUX COURS DE L'UNIVERSITÉ

Concours de 1910.

1862. — *Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on considère la courbe* $x^2 - y^2 - 1 = 0$ *située dans le plan des* xy. *Par chaque point* P *de la branche comprise dans l'angle* xOy, *on mène parallèlement à* Oz *et dans le sens* Oz, *un vecteur* PM *égal à l'aire* S *limitée par la courbe et par les droites* Ox *et* OP. *Le lieu de* M *est une courbe* C.

1° *Exprimer les coordonnées de* P *au moyen des fonctions hyperboliques de* S.

2° *Former les équations du plan normal et du plan osculateur au point* M *de la courbe* C. *Ce dernier plan coupe* Oz *en un point* Q. *Déterminer la surface engendrée par la droite* QM.

3° *Calculer le rayon de courbure de la courbe* C *en fonction de l'abscisse.*

4° *Construire la projection* C_1 *de la courbe* C *sur le plan* xOz, *et évaluer l'aire comprise entre* Ox, *la courbe* C_1 *et la parallèle à* Oz *qui coupe* C_1 *en un point dont la cote* z *est* $\frac{1}{2}$. *Calculer cette aire au moyen d'une série avec trois chiffres décimaux exacts et justifier de l'approximation obtenue.*

On peut exprimer les coordonnées du point P en fonction d'un paramètre φ au moyen des formules

$$x = \operatorname{ch}\varphi, \qquad y = \operatorname{sh}\varphi,$$

et l'aire considérée S a pour expression

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} d\varphi,$$

ou

$$S = \frac{1}{2}\varphi, \qquad \varphi = 2S.$$

1. Les coordonnées du point P sont donc $x = \operatorname{ch} 2S$, $y = \operatorname{sh} 2S$,

et celles du point M $x = \operatorname{ch} 2S$, $y = \operatorname{sh} 2S$, $z = S$.

2. Ces relations sont les équations paramétriques de la courbe C.

Le plan normal à cette courbe au point (x, y, z) a pour équation

$$(X - x)x' + (Y - y)y' + (Z - z)z' = 0,$$

x', y', z' désignant les dérivées de x, y, z par rapport à S. On a

$$x' = 2\operatorname{sh} 2S, \qquad y' = 2\operatorname{ch} 2S, \qquad z' = 1,$$

par suite l'équation du plan normal peut s'écrire

$$(X - \operatorname{ch} 2S)2\operatorname{sh} 2S + (Y - \operatorname{sh} 2S)2\operatorname{ch} 2S + Z - S = 0,$$

ou

$$2X\operatorname{sh} 2S + 2Y\operatorname{ch} 2S + Z - 2\operatorname{sh} 4S - S = 0.$$

D'autre part, l'équation du plan osculateur est

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0.$$

où l'on pose $A = y'z'' - z'y''$, $B = z'x'' - x'z''$, $C = x'y'' - y'x''$.

Comme on a $x' = 4\,\mathrm{ch}\,2S$, $y' = 4\,\mathrm{sh}\,2S$, $z' = 0$,

on en déduit $A = -4\,\mathrm{sh}\,2S$, $B = 4\,\mathrm{ch}\,2S$, $C = 8(\mathrm{sh}^2 2S - \mathrm{ch}^2 2S) = -8$.

L'équation du plan osculateur s'écrit alors

$$-(X - \mathrm{ch}\,2S)\,\mathrm{sh}\,2S + (Y - \mathrm{sh}\,2S)\,\mathrm{ch}\,2S - 2(Z - S) = 0,$$

ou

$$X\,\mathrm{sh}\,2S - Y\,\mathrm{ch}\,2S + 2Z - 2S = 0.$$

Le point Q où ce plan rencontre l'axe des z a pour cote S ; c'est précisément la cote du point M. Donc la droite QM est parallèle au plan des xy, et comme elle rencontre Oz, elle engendre un conoïde qui s'appuie sur la courbe C.

Les équations de la droite QM étant

$$z = S, \qquad \frac{y}{x} = \frac{\mathrm{sh}\,2S}{\mathrm{ch}\,2S} = \mathrm{th}\,2S,$$

l'équation de la surface engendrée par cette droite est

$$y = x\,\mathrm{th}\,2z.$$

3. Soit ρ le rayon de courbure au point M ; on a

$$\rho^2 = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}.$$

Remplaçons x', y', z', A, B, C par les valeurs obtenues antérieurement, nous obtenons

$$\rho^2 = \frac{(4\,\mathrm{ch}^2 2S + \mathrm{sh}^2 2S - 1)^3}{16(\mathrm{ch}^2 2S + \mathrm{sh}^2 2S - 4)^2}.$$

Or $\mathrm{ch}^2 2S = x^2$, $\mathrm{sh}^2 2S = \mathrm{th}^2 2S - 1 = t^2 - 1$,

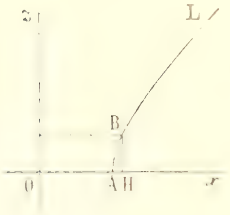
donc

$$\rho = \frac{(8x^2 - 3)^3}{16(2x^2 + 3)^2}.$$

4. L'équation de la courbe C_1 est

$$x = \mathrm{ch}\,2z.$$

D'après la définition de la courbe C on ne peut donner à z que des valeurs positives, et lorsque z croît de 0 à $+\infty$, x croît de 1 à $+\infty$: nous en déduisons l'arc de courbe AL. Le point A a pour abscisse 1, et la tangente en ce point est parallèle à Oz, puisque $\frac{dx}{dz}$ ou $2\,\mathrm{sh}\,2z$ est nul pour $z = 0$.



D'autre part, quand z augmente indéfiniment $\frac{x}{z}$ augmente aussi indéfiniment, car on peut écrire

$$\frac{x}{z} = \frac{\mathrm{ch}\,2z}{z} = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2z}}{z} + \frac{e^{-2z}}{z}\right],$$

par suite la branche infinie de courbe est parabolique dans la direction Ox.

Soit B le point de la courbe dont la cote est $\frac{1}{2}$; menons BH perpendiculaire à Ox, il faut calculer l'aire ABH.

Cette aire est égale à $\int_A^H z\,dx$, ou, en remplaçant dx par $2\,\mathrm{sh}\,2z\,dz$, à

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} z\,\mathrm{sh}\,2z\,dz.$$

Intégrons par parties, nous avons

$$\int z\,\mathrm{sh}\,2z\,dz = z\,\frac{\mathrm{ch}\,2z}{2} - \int \frac{\mathrm{ch}\,2z}{2}\,dz = z\,\frac{\mathrm{ch}\,2z}{2} - \frac{\mathrm{sh}\,2z}{4},$$

et par suite

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} z\,\mathrm{sh}\,2z\,dz = 2\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,1}{2} - \frac{\mathrm{sh}\,1}{4}\right] = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\,1 - \mathrm{sh}\,1\right) = \frac{e^{-1}}{2}.$$

L'aire cherchée est donc égale à $\frac{e^{-1}}{2}$ ou à $\frac{1}{2e}$. Calculons d'abord $\frac{1}{e}$. Nous avons

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots$$

le second membre est une série alternée. L'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque est moindre que ce terme en valeur absolue et a même signe que ce terme.

Comme on a $\frac{1}{8!} = 0.000024\ldots$ on a $\frac{1}{8!} < \frac{3}{10^5}$ et on peut écrire

$$\frac{1}{e} = A + \varepsilon_1,$$

en posant $A = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!}$ et $0 < \varepsilon_1 < \frac{3}{10^5}$.

Calculons les différents termes de A à $\frac{1}{10^5}$ près, les termes positifs par défaut et les termes négatifs par excès.

Nous obtenons

$$\frac{1}{2!} = 0.5 \qquad \frac{1}{3!} = 0.16667 - \varepsilon_2$$

$$\frac{1}{4!} = 0,04166 + \varepsilon_3 \qquad \frac{1}{5!} = 0.00834 + \varepsilon_4$$

$$\frac{1}{6!} = 0.00138 - \varepsilon_5 \qquad \frac{1}{7!} = 0.00020 - \varepsilon_6$$

$$0,54304 + \varepsilon_3 + \varepsilon_5 \qquad 0.17521 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_6$$

$\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ étant positifs et moindres que $\frac{1}{10^5}$.

On en déduit $\qquad A = 0.54304 - 0,17521 + \varepsilon_7, \qquad 0 < \varepsilon_7 < \frac{5}{10^5}$.

et $\qquad \frac{1}{e} = A + \varepsilon_1 = 0.36783 + \varepsilon_8, \qquad 0 < \varepsilon_8 < \frac{8}{10^5}$.

Donc $\frac{1}{e}$ est compris entre 0,36783 et 0,36791, et par suite $\frac{1}{2e}$ entre 0,183915 et 0,183955.

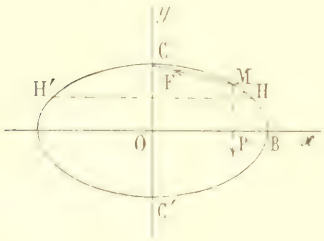
L'aire demandée est donc égale à 0,1839
avec quatre chiffres décimaux exacts.

J. SOUBAIGNÉ, à Mont-de-Marsan.

Bonnes solutions par MM. Ambrard, à Rennes ; H. F., à Lyon ; G. Lyon, à Rodez ; L. Monnier, à Orléans ; Paul Rousseau, à Bar-le-Duc ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppe.

1863. — *Dans un plan vertical se trouve une ellipse dont les demi-axes sont égaux à 1 et 2 m.; le dernier étant horizontal. Sur cette courbe peut se mouvoir sans frottement un point M pesant, soumis à une force attractive F qui émane du point C, sommet le plus élevé de l'ellipse. La force F est proportionnelle à la distance CM, et serait égale à la moitié du poids du point M si celui-ci était placé au centre de la courbe. Trouver les positions d'équilibre du point M, et, pour chacune d'elles, déterminer la nature de la courbe.*

Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que la résultante de la force F et du poids P soit normale à l'ellipse au point M.



Cette condition est évidemment remplie quand le point M est en C ou en C′; nous allons chercher s'il y a d'autres positions d'équilibre.

La force F, qui est proportionnelle à la distance CM, est égale à $\frac{P}{2}$ quand le point M est en O, c'est-à-dire à l'unité de distance du centre attractif, on a donc $F = \frac{P}{2}.CM$.

Soient x, y les coordonnées du point M et r la distance CM. Les cosinus directeurs de la demi-droite MC sont $\frac{-x}{r}$ et $\frac{1-y}{r}$; donc les projections de la force F sur les axes sont

$$X_1 = \frac{P}{2} r . \frac{-x}{r} = -\frac{Px}{2}; \qquad Y_1 = \frac{P}{2} r \frac{1-y}{r} = \frac{P(1-y)}{2}.$$

Celles du poids P sont

$$X_2 = 0, \qquad Y_2 = -P.$$

Donc les projections de la résultante ont pour valeurs

$$X = X_1 + X_2 = -\frac{Px}{2}, \qquad Y = Y_1 + Y_2 = -\frac{P(1+y)}{2}.$$

L'équation de l'ellipse étant $f(x, y) = \frac{x^2}{3} + y^2 - 1 = 0$, la pente de la normale au point (x, y) est égale à $\frac{f'_y}{f'_x}$, ou $\frac{3y}{x}$. Pour que la résultante soit normale il faut qu'on ait

$$\frac{Y}{X} = \frac{3y}{x}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1-y}{x} = \frac{3y}{x};$$

et comme nous supposons $x = 0$, nous en tirons $y = \frac{1}{2}$.

On obtient ainsi deux positions d'équilibres H et H′, symétriques par rapport à Oy. Les coordonnées du point H sont $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2}$; celles du point H′, $-\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

La réaction R en l'un de ces points est égale en valeur absolue à la résultante $\sqrt{X^2 + Y^2}$. On a donc

$$R^2 = X^2 + Y^2 = \frac{P^2}{4}(x^2 + (1-y)^2),$$

ou, en remplaçant x^2 par $\frac{9}{4}$ et y par $\frac{1}{2}$,

$$R^2 = \frac{9P^2}{8}; \qquad R = \frac{3P\sqrt{2}}{4}.$$

On verra facilement qu'aux autres positions d'équilibre C et C′ la réaction est égale à P et à zéro.

Paul RÉMONDIN, à Bar-le-Duc.

Bonnes solutions par MM. Ambrard; G. Deperrois, à Chartres; G. Lach, à Rodez; Nevillans; R. Manen, à Albi; L. Montault, à Oran; A. Rousseau, à Fournes; J. Souhaigné, à Mont-de-Marsan.

1864. — *On a un mélange de chlorure de sodium et de chlorhydrate d'ammoniaque. On en prend* 1g,350 *que l'on met dans un petit ballon et l'on ajoute un excès de soude caustique. Ce ballon est relié à un vase approprié contenant* 10 *centimètres cubes d'acide sulfurique titré à* 49g *par litre. On chauffe le ballon pen-*

dant un temps suffisant pour que tout l'ammoniac se dégage ; ce gaz est retenu par l'acide sulfurique.

Une fois l'opération terminée, on constate que l'acide n'a pas été entièrement neutralisé ; pour le neutraliser complètement, il faut lui ajouter $3^{cm^3},7$ *d'une liqueur alcaline.*

Sachant que $25^{cm^3},5$ *de cette même liqueur neutralisent* 10^{cm^3} *de l'acide sulfurique titré à* 49^g *par litre, on demande quelle est la quantité de chlorhydrate d'ammoniaque qui se trouve dans* 100^g *du mélange des deux chlorures.*

$$H = 1, \quad Az = 14, \quad O = 16, \quad S = 32, \quad Cl = 35,5.$$

L'ammoniac qui s'est dégagé dans la réaction

$$AzH^4Cl + NaOH = AzH^3 + NaCl + H^2O$$

a neutralisé une certaine quantité d'acide sulfurique et, pour achever cette neutralisation, il faut 3,7 de liqueur alcaline, alors qu'il en faudrait 25,5 sans ammoniac. L'ammoniac a donc produit le même effet que $25,5 - 3,7 = 21,8$ de liqueur alcaline.

Or 25,5 de liqueur alcaline neutralisent 10 de liqueur sulfurique ; 21,8 en neutraliseraient $\frac{10 \times 21,8}{25,5}$ et, comme chaque centimètre cube de liqueur sulfurique contient $\frac{1}{2000}$ de molécule d'acide, l'ammoniac a neutralisé

$$\frac{10 \times 21,8}{25,5} \times \frac{1}{2000} \text{ molécules d'acide sulfurique.}$$

Mais la réaction $SO^4H^2 + 2AzH^3 = SO^4(AzH^4)^2$ montre qu'à une molécule d'acide correspondent deux molécules d'ammoniaque et, par conséquent, deux molécules de chlorhydrate d'ammoniaque. Le nombre des molécules de chlorhydrate est donc $\frac{218}{25500}$. Le poids moléculaire du chlorhydrate d'ammoniaque étant 53, 5, le poids de chlorhydrate employé est $\frac{218 \times 53,5}{25500}$ et le poids contenu dans 100^g du mélange primitif est

$$\frac{218 \times 53,5}{25500} \times \frac{100}{1,35} = 33^g,88.$$

NEVEJANS.

Bonnes solutions de MM. G. Lach ; R. Manen ; L. Montalt ; J. Neubauer.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1850. — *On considère deux axes rectangulaires, Ox et Oy, et un point M, dont les coordonnées sont x, y ou ω, φ. On abaisse de ce point les perpendiculaires MP, MQ sur Ox et Oy ; puis PR, QS sur OM ; par les points R et S, on mène des parallèles aux axes, qui se coupent en μ, μ'.*

1° *Étudier, pour chaque point μ, μ', la transformation ainsi définie, en coordonnées polaires et en coordonnées rectangulaires.*

2° *Quels sont les lieux de ces points quand M décrit une droite, un cercle concentrique à l'origine, un cercle ayant son centre sur Ox et passant en O, etc.*

Soient φ et ω les coordonnées polaires du point M (x, y). X et Y les coordonnées du point μ obtenu en menant par R la parallèle à Ox et par S la parallèle à Oy ; soient enfin X_1 et Y_1 les coordonnées du point μ' obtenu en menant par R la parallèle à Oy et par S la parallèle à Ox.

On a $X = OS\cos\omega$, $Y = OR\sin\omega$, $X_1 = OR\cos\omega$, $Y_1 = OS\sin\omega$.

Mais $OS = OQ\sin\omega = \rho\sin^2\omega$ et $OR = OP\cos\omega = \rho\cos^2\omega$.

Donc on a $\mu \begin{cases} X = \rho\sin^2\omega\cos\omega, \\ Y = \rho\cos^2\omega\sin\omega; \end{cases}$ $\mu' \begin{cases} X_1 = \rho\cos^2\omega, \\ Y_1 = \rho\sin^2\omega, \end{cases}$

équations donnant les lieux des points μ et μ' lorsque M décrit la courbe $\rho = f(\omega)$.

Pour le point μ on a $X^2 + Y^2 = \rho^2\sin^2\omega\cos^2\omega$. Donc le ρ de μ est égal à $\frac{1}{2}\rho\sin 2\omega$. On voit alors que $\frac{X}{Y} = \operatorname{tg}\omega$, donc le ω de μ est le complément de celui de M ; par conséquent si M décrit la courbe $\rho = f(\omega)$, μ décrira la courbe $\rho = \frac{1}{2}\sin 2\omega\, f\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$.

On peut encore définir la transformation par les équations

$$\mu \begin{cases} X = \dfrac{xy^2}{x^2 - y^2}, \\ Y = \dfrac{x^2y}{x^2 - y^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \mu' \begin{cases} X = \dfrac{x}{x^2 - y^2}, \\ Y = \dfrac{y}{x^2 - y^2}. \end{cases}$$

Dans la suite nous considérerons surtout le point μ pour lequel les formules de transformation inverse s'obtiennent simplement : on a $\frac{Y}{X} = \frac{x}{y}$, d'où $y = x\frac{X}{Y}$. Portons dans X :

$$X = \frac{x^2X^2}{x^2(Y^2 + X^2)}, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{X^2 + Y^2}{X}, \qquad y = \frac{X^2 + Y^2}{Y}.$$

Soit $f(x, y) = 0$ le lieu de M, le lieu de μ sera $f[Y(X^2 + Y^2), X(X^2 + Y^2), XY] = 0$.

Cette équation montre que si $f(x,y)$ est d'ordre m, le lieu de μ sera en général d'ordre $3m$, passera $2m$ fois à l'origine où les tangentes seront les axes et m fois aux points cycliques.

1° M décrit une *droite* quelconque, μ décrira une cubique circulaire ayant à l'origine un point double à tangentes rectangulaires, donc une strophoïde.

En effet, soit $ax + by + c = 0$ le lieu de M, celui de μ sera $(ay + bx)(x^2 + y^2) + cxy = 0$; c'est bien une *strophoïde*.

Si la droite passe à l'origine, $c = 0$, il reste la *droite* $ay + bx = 0$, symétrique de la première par rapport à la première bissectrice.

Si la droite est parallèle à l'un des axes, $a = 0$, le lieu est alors $x^2 + y^2 - cx = 0$, *cercle* décrit sur OP comme diamètre.

2° Si M décrit un cercle quelconque $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, le lieu de μ est la *sextique*

$$x^2 + y^2)^3 - 2(ay + bx)(x^2 + y^2) + (c - a^2 - b^2)xy + cx^2y^2 = 0,$$

qui a un point quadruple à l'origine avec les axes pour tangentes.

Si le cercle passe à l'origine, $c = 0$, il reste $(x^2 + y^2)^2 - 2(ay + bx)(x^2 + y^2) + xy = 0$. Nous verrons que c'est une podaire d'hypocycloïde à trois rebroussements.

Si le cercle a son centre à l'origine, le lieu devient

$(x^2 + y^2)^3 + cx^2y^2 = 0$, $c = -R^2$; on a $(x^2 + y^2)^3 - R^2x^2y^2 = 0$, ou $\rho = \frac{1}{2}R\sin 2\omega$ c'est la *rosace à quatre branches*.

3° Si le point M décrit une kreuzcurve $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{a}$, le lieu de μ est

$$\frac{1}{y^2(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{x^2(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{a^2x^2y^2} \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 = a,$$ *cercle* de définition de la kreuzcurve.

Si le point M décrit une *parabole* passant en O et dont la direction de l'axe est un des axes de coordonnées, soit $y^2 - 2ax - 2by = 0$, le lieu de μ devient $x^2(x^2 + y^2) - 2(ay + bx)xy = 0$, qui se

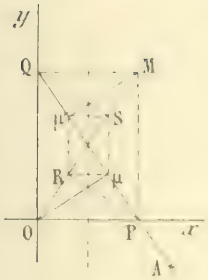
décompose en l'axe $Oy : x = 0$ et la cubique $x(x^2 + y^2) - 2(ay - bx)y = 0$, cubique ayant un point double à l'origine ; nous verrons que c'est une podaire de parabole.

Si la parabole a son sommet en O, $y^2 - 2ax = 0$, il vient $x = 0$ et $x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0$; c'est une *cissoïde droite*.

Si le point M décrit une hyperbole équilatère, il y a deux cas intéressants : les asymptotes sont les axes ; on a $xy = a^2$; le lieu de μ devient $xy(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2y^2$ qui se décompose en les axes $x = 0$, $y = 0$ et la *lemniscate* $(x^2 + y^2)^2 - a^2xy = 0$.

Si l'hyperbole passe à l'origine : $xy - ax - by = 0$, le lieu de μ devient $xy(x^2 + y^2)^2 - (ay + bx)(x^2 + y^2)xy = 0$ ou $x = 0$, $y = 0$ et $x^2 + y^2 - ay - bx = 0$, c'est-à-dire les axes et le *cercle* décrit sur la droite joignant l'origine au centre de l'hyperbole comme diamètre.

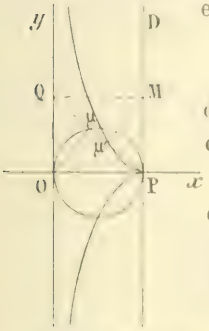
Solution géométrique. — La symétrie de la figure par rapport à la parallèle à Oy menée par le milieu de OM montre que les deux points μ et μ' sont les pieds des perpendiculaires abaissées de O et M sur la droite PQ. Le lieu μ est en particulier la podaire de l'enveloppe de PQ par rapport à l'origine. Supposons que M décrive une courbe d'ordre m ; cherchons combien de droites PQ passent en un point A quelconque du plan ; les droites issues de A décrivent sur les axes deux séries homographiques P et Q ; les droites PM et QM décrivent donc deux faisceaux homographiques ; le lieu du point M est donc une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont les parallèles à Ox et Oy menées par A. Cette hyperbole coupe le lieu de M en $2m$ points auxquels correspondent $2m$ droites PQ passant en A. L'enveloppe de PQ est donc de classe $2m$. Mais si M va à l'infini, la droite PQ va en général à l'infini ; le lieu de M étant d'ordre m, la droite de l'infini est tangente multiple d'ordre m ; pour avoir l'ordre de la podaire par rapport à O, je coupe par une droite Δ passant en O ; les points qui sont sur cette droite sont donnés par les tangentes à l'enveloppe de PQ issues du point à l'infini sur la direction perpendiculaire à Δ ; il y en a $2m$ dont m sont rejetés à l'infini et ne comptent pas ; en outre $2m$ droites PQ passent en O ; O est un point multiple d'ordre $2m$ du lieu de μ qui sera d'ordre $3m$.



Si M décrit une droite, PQ enveloppe une parabole tangente aux axes et dont la directrice passe en O ; le lieu de μ est une *strophoïde* tangente aux axes en O.

Si la droite passe en O, le lieu de μ est aussi une droite ; le lieu de μ' aussi.

Si la droite est parallèle à un axe, soit à Oy, P est fixe, μ décrit le cercle de diamètre OP ; en outre $Q\mu = P\mu$; μ décrit la *cissoïde droite* de l'axe Oy et du cercle OP.

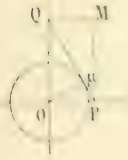


Si M décrit un cercle de centre O, PQ enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements ; on voit alors que μ' décrit cette hypocycloïde, car M est le centre instantané de rotation, et μ décrit la podaire, la *rosace à quatre branches*.

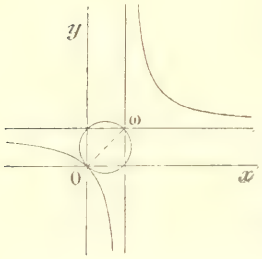
Si M décrit un cercle passant en O, les droites PQ sont les droites de Simson du triangle OAB ; elles enveloppent une hypocycloïde à trois rebroussements ; le lieu de μ sera la *podaire de cette hypocycloïde* par rapport à O.

Si M décrit une kreuzcurve, le lieu de μ est évidemment le cercle de définition de la courbe.

Si M décrit une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes Ox et Oy, l'enveloppe de PQ est évidemment l'homothétique du lieu de M dans le rapport $\frac{1}{2}$; donc une hyperbole équilatère de centre O ; la podaire par rapport à O est évidemment une quartique bicirculaire tangente aux axes en O, donc une *lemniscate*.



Si M décrit une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes et passant en O, l'hyperbole équilatère relative à un point A et servant à déterminer les droites PQ passant en ce point coupe le lieu de M en deux points à l'infini sur les axes, un en O et un seul autre point.



Donc l'enveloppe de PQ comprend les points à l'infini sur Ox et Oy, le point O et un autre point ; en prenant M à l'infini, les droites PQ sont les asymptotes : le point cherché est le centre ω du lieu de M.

Donc le lieu de μ est composé de Ox, Oy et du cercle décrit sur $O\omega$ comme diamètre.

On peut considérer le cas où M décrit une parabole dont l'axe est parallèle à Ox ou Oy, soit à Ox, et passant en O ; l'hyperbole relative à un point A coupe la parabole en un point O, en un point à l'infini sur Ox et deux autres points ; on voit que l'enveloppe de PQ comprend le point O, le point à l'infini sur Ox et une conique qui est évidemment une parabole. Le lieu de μ est donc une *podaire* de parabole, le point O et l'axe Oy.

Si le point O est sommet de la parabole, on aura une *cissoïde droite* comme lieu de μ.

J. LE MENS.

Très bonne solution de M. Soubaigné.
Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Rodez ; L. Simon, à Fourmies ; Névejans ; A. Rousseau.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1869. — *Un tétraèdre régulier* ABCD *a trois sommets* A, B, C *dans le plan horizontal de projection et le quatrième sommet* D *au-dessus du plan horizontal.*

Soient (S) *la sphère circonscrite au tétraèdre et* (P) *le paraboloïde hyperbolique qui passe par les côtés du quadrilatère gauche* ABCDA. (P) *partage le volume limité par* (S) *en deux volumes dont l'un contient le milieu de l'arête* BD *du tétraèdre. On représentera, en projection horizontale seulement, ce dernier volume supposé limité au plan horizontal de projection et à un autre plan horizontal situé à un centimètre au-dessous du point* D.

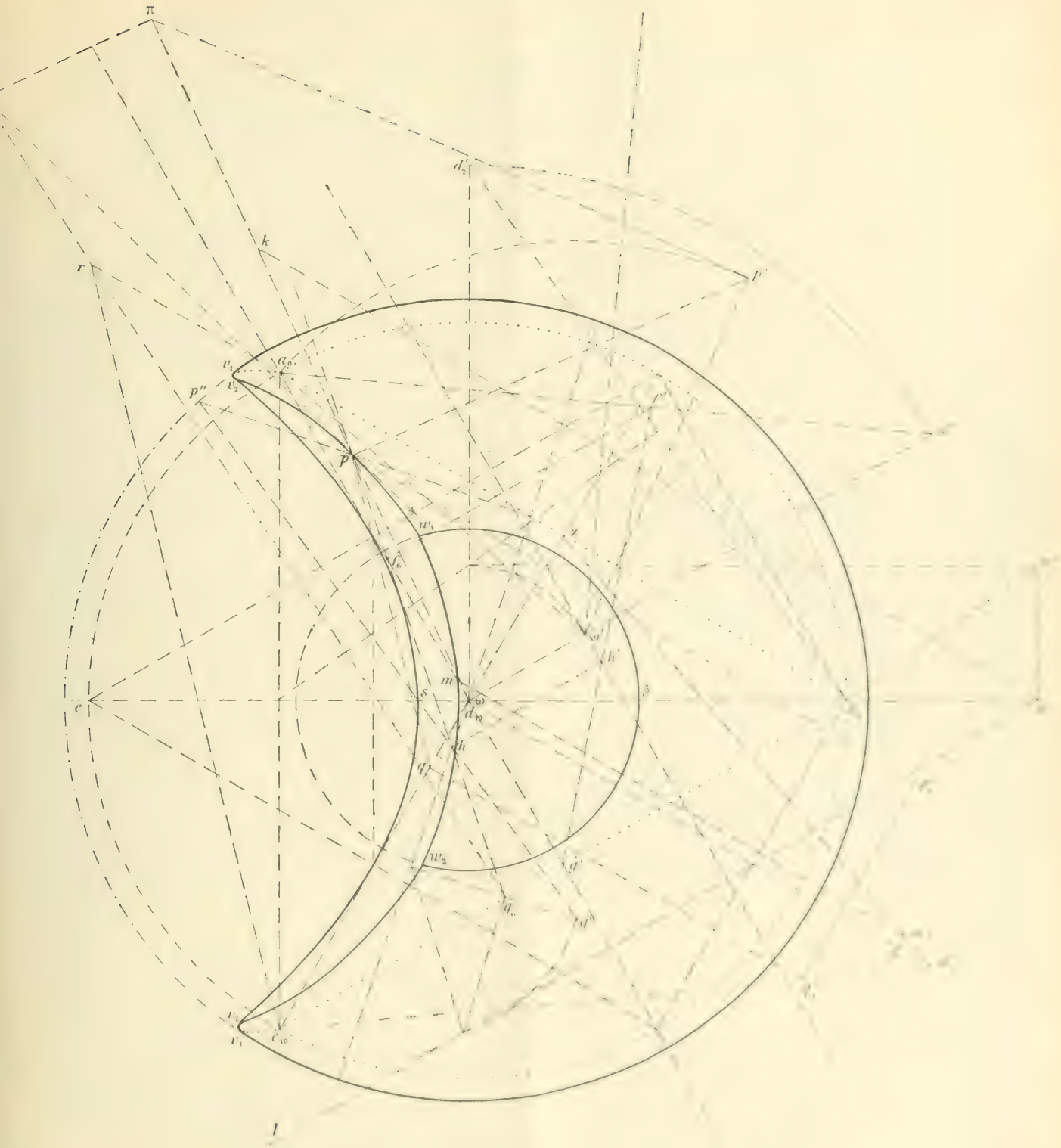
Mise en place : *On supposera que le point* D *se projette au centre de la feuille, que l'arête* AC *est parallèle au grand côté de la feuille et à gauche du point* D. *Le cercle circonscrit au triangle* ABC *a* 10 *centimètres de rayon.*

On indiquera la construction d'un point quelconque de la courbe commune à la sphère et au paraboloïde et de la tangente en ce point ; la tangente sera tracée en trait mixte noir. Les lignes de construction seront tracées en traits pleins rouges.

(*École Polytechnique, concours de 1910.*)

Après avoir tracé la circonférence de rayon $da = 10^{cm}$, nous menons la corde ac, perpendiculaire au milieu du rayon de, et sa longueur donne le côté du triangle équilatéral abc, base du tétraèdre. Pour avoir la sphère circonscrite il suffit de rabattre le plan vertical ad et de décrire dans ce plan rabattu l'arc de rayon ab qui coupe la verticale du point d en d', ce qui donne la hauteur dd' du tétraèdre. Il suffit maintenant de mener la perpendiculaire à ad' en son milieu pour avoir au point ω' où elle coupe dd' le rabattement du centre de la sphère circonscrite, et la cote $d\omega'$ de ce centre. Le rayon de la sphère est donc $\omega'd'$ et nous pouvons tracer son contour apparent en prenant pour centre le point d.

Le paraboloïde hyperbolique a pour contour apparent la parabole enveloppe des projections de ses génératrices. On obtiendra autant de génératrices que l'on veut en graduant l'arête ad par exemple d'une manière arbitraire — le plus simple est ici de la diviser en dix parties égales, donnant l'indice zéro au point a et l'indice 10 au point d — puis divisant bc en un même nombre de parties égales, zéro étant en b et 10 au point c, et joignant les points de même indice sur les deux arêtes. On peut sur chaque génératrice construire le point où elle touche son enveloppe en appliquant la méthode ordinaire qui donne le plan tangent au paraboloïde parallèlement à une direction verticale, ou encore en se reportant au tracé d'une parabole dont on connaît l'axe, qui est ici manifestement bde, et autant de tangentes que l'on veut. Le point de contact sur la généra-



Échelle : $\frac{2}{3}$.

trice ad est au milieu de l'arête et sa projection sur ed fait connaître la sous-tangente dont le milieu s est le sommet de la parabole. Son paramètre est donné par la sous-normale.

Point courant et tangente. — Proposons-nous de chercher un point sur la génératrice qui joint les points 6 par exemple. A cet effet nous projetons cette génératrice fg verticalement en $f'g'$ et nous déterminons le point h', h qui a la cote du centre de la sphère et nous rabattons le plan ΩFG autour de l'horizontale ΩH sur le plan horizontal qui passe par Ω. La génératrice se rabat suivant $g''hp''$ qui coupe le grand cercle de la sphère en un point p'' dont le relèvement p donne un point de la courbe d'intersection. Nous n'avons pas construit le second point d'intersection qui se trouve sur la partie de la sphère qu'on doit enlever.

La tangente au point p est l'intersection des plans tangents aux deux surfaces en ce point. On a le plan tangent à la sphère en menant la tangente en p, p' au grand cercle vertical et prenant sa trace π sur le plan horizontal de base du tétraèdre, d'où l'horizontale $\pi\theta$ du plan tangent. On a le plan tangent au paraboloïde en construisant la seconde génératrice passant au point P. A cet effet on prend l'intersection du plan ABP avec le plan PCD en se servant du plan horizontal auxiliaire $p_1'q_1'$ qui donne la direction pq de l'horizontale du plan PCD ; sa parallèle cr coupe l'horizontale de même cote ab du plan ABP au point r, en sorte qu'il suffit de joindre les traces g et r des deux génératrices qui passent en P pour avoir la trace du plan tangent au paraboloïde. Elle coupe $\pi\theta$ au point θ, qui détermine la tangente θp au point considéré.

Si l'on remarque que l'arête DB est perpendiculaire au plan ACω qui contient le rayon ωA de la sphère, on en déduit que le plan tangent à la sphère en A coupe le plan tangent au paraboloïde en ce point, qui n'est autre que le plan ADB, suivant une parallèle à DB. Donc la tangente en a à la section est parallèle à db, et pour la même raison, la tangente en c lui est aussi parallèle.

Le plan horizontal dont la cote est inférieure d'une unité à celle du sommet D coupe le paraboloïde suivant une courbe homothétique à la section par le plan de base ABC, c'est donc une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à AB et BC. Son centre est d'ailleurs sur le diamètre conjugué de la direction de ce plan, diamètre qui passe par le point B et est parallèle à l'intersection des deux plans directeurs. Or cette intersection est manifestement la droite qui joint le point D au point symétrique de B par rapport à AC, et cette droite est, on le sait, perpendiculaire à la direction de l'arête DB. Nous projetterons donc la figure sur le plan vertical DB et mènerons la perpendiculaire ba' à la direction bd_2' de la projection verticale de DB. Le point o', o qui a la cote du centre de la sphère donne le centre de l'hyperbole section du paraboloïde par ce plan et qui a pour asymptotes ok et ol ; on pourrait se servir de cette hyperbole, dont on connaît deux points sur les génératrices CD et AD, pour déterminer les points où la courbe d'intersection touche le contour apparent de la sphère. Le centre de l'hyperbole, section par le plan qui limite supérieurement le solide, étant hors des limites de l'épure, on construira cet arc d'hyperbole par points, en prenant l'intersection de son plan avec un plan passant par ab et un point quelconque de la génératrice CD. En particulier le plan ABD nous donne le point m_1', m situé sur AD.

Solide commun. — Le solide de l'énoncé a pour contour apparent le grand cercle horizontal de la sphère limité aux points v_1 où il se raccorde avec la courbe d'intersection dont les arcs v_1v_2w sont vus, puis de l'arc de parabole v_2s qui est une partie du contour apparent du paraboloïde. L'arc de petit cercle $w_1\beta w_2$ ainsi que l'arc d'hyperbole $w_1\beta w_2$ sont vus et limitent le solide à sa partie supérieure, tandis que l'arc de cercle abc et les génératrices ab et bc sont cachés et limitent sa base inférieure.

Bonne épure de M. A. Rousseau, à Fournes.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1910)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Suite.*)

7849. — Lieu de la droite intersection de deux plans rectangulaires passant chacun par une droite fixe. Sections circulaires de la quadrique lieu. Démonstration géométrique.

7850. — Déterminer les axes de la section de la surface $x^2 + y^2 + 2z^2 - 1 = 0$ par le plan $z = x + 2y$.

7851. — Lieu des points d'où l'on peut mener à un cône du deuxième degré deux plans tangents rectangulaires.

7852. — La normale en un point M de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ rencontre les plans de coordonnées aux points A, B, C. Trouver le lieu du centre des moyennes distances de ces trois points quand le point M se déplace sur l'ellipsoïde.

7853. — Equation générale des paraboloïdes passant par un cercle donné et ayant leur axe parallèle à une droite donnée.

7854. — Démontrer que le cône qui a pour sommet un foyer d'une quadrique de révolution, et pour base une section plane est lui-même de révolution.

7855. — Trouver toutes les quadriques qui coupent à angle droit la surface $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ en tous leurs points d'intersection.

7856. — Normales à l'ellipsoïde. Cône de Chasles. Cubique des normales.

7857. — Étudier la surface $z(y+mx)+2px=0$. Génératrices. Lieu des points de contact des plans tangents parallèles à Oz.

7858. — Etudier analytiquement les points doubles de la projection horizontale de l'intersection de deux quadriques.

7859. — Trouver une représentation paramétrique rationnelle du paraboloïde $x^2+y^2=2pz$.

7860. — Trouver les paramètres directeurs d'une droite passant par un point M et rencontrant les plans coordonnés en des points P, Q, R tels que l'on ait $\frac{\overline{MP}}{a}=\frac{\overline{MQ}}{b}=\frac{\overline{MR}}{c}$, a, b, c étant des constantes. Montrer que cette droite est normale à une famille de quadriques, surfaces de niveau d'une force supportée par la droite.

7861. — On considère deux quadriques passant par Oz et se raccordant en tous les points de cette droite. Etudier l'intersection.

7862. — Équation générale des paraboloïdes admettant le plan $z=0$ comme plan directeur. Simplifier le plus possible cette équation en choisissant convenablement les axes de coordonnées.

7863. — Condition pour qu'un cône soit capable d'un trièdre trirectangle inscrit. Les plans normaux au cône suivant les trois arêtes d'un tel trièdre passent par une même droite.

7864. — Étudier la surface $z^2(-x^2+y^2+z^2)+a^2(x^2-z^2)=0$. Calculer le volume compris entre deux plans parallèles au plan des xy. Ce volume est-il toujours fini ?

7865. — Plan polaire d'un point par rapport à un ellipsoïde. D'un point fixe on abaisse une perpendiculaire sur son plan polaire ; trouver la droite conjuguée. Condition pour que les plans polaires de deux points soient rectangulaires.

7866. — Démontrer que la surface $x^2-y^2=2z$ est unicursale.

7867. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point sur les génératrices d'un paraboloïde.

7868. — Exprimer que deux plans sont conjugués par rapport à une sphère.

7869. — Combien y a-t-il de points se projetant sur leur plan polaire par rapport à un ellipsoïde en un point donné ?

7870. — Lieu des pieds des perpendiculaires communes à Oz et aux génératrices de la surface

$$x^2\cos^2\alpha-y^2\sin^2\alpha-2pz=0.$$

7871. — Que représentent les trois équations $yz+z-y+1=0$, $zx+x-z+1=0$, $xy+y-x+1=0$? Équation générale des quadriques passant par la cubique gauche commune à ces trois cylindres. Lieu des centres.

7872. — On donne trois axes de coordonnées rectangulaires et trois sphères ayant pour centre commun l'origine et pour rayons a, b, c. On mène une demi-droite quelconque rencontrant les sphères aux points P, Q, R. Par le point P on mène un plan parallèle au plan yOz ; par le point Q un plan parallèle au plan zOx, et par le point R un plan parallèle au plan xOy. Lieu du point de rencontre de ces trois plans. Plan tangent.

7873. — Équation générale des quadriques tangentes aux trois plans de coordonnées.

7874. — Lieu des points d'un ellipsoïde tels que les normales en ces points rencontrent une normale donnée.

7875. — Nature de la quadrique $z=xy-y^2$. Trouver sur cette surface les courbes dont le plan osculateur [illegible] tamment tangent à la surface.

7876. — Deux positions du cercle méridien d'un tore sont situées sur une même sphère. Inversement, condition pour qu'une sphère rencontre un tore suivant deux cercles. On considère une quadrique passant par ces deux cercles. Intersection de la quadrique et du tore.

V. — Géométrie descriptive.

7877. — Construire les projections d'un cube dont une diagonale est verticale.

7878. — On donne un tétraèdre en géométrie cotée ; trouver l'angle de deux faces.

7879. — Mener par un point de la ligne de terre une droite rencontrant deux droites données.

7880. — Ombre portée par une droite sur un plan en géométrie cotée.

7881. — On donne un quadrilatère convexe ABCD dans le plan horizontal. Peut-on choisir un centre de projection [illegible] que ce quadrilatère soit la perspective d'un parallélogramme, d'un rectangle, d'un carré ?

7882. — Un prisme triangulaire droit a sa base dans le plan horizontal. Un rayon lumineux tombe sur une des faces. Figurer le rayon réfracté, le prisme étant d'indice $\frac{3}{2}$. Trouver le point de sortie.

7883. — On donne trois droites concourantes situées dans un même plan. Trouver une perspective de Dieu pour l'une d'elles devienne la bissectrice de l'angle des deux autres.

7884. — On donne un vecteur AB par ses projections et un point C. Représenter le moment du vecteur par rapport au point C. Même question en géométrie cotée.

7885. — Projection verticale d'une hélice tracée sur un cylindre de révolution à axe vertical. Construire un point et la tangente.

7886. — Construire le sommet d'un trièdre trirectangle dont les arêtes passent par trois points.

7887. — On donne les projections d'un tétraèdre. Déplacer les plans de projection de façon que les projections verticales de deux arêtes opposées soient parallèles à la ligne de terre, puis, déterminer la perpendiculaire commune à ces deux arêtes.

7888. — Mener dans un plan par un point de ce plan une droite faisant des angles égaux avec les plans de projection.

7889. — On donne un point F et une droite D par leurs projections. Construire les projections de la parabole qui a pour foyer le point F et pour directrice la droite D.

7890. — On considère une série de cercles égaux dont les plans sont parallèles, disposés sur un cylindre à des distances égales. Qu'obtient-on comme perspective sur un plan parallèle aux plans des cercles ?

7891. — Normales communes à deux cônes.

7892. — On donne un cône à base circulaire horizontale. Contour apparent du cône supplémentaire. Intersection de ce cône et d'une droite. Mener à ce cône des plans tangents par un point.

7893. — Mener les normales communes à deux cônes dont les bases sont des cercles égaux de centres O et ω dans le plan horizontal, $O\omega$ étant parallèle à la ligne de terre, et dont les sommets sont des points symétriques par rapport au plan de profil perpendiculaire au milieu de $O\omega$.

7894. — On donne deux cônes ayant pour bases deux cercles de centres O et ω dans le plan horizontal. Le rayon du cercle O est double de celui du cercle ω, et la droite $O\omega$ est parallèle à la ligne de terre. Les sommets (s, s') et (t, t') sont sur une même verticale rencontrant le cercle ω sur $O\omega$, et la cote du point s' est double de celle du point t'. Normales communes à ces deux cônes.

7895. — Normales communes à deux cylindres dont les bases sont des cercles égaux de centres O et ω dans le plan horizontal, $O\omega$ étant parallèle à la ligne de terre. Les génératrices sont symétriques par rapport au plan de profil passant par le milieu de $O\omega$.

7896. — Contour apparent d'un cône dont la base est un cercle de centre donné, tangent à la ligne de terre.

7897. — Section plane d'un cône qui a pour base une parabole dans le plan horizontal. Condition pour que la section soit parabolique. Sommet de la parabole en projection horizontale.

7898. — Sommet de la parabole, section plane d'un cylindre parabolique.

7899. — On donne deux cercles C et C_1 dans le plan horizontal qui se coupent en deux points A et B. Par le point A on mène une droite quelconque $A\Delta$ et on prend un point S sur cette droite. Intersection du cône qui a pour sommet le point S et pour base le cercle C et du cylindre qui a pour base le cercle C_1 et dont les génératrices sont parallèles à Δ. Montrer que la projection horizontale de l'intersection est unicursale.

7900. — Intersection de deux cônes à bases circulaires dans le plan horizontal. Point le plus haut et le plus bas de l'intersection.

7901. — Intersection de deux cônes ayant un plan tangent commun. Tangentes au point double.

7902. — On donne deux cercles horizontaux. L'un est base d'un cylindre dont la direction des génératrices est donnée ; on demande de déterminer un point S tel que le cône ayant ce point pour sommet et pour base l'autre cercle ait un cercle commun avec le cylindre. Intersection des deux surfaces.

7903. — Intersection d'un cône à base circulaire horizontale et d'un cylindre dont les génératrices sont horizontales.

7904. — Intersection de deux cônes à bases circulaires horizontales, ayant chacun une génératrice verticale.

7905. — Intersection d'un cylindre horizontal ayant pour base un cercle de front et d'un cône ayant pour sommet un point donné et pour base la section du cylindre par un plan de bout. Peut-on s'arranger de façon que la conique section soit dans un plan de front ?

7906. — Intersection d'un cône à base circulaire horizontale et d'un cône supplémentaire dont le sommet est sur la ligne de terre.

7907. — Intersection d'un cône de révolution de sommet S et d'axe vertical et d'un cône circonscrit à une sphère tangente en S au plan horizontal et ayant son sommet dans le plan horizontal et dans le plan de front du point S.

7908. — Intersection de deux cônes ayant une génératrice commune.

7909. — On donne un cylindre dont la base est un cercle dans le plan horizontal. Construire un cône tangent au cylindre sachant que ce cône a pour base un cercle donné dans le plan horizontal et son sommet sur une droite donnée. Combien de solutions ?

7910. — Points communs à trois cylindres ayant une directrice commune.

7911. — On donne un cercle, base d'un cylindre. Combien faut-il donner de points pour définir le cylindre? On donne deux points ; construire la direction des génératrices.

7912. — On donne un cercle, base d'un cône. Combien faut-il donner de points pour définir le cône ? On donne trois points ; construire le sommet.

7913. — Intersection de deux cylindres ayant comme bases deux cercles égaux dans le plan horizontal. (Géométrie cotée.)

7914. — Intersection de deux cônes de révolution à axes verticaux.

7915. — Intersection de deux cônes de révolution homothétiques dont les axes sont de front.

7916. — Intersection de deux cylindres ayant pour bases des cercles dans le plan horizontal, la ligne des centres étant parallèle à la ligne de terre. Les génératrices sont de front et également inclinées, mais en sens contraires, sur le plan horizontal.

7917. — Intersection de deux cônes à bases circulaires horizontales symétriques par rapport à un plan de front.

7918. — On considère un cylindre droit C ayant pour base une conique dans le plan horizontal. La section de ce

cylindre par un plan de bout est la base d'un cône de sommet S. La section de ce cône par un plan vertical V est la base d'un cylindre C_1 dont on donne la direction des génératrices. Intersection des deux cylindres C et C_1. Y a-t-il pénétration ou arrachement ?

7919. — On donne un cercle (C) dans le plan horizontal ayant pour centre le point (o, o'), et un cercle (γ) dans le plan vertical ayant pour centre le point (ω, ω'). Intersection du cône ayant pour sommet (ω, ω') et pour base le cercle (C) avec le cône ayant pour sommet (o, o') et pour base le cercle (γ').

7920. — Mener par une horizontale deux plans tangents à une sphère.

7921. — Points communs à trois sphères.

7922. — Construire une sphère ayant son centre dans un plan vertical donné et coupant orthogonalement trois sphères données.

7923. — Droite conjuguée de la ligne de terre par rapport à une sphère.

7924. — Intersection d'une droite et d'une sphère en géométrie cotée.

7925. — On coupe une sphère par deux plans. Construire l'angle des deux cercles sections en un des points de rencontre.

7926. — Section plane d'une sphère par un plan passant par la ligne de terre.

7927. — Mener par un point un plan tangent commun à deux sphères.

7928. — On donne une sphère par ses contours apparents et la projection horizontale d'un cercle tracé sur la sphère. Trouver la projection verticale.

7929. — On donne un plan défini par deux droites qui se coupent au point (o, o'). Ce point est le centre d'un cercle (C) situé dans le plan et de rayon donné. On donne en outre deux points A et B dans le plan horizontal. Trouver sur le cercle (C) un point M tel que $\frac{MA}{MB} = 2$.

7930. — Trouver la droite conjuguée d'une droite donnée par rapport à une sphère en géométrie cotée.

7931. — Points doubles de la méridienne d'une surface de révolution engendrée par une courbe plane tournant autour d'un axe vertical. On suppose que le plan de la courbe est de bout. Cas où la courbe est une conique.

7932. — Cylindre circonscrit à un tore parallèlement à une direction donnée.

7933. — Trouver le contour apparent horizontal d'un paraboloïde de révolution à axe de front connaissant le sommet et le foyer. Points remarquables.

7934. — Étudier la méridienne principale d'une surface de révolution à axe vertical, engendrée par une conique dont la projection est un cercle.

7935. — Sur une droite quelconque D on donne trois points A, B, F qui sont les sommets et le foyer d'une hyperbole. On fait tourner cette courbe autour de la droite D. Trouver les contours apparents de la surface obtenue.

7936. — On donne un plan défini par deux droites qui se coupent et un point M dans ce plan. On considère l'hyperbole admettant pour asymptotes les droites données et passant au point M. Trouver les contours apparents de l'hyperboloïde engendré par cette hyperbole en tournant autour de son axe transverse.

7937. — Trouver un point équidistant de trois points donnés et situé à une distance donnée d'une droite donnée. Cas où la droite est verticale.

7938. — On donne l'axe et le rayon d'un cylindre de révolution en géométrie cotée. Étant donnée la projection horizontale d'un point, trouver sa cote.

7939. — Mener une droite passant par un point qui soit à des distances données d'une droite donnée et d'un point donné.

7940. — Construire un cylindre de révolution connaissant un plan tangent, un point, une tangente et la direction de l'axe.

7941. — Trouver une droite située dans un plan donné qui soit à des distances données d'un point et d'une droite donnée.

7942. — Ombre d'une droite sur un cylindre de révolution à axe vertical.

7943. — On donne un cône de révolution défini par son sommet et une sphère inscrite. Déterminer la projection verticale d'un point connaissant la projection horizontale. Plan tangent en ce point.

7944. — On donne deux droites quelconques qui se coupent. Contours apparents du cône engendré par l'une des droites tournant autour de l'autre.

7945. — Mener par un point un plan faisant des angles égaux avec trois droites données.

7946. — Trouver une droite passant par un point A, faisant un angle donné avec une droite donnée et située à une distance donnée d'une autre droite donnée.

7947. — Faire tourner une droite autour d'une verticale de façon qu'elle devienne perpendiculaire à une droite donnée, ou parallèle à un plan donné.

7948. — On donne une sphère et un cône circonscrit. Section des deux surfaces par un plan horizontal.

7949. — Section plane d'un cône de révolution à axe vertical.

7950. — Construire un cône de révolution défini par trois génératrices.

7951. — Faire tourner une droite autour d'un axe vertical jusqu'à ce qu'elle fasse un angle donné avec le plan vertical.

7952. — On donne un point O, une droite D et un plan P. Mener par le point O une droite rencontrant D et faisant avec P un angle donné.

7953. — Mener par un point de la ligne de terre une droite faisant des angles donnés avec les plans de projection.

7954. — Intersection d'un cône circonscrit à une sphère avec une verticale.

7955. — On donne une frontale et une horizontale qui se rencontrent en un point S. Ce sont les axes de deux cônes de révolution de même angle au sommet. Plans tangents communs à ces deux cônes.

7956. — On définit une surface gauche de révolution à axe vertical par les projections cotées du cercle de gorge et d'un parallèle. Intersection de la surface et d'une droite graduée.

7957. — On donne une surface gauche de révolution par son axe vertical et une génératrice cotée. Déterminer la courbe de contact du cône circonscrit ayant pour sommet un point S de cote zéro.

7958. — Déterminer le sommet d'une section parabolique d'une surface gauche.

7959. — On donne une surface gauche de révolution définie par son axe vertical et une génératrice de front, puis un point dans le plan de front de l'axe. Déterminer la polaire de ce point par rapport à la méridienne principale.

7960. — On donne deux droites en géométrie cotée. L'une d'elles tourne autour de l'autre. Trouver le contour apparent horizontal de la surface engendrée.

7961. — On considère la surface engendrée par une droite D tournant autour d'une droite A. Trouver la deuxième génératrice passant par un point M de D.

7962. — Droite conjuguée d'une droite de front par rapport à une surface gauche de révolution à axe vertical.

7963. — Une droite quelconque tourne autour d'un axe de front. Construire un point et la tangente à la méridienne principale.

7964. — Déterminer une surface gauche de révolution à axe vertical connaissant deux parallèles et l'angle d'une génératrice avec l'axe.

7965. — Étudier la surface engendrée par une verticale tournant autour d'une frontale. Construire les génératrices horizontales. Section par un plan quelconque.

7966. — Trouver sur une génératrice d'une surface gauche de révolution un point tel que la normale en ce point rencontre une droite donnée.

7967. — Plans tangents menés par la ligne de terre à un hyperboloïde dont le cercle de gorge est dans le plan horizontal.

7968. — Intersection d'une surface gauche de révolution et d'une droite qui rencontre l'axe.

7969. — Construire la direction conjuguée d'une direction de plan donnée par rapport à une surface gauche de révolution à axe vertical.

7970. — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe de front avec une verticale qui rencontre l'axe.

7971. — Courbe de contact d'une surface gauche de révolution à axe vertical et d'un cône circonscrit de sommet donné.

7972. — Construire le pôle d'un plan par rapport à une surface gauche à axe vertical.

7973. — On donne deux droites D et D′ non situées dans un même plan et inclinées à 45° sur le plan horizontal. L'horizontale de cote zéro qui s'appuie sur les deux droites leur est perpendiculaire. On considère le paraboloïde hyperbolique s'appuyant sur D et D′ et ayant pour plan directeur un plan vertical perpendiculaire à la projection horizontale de D et D′. Construire des génératrices de la surface. Trace horizontale.

7974. — Représenter un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal et passant par deux droites en projection cotée.

7975. — En cotée on donne une droite graduée et une verticale. Un paraboloïde est défini par ces deux droites, l'un des plans directeurs étant horizontal. Construire des génératrices. Plan tangent et normale en un point.

7976. — On considère un paraboloïde hyperbolique défini par deux génératrices et un plan directeur horizontal. 1° Sommet. 2° Section plane. Section hyperbolique, asymptotes. Section parabolique, sommet. 3° Intersection avec une droite. 4° Plan tangent parallèle à un plan donné.

7977. — Un paraboloïde a pour plans directeurs les plans de projection : il est défini par son sommet et un point. Étant donnée la projection d'un point, trouver l'autre.

7978. — Un paraboloïde hyperbolique est défini par un plan directeur horizontal, une génératrice de front et une de profil. Trouver le plan polaire d'un point.

7979. — Contours apparents d'un paraboloïde défini par un quadrilatère gauche.

7980. — Construire les génératrices d'un hyperboloïde défini par la ligne de terre, une verticale et une ligne de bout.

7981. — On considère un hyperboloïde défini par trois génératrices graduées. Trouver le plan polaire d'un point donné. Centre de la surface.

7982. — On donne un paraboloïde hyperbolique défini par un plan directeur horizontal et deux génératrices de profil. Intersection avec une droite.

7983. — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical et d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal.

7984. — Mener par une droite des plans tangents à un ellipsoïde de révolution à axe vertical.

7985. — Section d'un tore par un plan bitangent ou une sphère bitangente.

7986. — Intersection d'un cylindre circonscrit à une sphère ayant ses génératrices parallèles à la ligne de terre avec un cône circonscrit à la sphère et passant par la génératrice du cylindre qui est tangente au point le plus haut de la sphère.

7987. — On donne deux droites D et Δ qui se coupent au point S et un point O sur D. On considère une sphère ayant pour centre le point O et tangente à la verticale du point S. Intersection de cette sphère et du cône engendré par Δ tournant autour de D.

7988. — Intersection des deux surfaces engendrées par une même droite tournant autour de deux axes verticaux.

7989. — On donne un paraboloïde P ayant pour plans directeurs les plans de projection, et un autre paraboloïde Π ayant pour plans directeurs le plan horizontal et un plan de profil. Les deux surfaces ont même sommet S et un point commun A. Intersection.

7990. — On donne une sphère de centre (o, o'), et on considère le cône de révolution qui a pour sommet le point (s, s') le plus à gauche de la sphère, pour axe la droite joignant le sommet au point (a, a') le plus bas de la sphère, et dont l'une des génératrices est $(so, s'o')$. Intersection de la sphère et du cône.

7991. — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical et d'un cylindre dont les génératrices sont horizontales.

7992. — Plan tangent commun à un cône et à une sphère.

7993. — Cône circonscrit à un ellipsoïde de révolution à axe vertical. Construire les axes de la projection horizontale de la courbe de contact.

7994. — Intersection d'un hémisphère ayant sa base dans le plan horizontal et d'un cylindre de révolution à axe vertical.

7995. — On donne un paraboloïde de révolution à axe vertical, et un cône de révolution ayant son sommet au foyer du paraboloïde et son axe dans le même plan de front que l'axe du paraboloïde. Intersection. Étude analytique.

7996. — Ombres de la niche.

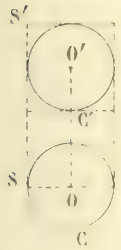
7997. — Intersection d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal avec un cylindre dont la base est un cercle horizontal.

7998. — Intersection d'un cylindre de révolution à axe de front et d'une sphère dont le centre est sur le cylindre.

7999. — Intersection d'une droite et d'un ellipsoïde à trois axes inégaux.

8000. — Intersection d'une sphère et d'un cône qui a pour base un cercle horizontal et dont le sommet est situé sur le grand cercle horizontal de la sphère. Étude analytique.

8001. — On donne une sphère (o, o') et un cône dont le sommet (s, s') est dans le plan de front du centre, dans le plan tangent horizontal supérieur et se projette horizontalement sur le contour apparent horizontal de la sphère. La base de ce cône est le cercle (c, c'). Intersection du cône et de la sphère.



8002. — On donne un paraboloïde de révolution à axe vertical de foyer F et de sommet S. Soit O l'un des points de la méridienne principale situé dans le plan horizontal du point F. Intersection du paraboloïde et de la sphère qui a pour centre le point O et qui passe par le point S.

8003. — On considère une surface gauche de révolution engendrée par une génératrice de front G tournant autour d'un axe vertical O, et le paraboloïde hyperbolique passant par les droites G et O et ayant le plan horizontal comme plan directeur. Intersection des deux surfaces. Étude analytique.

8004. — On donne un ellipsoïde à axe vertical et un point O dans le plan de la méridienne principale. Ce point O est le centre d'un cône isotrope. Trouver la projection verticale de l'intersection de l'ellipsoïde et du cône. Déterminer un point et la tangente.

8005. — Intersection d'une surface gauche à axe vertical et d'un cône ayant pour génératrice une génératrice de front de la surface et pour base un cercle dans le plan horizontal.

8006. — Intersection d'un tore ayant pour axe la ligne de terre avec une sphère ayant en commun avec lui le cercle générateur supposé dans le plan horizontal.

8007. — On donne un cône de sommet S ayant pour base une parabole horizontale dont l'axe A passe par la projection horizontale du point S. Intersection du cône avec une sphère tangente au cône en deux points symétriques par rapport au plan vertical A.

8008. — On donne une surface gauche de révolution par son cercle de gorge horizontal et une génératrice de front G. Intersection de cette surface et du cylindre qui a pour base le cercle de gorge et dont les génératrices sont parallèles à G.

8009. — On considère un paraboloïde à axe vertical et dont la concavité est tournée vers le haut. On le coupe par un plan de bout et on conserve la portion située au-dessous du plan. Ombre propre et ombres portées sur les plans de projection, la source lumineuse étant un point situé dans le plan de front de l'axe.

8010. — Intersection d'un tore à axe de front avec une sphère ayant son centre sur le parallèle équatorial intérieur du tore.

8011. — On donne un cercle dans le plan horizontal. C'est la section droite d'un cylindre, et le cercle générateur d'un tore ayant pour axe la ligne de terre. Intersection des deux surfaces. Étude analytique.

VI. — Cinématique.

8012. — Deux points de même masse se déplacent sur deux cercles situés dans des plans parallèles. Ils ont des vitesses angulaires égales et tournent en sens contraires. Étudier le mouvement du centre de gravité.

8013. — Une parabole tourne autour de son foyer d'un mouvement uniforme. Comment doit se déplacer un point sur la courbe pour qu'à chaque instant la vitesse soit dirigée suivant le diamètre du point.

8014. — Deux points montent sur deux hélices circulaires situées sur le même cylindre, mais ayant des pas différents, d'un mouvement uniforme de même vitesse angulaire. Ils partent ensemble d'un même plan horizontal. Étudier le mouvement de leur centre de gravité.

8015. — Un point se déplace sur un cercle de façon que l'accélération totale soit proportionnelle au carré de la vitesse. Trouver la direction et l'enveloppe du vecteur accélération.

8016. — Trouver l'hodographe du mouvement $x = \cos t$, $y = \lg t$. Id. de la hélice.

8017. — Calculer le rayon de courbure de l'hélice en supposant qu'un point décrive cette courbe d'un mouvement uniforme.

8018. — Un corps est animé d'un mouvement hélicoïdal uniforme. Lieu des points du corps tels qu'en ces points le vecteur vitesse ait une longueur donnée.

8019. — Un point se meut sur un cercle de façon que son accélération totale soit constante. Loi du mouvement.

8020. — Condition pour que le mouvement d'un point sur une parabole soit tel que la vitesse soit égale à l'accélération en valeur absolue.

8021. — Étudier le mouvement d'un point mobile sur un cercle, sachant que l'extrémité du vecteur vitesse décrit une droite. Quel est le lieu du milieu de ce vecteur ?

8022. — Tout mouvement instantané d'un solide peut se ramener à un mouvement de rotation et à un mouvement de translation.

8023. — Un plan tourne autour d'une droite perpendiculaire d'un mouvement uniforme. Un point se meut sur une droite de ce plan d'un mouvement uniforme. Étudier son mouvement absolu.

8024. — Étudier le mouvement d'un point sur Ox sachant que son abscisse vérifie l'équation $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0$.

8025. — Quelle est la vitesse angulaire de l'aiguille des minutes d'une montre ?

8026. — Un vecteur de longueur constante MP se déplace dans l'espace. Démontrer que les projections sur MP des vitesses des points M et P sont des vecteurs équipollents.

8027. — Si à un instant quelconque les vitesses de trois points non en ligne droite d'un corps solide sont nulles, la vitesse d'un point quelconque du corps est nulle.

8028. — Un point décrit la courbe $y = \operatorname{tg} x$, de façon que la projection de la vitesse sur Ox soit égale à $\sin x$. Étudier le mouvement. Construire l'hodographe.

8029. — On peut définir la vitesse moyenne : 1° comme la limite de $\frac{\text{corde MM}'}{\Delta t}$; 2° comme la demi-somme géométrique des vecteurs vitesses de M et M'. Évaluer la différence géométrique de ces deux vecteurs. C'est un infiniment petit du second ordre. Dans quel mouvement est-elle rigoureusement nulle ?

8030. — Montrer que si t varie, le plan $(t+1)^2x + (t^2 - t + 1)y + (t^2 + 1)z = 0$ tourne autour d'une droite fixe. En supposant que t désigne le temps, calculer la vitesse angulaire de rotation autour de cette droite.

8031. — Étudier le mouvement de la droite $y = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1}x$, quand le temps t varie. Vitesse angulaire.

8032. — On donne trois cercles situés respectivement dans les plans de coordonnées. Ces cercles sont parcourus par des points de même masse avec la même vitesse angulaire. Étudier le mouvement du centre de gravité. Montrer que la trajectoire est une ellipse.

8033. — Quelle est la vitesse, due au mouvement de la terre, d'un point situé sur l'équateur.

8034. — Étudier le mouvement $x = at$, $y = bt$, $z = ct$.

8035. — Déterminer un mouvement plan dans lequel l'accélération totale est égale et perpendiculaire à la vitesse.

VII. — Dynamique.

8036. — On donne deux droites rectangulaires Ox et Oy, et sur ces droites deux points A et B tels que $OA = OB$. Un point matériel soumis à une force passant par le point O et proportionnelle à la distance est lancé du point A avec une vitesse initiale V_0. Sous quel angle doit-on lancer ce point pour qu'il passe par le point B ?

8037. — Étudier le mouvement d'un point soumis à la force $X = 0$, $Y = kx^2$.

8038. — Un point se déplace sur une hélice circulaire de manière que la génératrice de ce point tourne autour de l'axe d'un mouvement uniforme. Trouver la force qui sollicite ce point.

8039. — Un point matériel se déplace sur une spire d'hélice circulaire. Il est soumis à la force $X = y^2$, $Y = x^2 - 2xy$, $Z = 0$. Travail total.

8040. — Étudier le mouvement dû au champ de force $X = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $Y = \frac{x}{x^2 + y^2}$. Comment peut-on simplifier l'étude de ce mouvement ?

8041. — Un point matériel a pour trajectoire une hyperbole équilatère. Sachant qu'il est soumis à une force parallèle à une asymptote, déterminer cette force et étudier le mouvement.

8042. — Mouvement d'un point pesant sur une parabole à axe vertical. On suppose le point lancé du sommet. Calcul de la réaction.

8043. — Étudier le champ de force $X = -x$, $Y = \frac{-y}{x^2}$, $Z = 0$. Lignes de force. Y a-t-il des surfaces de niveau ?

8044. — Hodographe du mouvement du pendule simple.

8045. — Mouvement d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.

8046. — Hodographe dans les mouvements à forces centrales. Cas du mouvement des planètes.

8047. — Étudier le mouvement d'un point pesant sur une chaînette à axe vertical.

8048. — Mouvement d'un point soumis au champ $X = 2x$, $Y = x^2$. Lignes de force.

8049. — Mouvement rectiligne d'un point sous l'influence de la force centrale $\frac{mk}{x^n}$. Cas particulier $n = 3$.

8050. — Mouvement curviligne d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse du cube de la distance.

8051. — D'un point O au même instant on lance divers points avec la même vitesse. Montrer qu'au temps t ils sont tous sur une même sphère.

8052. — Étudier le mouvement d'un point qui se déplace sur un cercle du plan des xy en étant soumis à la force

$$X = -ay, \qquad Y = ax.$$

8053. — Étudier le mouvement d'un point sur une droite attiré par deux points A et B de cette droite proportionnellement à la distance.

8054. — Un point pesant est lancé sur une horizontale : il y a frottement. Où ce point s'arrêtera-t-il ?

8055. — On considère le champ de force $X = \frac{y^2}{3} + x^2$, $Y = xy^2$. Lignes de force et lignes de niveau.

8056. — Trouver le travail accompli par la force $X = y + y^2$, $Y = xy$, lorsque le point (x, y) décrit le cercle $x^2 + y^2 = 1$.

8057. — Mouvement d'un point pesant sur une hélice circulaire à axe vertical.

8058. — Soit la force $X = m - a\frac{y^2}{x^2}$, $Y = n - 2b\frac{y}{x}$. Expression du travail élémentaire. Trouver la fonction des forces si $b = -a$. Lignes de niveau ; lignes de force.

8059. — Mouvement vertical d'un point pesant avec une résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

8060. — Pendule avec frottement.

8061. — Mouvement d'un point pesant sur une parabole à axe vertical : 1° sans frottement ; 2° avec frottement.

8062. — A quelles conditions la force $X = 2xA(y)$, $Y = x^2A'(y) + B(y)$, $Z = 0$ sera-t-elle centrale ? $A(y)$ et $B(y)$ sont des fonctions de y, $A'(y)$ est la dérivée de $A(y)$.

8063. — Mouvement d'un point pesant sur un plan horizontal avec frottement, relié à un point fixe par un fil élastique qui exerce sur lui une attraction proportionnelle à son allongement.

8064. — Mouvement d'un point pesant M mobile avec frottement sur une horizontale attiré par un point A par une force égale à $\frac{k}{AM}$.

8065. — Étudier le mouvement d'un point non pesant sur une droite, sachant qu'il est soumis à une résistance égale à $m(v + v^2)$, m étant la masse et v la vitesse.

8066. — Mouvement d'un point pesant sur une cycloïde.

8067. — Mouvement d'un point pesant suspendu à un fil élastique dont la tension est proportionnelle à l'allongement.

8068. — Mouvement des planètes dans le cas de la trajectoire parabolique.

8069. — On considère le champ de forces $X = \frac{x + 2y}{(x + y)^2}$, $Y = \frac{y}{(x - y)^2}$. Construire les lignes de force.

8070. — Un point décrit une développante de cercle sous l'action d'une force centrale passant par le centre du cercle. Calculer cette force.

8071. — Étudier le mouvement d'un point sous l'action de la force centrale $\frac{1}{(r^2 - a^2)^2}$. Parmi les trajectoires il y a une développante d'un cercle qui a son centre à l'origine.

8072. — On lance d'un même point et dans la même direction divers points pesants avec des vitesses initiales différentes. Lieu de leurs positions à un instant donné.

8073. — On considère un point mobile sous l'action d'une force centrale, fonction de la distance. Trouver les conditions initiales pour que la trajectoire soit un cercle.

VIII. — Statique.

8074. — On donne deux forces quelconques F et G et une droite Δ. Peut-on placer sur Δ une force H telle que le système F, G, H ait une résultante unique?

8075. — Démontrer que la résultante de deux forces concourantes passe par un point fixe quand les forces tournent autour de leur point de rencontre.

8076. — On donne trois droites A, B, C. Peut-on placer sur ces droites trois forces se réduisant à un couple ?

8077. — On donne un tétraèdre OABC, et on considère le système de forces représentées par les vecteurs OA, OB, OC, BC, CA, AB. Faire la réduction.

8078. — Trouver l'axe central d'un système de trois forces dont les points d'application sont respectivement sur les axes de coordonnées.

8079. — Réduire un système de forces à deux forces de grandeurs données dont l'une soit appliquée en un point donné.

8080. — Tout système de forces peut se réduire à deux dont l'une est portée par une droite arbitraire.

8081. — On peut réduire un système de forces à un couple situé dans un plan donné et à une force.

8082. — Peut-on réduire un système de forces à une force et à un couple donné ?

8083. — Démontrer qu'on peut réduire un système de forces à six appliquées le long des arêtes d'un tétraèdre. La décomposition n'est possible que d'une seule manière.

8084. — Définition du produit géométrique de deux vecteurs. Calculer le produit géométrique des vecteurs qui ont pour coordonnées X, Y, Z, L, M, N et $X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1$.

8085. — Réduire un système de forces à deux, l'une étant située dans un plan donné, l'autre perpendiculaire à ce plan. Si le plan se déplace parallèlement à lui-même, trouver le lieu engendré par la deuxième force.

8086. — Réduire un système de forces à deux dont l'une passe par un point donné et ait une intensité donnée.

8087. — On donne un polygone fermé plan ou gauche ABCDE. Faire la réduction des forces AB, BC, CD, DE, EA.

8088. — On donne des vecteurs de grandeur constante passant par un point fixe et dont le moment par rapport à un point est constant. Lieu de la ligne d'action de ces vecteurs.

8089. — On donne des vecteurs passant par un point fixe et dont le moment par rapport à un axe est constant. Lieu des lignes d'action de ces vecteurs.

8090. — Une charpente en forme de tétraèdre a pour base dans un plan horizontal un triangle équilatéral de côté a. Le sommet se projette sur le plan de ce triangle en son centre de gravité et a une cote h par rapport à ce plan. Les côtés sont des tiges pesantes articulées en leurs sommets. Calculer les tractions exercées sur les côtés horizontaux.

8091. — Un cordon de longueur donnée est attaché en deux points A et B. Équilibre d'une poulie infiniment petite reposant sur le cordon et à laquelle est attaché un poids P. Solution géométrique.

8092. — Position d'équilibre d'un point mobile avec frottement sur la parabole $x^2 = 2py$, et soumis au champ $X = -x$, $Y = \frac{2y}{x^2}$.

8093. — Conditions d'équilibre d'un corps qui a deux points fixes.

8094. — On donne un point fixe A, une poulie fixe B infiniment petite. Un cordon attaché en A passe sur la poulie B, et porte une poulie mobile C supportant un poids P. On tire sur le fil après son passage en B. Quel est le lieu du point C ?

8095. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy, le premier horizontal et le deuxième vertical. Une tige pesante AB s'appuie sur Ox et Oy ; elle frotte sur Ox seulement. Position d'équilibre.

8096. — Un point pesant M de poids P est attiré par un point A par une force égale à MA et par un autre point B par une force égale à k.MB. Position d'équilibre. Lieu de ces positions si k varie.

8097. — On considère deux points pesants M, M′ sur un plan horizontal rugueux ; ils sont réunis par un fil élastique dont la tension est proportionnelle à l'allongement du fil. Position d'équilibre.

8098. — On considère la parabole $x^2 = 2py$, l'axe des y étant vertical et dirigé vers le haut. Une barre AB repose par ses extrémités sur la parabole et sur Oy. Position d'équilibre.

8099. — Une barre pesante OB tourne autour du point O dans un plan vertical xOy (Ox horizontal, Oy vertical). Au point B est attaché un fil qui passe sur une poulie infiniment petite A située sur Oy, et supporte un poids P. Position d'équilibre. On suppose OA = OB.

8100. — Une barre pesante AB repose sur le sol et sur un mur vertical. Elle est située dans un plan vertical. En un point C on applique un poids supplémentaire. Équilibre en supposant qu'il y ait frottement. On suppose ensuite qu'il n'y a pas frottement : quelle force horizontale doit-on appliquer à l'extrémité de la barre qui repose sur le sol pour qu'il y ait équilibre ?

8101. — On donne une circonférence constituée par une matière homogène. Un point A à l'intérieur est attiré par chaque élément proportionnellement à la masse et en raison inverse de la distance. Trouver la résultante des forces qui agissent sur A.

8102. — Positions d'équilibre d'un point pesant assujetti à décrire un cercle situé dans un plan incliné à 45° sur le plan horizontal, le coefficient de frottement étant égal à $\frac{1}{10}$.

8103. — On donne deux tiges pesantes $OA = a$, $OB = b$ faisant l'angle $\widehat{AOB} = \theta$. Position d'équilibre du système autour du point O.

8104. — Équilibre d'une barre pesante reposant à l'intérieur d'un paraboloïde de révolution à axe vertical.

8105. — Équilibre d'un point mobile avec frottement sur une hélice circulaire à axe horizontal.

8106. — Centre de gravité de l'aire d'un arceau de sinusoïde, de cycloïde.

8107. — Centre de gravité d'un arc de parabole, d'un arc de spirale logarithmique.

8108. — Centre de gravité du volume d'un hémisphère.

8109. — Centre de gravité de l'aire limitée par la courbe $y = Lx$, l'axe des x et la droite $x = 2$.

8110. — Centre de gravité d'un arc de cercle AB sachant que la densité en un point M est proportionnelle à l'arc AM.

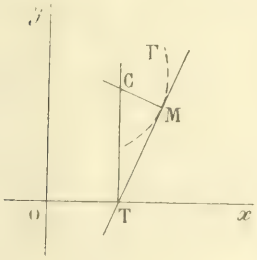
8111. — Centre de gravité de la table de Pythagore.

CONCOURS DE 1910 (*Suite.*)

ÉCOLE PROFESSIONNELLE SUPÉRIEURE DES POSTES ET TÉLÉGRAPHES
(2e section)

Mathématiques.

I. — **1921.** Etant donnés dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, on demande de déterminer une courbe Γ de ce plan telle que la projection orthogonale sur l'axe Ox du centre de courbure C en un point quelconque M de cette courbe soit le point T où la tangente en M rencontre cet axe.



Trouver la relation qui existe entre l'ordonnée d'un point quelconque de cette courbe et l'arc de la courbe compté à partir du point d'ordonnée maximum.

II. — On demande l'intégrale $z = f(x, y)$ de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x} + (3z - y + \sin x)\frac{\partial z}{\partial y} = 4z - 2y - 3\cos x,$$

qui est nulle pour $x = 0$ quel que soit y.

Mécanique.

I. — On considère un pendule formé par un disque circulaire de rayon R fixe par son centre à l'extrémité inférieure d'une tige de longueur L. Le disque, la tige et l'axe de suspension forment un système invariable. Le plan du disque contient la tige et l'axe de suspension. Un vent horizontal de vitesse donnée V, perpendiculaire à l'axe de suspension, souffle sur le disque. On admet que son action se traduit par une force normale au disque, appliquée au centre de celui-ci et égale à $KSW^2 \sin\alpha$, expression dans laquelle K est un coefficient constant, S la surface du disque, W la vitesse relative du centre par rapport au vent, α l'angle de cette vitesse relative avec le plan du disque. On néglige l'action du vent sur la tige ainsi que sur la tranche du disque.

Connaissant les poids du disque et de la tige, on propose :

1° De trouver la position d'équilibre du système ;

2° De former l'équation différentielle du mouvement de ce système écarté de sa position d'équilibre ;

3° D'étudier les petites oscillations que présente le système quand il est infiniment peu écarté de sa position d'équilibre.

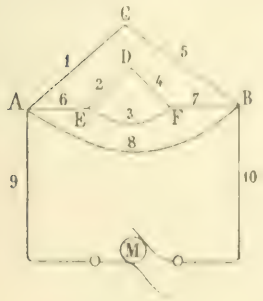
II. — Une bille homogène est posée sur un plan horizontal dépoli qui tourne avec une vitesse constante ω autour d'un axe vertical. Le frottement est supposé assez grand pour que la bille roule sans glisser et on néglige les résistances au roulement et au pivotement ainsi que la résistance de l'air.

Etudier le mouvement de cette bille.

Physique.

I. — Détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur par l'expérience de Hirn par le choc; valeur numérique de la calorie-gramme en ergs, en joules et en kilogrammètres.

II. — Enumérer les théorèmes de Kirchhoff.



III. — Dans la distribution ci-contre, où les chiffres indiquent les résistances de chaque tronçon en ohms, on demande la différence de potentiel entre les points B et D.

La différence de potentiel entre les bornes de la machine M est de 100 volts.

Chimie.

I. — Aluminium et alliages : fabrication, propriétés, usages.

II. — On brule 1g de sulfure de carbone dans un récipient contenant un excès d'oxygène sec [1] et 4g de bioxyde de plomb pulvérisé. On demande de calculer la variation que subira le volume gazeux après accomplissement de toutes les réactions possibles, sous pression normale et à 0°.

Données : C = 12, S = 32, Pb = 208, O = 16.

[1] Sous pression normale et à 0°.

QUESTIONS PROPOSÉES

1922. — On considère la fonction

$$y = x^{\alpha}(1-x)^{\alpha} - x,$$

dans laquelle α désigne un nombre positif donné.

1° Montrer que cette fonction satisfait à la relation

$$xy' - \alpha y = \alpha x - (\alpha - 1)x^{\alpha}.$$

En déduire une relation entre $y^{(n)}$ et $y^{(n-1)}$. Calculer les premiers termes du développement en série de la fonction y, au voisinage de $x = 1$, par rapport à la variable $x - 1 = x'$. En déduire la forme de la courbe représentative au voisinage du point correspondant.

2° Etudier les variations de cette fonction, dans les divers cas fournis par les diverses valeurs positives de α. Cas particuliers, cas généraux. E. H.

1923. — Etant donnés un hyperboloïde à une nappe H et les génératrices G d'un même système de H ; d'un point M de l'espace on abaisse des perpendiculaires sur les droites G. Trouver le lieu des points M pour lesquels les pieds des perpendiculaires sont dans un même plan. Montrer que le plan est toujours un plan cyclique et que le lieu se compose de six droites qu'on demande de définir géométriquement, voir combien d'entre elles sont réelles. Examiner le cas du paraboloïde hyperbolique ; examiner aussi le cas des hyperboloïdes engendrés par l'intersection de deux plans rectangulaires tournant chacun autour d'une droite fixe.

E. Keraval.

DEUXIEME PARTIE

ALGEBRE

1866. — 1° *Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles le polynome*

$$f(x) = \lambda x^3 - x^2 - 2x - 2$$

est de la forme

$$(x^2 + px + q)(x^2 - px + q),$$

la différence des deux trinomes étant égale à $4x + 1$.

2° *On prendra pour λ la racine moyenne de l'équation en λ ainsi formée et on calculera*

$$F(x) = \int \frac{x^2 - 4}{f(x)}\,dx.$$

3° *Montrer qu'en retranchant de* $F(x)$ *une expression de la forme* $AL\,|x|$, *cette fonction reste finie, quand x est infini. Calculer* A.

4° *On considère la fonction*

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{f(x)} - \frac{A}{x};$$

calculer

$$\int g(x)\,dx.$$

1° Identifions $\lambda x^3 - x^2 - 2x - 2$ avec $(x^2 + px + q)(x^2 - p'x + q')$, et $(p - p')x + q - q'$ avec $4x + 1$; nous aurons

$$p - p' = \lambda, \qquad pp' + q + q' = -1, \qquad pq' + qp' = -2, \qquad qq' = 2, \qquad p - p' = 4, \qquad q - q' = 1.$$

La première et la cinquième de ces équations nous donnent $p = \frac{\lambda}{2} + 2$ et $p' = \frac{\lambda}{2} - 2$; nous avons donc simultanément

$$q + q' = 3 - \frac{\lambda^2}{4} \qquad \text{et} \qquad q - q' = 1;$$

par suite, $$q = 2 - \frac{\lambda^2}{8}, \qquad q' = 1 - \frac{\lambda^2}{8}.$$

Il reste maintenant à exprimer que la troisième et la quatrième équation sont vérifiées ; ceci nous donne

$$\lambda^3 - 24\lambda^2 = 0, \qquad \lambda^4 - 12\lambda = 0.$$

Ces deux équations n'ont que la racine commune $\lambda = 0$; c'est la seule solution qui convienne, et le polynome $f(x)$ est bien déterminé ; c'est $x^4 - x^2 - 2x + 2$.

2° L'énoncé est erroné : il n'y a pas à choisir parmi les valeurs de λ ; une seule convient, c'est la racine commune aux deux équations.

La fraction rationnelle $\dfrac{x^3+4}{x^4 - x^2 - 2x + 2}$ s'écrit alors $\dfrac{x^3+4}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$ et peut se décomposer en éléments simples de la façon suivante :

$$\frac{x^3+4}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

A s'obtient en multipliant les deux membres par $(x-1)^2$, puis faisant $x = 1$; on trouve ainsi $A = 1$, et, en retranchant des deux membres $\dfrac{1}{(x-1)^2}$, il vient, dans le premier,

$$\frac{x^3 - x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{x-2}{(x-1)(x^2+2x+2)}.$$

Pour avoir B, il faut multiplier par $x-1$, puis faire $x = 1$: ceci donne $B = -\dfrac{1}{5}$, et, en retranchant la fraction $\dfrac{-1}{5(x-1)}$ des deux membres, le premier devient

$$\frac{6x^2+2x-8}{5(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{6x+8}{5(x^2+2x+2)}.$$

La fraction de seconde espèce est donc toute calculée et l'on a

$$\frac{x^3+4}{f(x)} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{5(x-1)} + \frac{6x+8}{5(x^2+2x+2)}.$$

Pour intégrer cette expression, il n'y a qu'à transformer la différentielle $\dfrac{6x+8}{5(x^2+2x+2)}\,dx$ par la substitution $x+1 = t$: elle devient $\dfrac{(6t-2)\,dt}{5(t^2+1)}$ et se décompose en deux différentielles qui s'intègrent immédiatement. La fonction $F(x)$ est donc finalement

$$F(x) = \frac{-1}{x-1} - \frac{1}{5}\,\mathrm{L}\,|x-1| + \frac{3}{5}\,\mathrm{L}(x^2+2x+2) + \frac{2}{5}\,\mathrm{arc\,tg}\,(x+1) + C.$$

3° La fonction $F(x)$ peut s'écrire

$$F(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{5}\,\mathrm{arc\,tg}\,(x+1) + \frac{1}{5}\,\mathrm{L}\,\frac{(x^2+2x+2)^3}{|x-1|} + C$$

ou $$F(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{5}\,\mathrm{arc\,tg}\,(x+1) + \mathrm{L}\,|x| + \frac{1}{5}\,\mathrm{L}\,\frac{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)^3}{\left|1-\frac{1}{x}\right|} + C.$$

La seule partie qui devienne infinie avec x est la partie $\mathrm{L}\,|x|$; donc $A = 1$.

Cette valeur de A peut se calculer encore autrement : il suffit de développer $\dfrac{x^3+4}{f(x)}$ en série ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x par la division et d'intégrer ensuite. On trouve d'abord

$$\frac{x^2+4}{f(x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} + \ldots,$$

puis,

$$F(x) = L(x) - \frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x^3} - \ldots + C'.$$

Dans cette fonction, le seul terme qui devienne infini avec x c'est le premier, l'expression qu'il faut retrancher de $F(x)$ est donc $L(x)$, et l'on voit que l'on doit prendre $A = 1$.

4° L'intégrale de la fonction $\frac{x^2+4}{f(x)} - \frac{1}{x}$ est $F(x) - L(x)$: elle a donc pour valeur

$$\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg}(x-1) + \frac{1}{5}\,L\,\frac{\left|1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right|}{\left|1-\frac{1}{x}\right|} + C;$$

pour $x = +\infty$, elle est égale à $\frac{\pi}{5} + C$, et pour $x = 2$, à

$$-1 + \frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg} 3 + \frac{1}{5}\,L\,\frac{5}{2} + C.$$

On a donc

$$\int_2^{+\infty} y\,dx = \frac{\pi}{5} + 1 - \frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg} 3 - \frac{3}{5}\,L5 + \frac{2}{5}\,L2.$$

Bonne solution : M. Boussac, à Fournes.

QUESTIONS PROPOSÉES

1924. — 1° Intégrer l'équation différentielle

$$y'(1+x)(1+2x) - 2xy^2 - 2x - 2 = 0$$

par les séries et trouver ainsi toutes les fonctions y qui satisfont à cette équation et sont nulles pour $x = 0$.

2° Déterminer celle de ces fonctions y qui est minimum pour $x = 0$ et maximum pour $x = 1$. Etudier les variations de cette fonction. Calculer l'ordonnée du maximum et la racine positive de cette fonction avec l'approximation que comportent les tables de logarithmes. E. H.

1925. — Soient AB un diamètre fixe d'un cercle O, M un point variable sur la circonférence, C et C' deux points sur AM, tels que $CM = C'M = k$:

1° Le lieu des centres de similitude du cercle O et du cercle de diamètre AM est une strophoïde droite ;

2° Le lieu des centres de similitude du cercle de diamètre AM et du cercle de diamètre BM est composé de deux courbes du sixième degré. Les construire.

3° Le lieu des centres de similitude du cercle O et du cercle de diamètre MC (ou MC') se compose de deux courbes du quatrième degré. Les construire et calculer leurs aires.

E.-N. Barisien.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

21e Année. Février 1911. N° 5.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LA COURBURE DES COURBES TRIANGULAIRES

par M. **Valiron**, professeur au lycée de Besançon.

Considérons un triangle de référence dont les côtés ont pour équations par rapport à deux axes rectangulaires

$$P \equiv ax + by + c = 0, \qquad Q \equiv a'x + b'y + c' = 0, \qquad R \equiv a''x + b''y + c'' = 0.$$

Nous appellerons courbes triangulaires les courbes dont l'équation est de la forme

$$f_\mu(x, y) = \alpha P^\mu + \beta Q^\mu + \gamma R^\mu = 0, \tag{I}$$

α, β, γ et μ étant des constantes.

Si nous considérons μ comme fixe et α, β, γ comme des paramètres, l'équation (I) représente un réseau de courbes. Par un point $A(x_0, y_0)$ il passe un faisceau de ces courbes, car en posant

$$P_0 = ax_0 + by_0 + c, \qquad Q_0 = a'x_0 + b'y_0 + c', \qquad R_0 = a''x_0 + b''y_0 + c'',$$

on a

$$\alpha P_0^\mu + \beta Q_0^\mu + \gamma R_0^\mu = 0. \tag{1}$$

De sorte que l'équation (I) ne contient plus qu'un paramètre linéaire. Enfin il y a une seule courbe $f_\mu(x, y) = 0$ passant par un point $A(x_0, y_0)$ et ayant en ce point une tangente donnée. En effet si $\alpha_1 P + \beta_1 Q + \gamma_1 R = 0$ est l'équation de cette tangente, on a évidemment

$$\alpha_1 P_0 + \beta_1 Q_0 + \gamma_1 R_0 = 0. \tag{2}$$

Et comme la tangente au point $A(x_0 y_0 = P_0 Q_0 R_0)$ à la courbe (I) a pour équation

$$\alpha P P_0^{\mu-1} + \beta Q Q_0^{\mu-1} + \gamma R R_0^{\mu-1} = 0,$$

on doit avoir, en plus de la relation (1), les relations

$$\frac{\alpha P_0^{\mu-1}}{\alpha_1} = \frac{\beta Q_0^{\mu-1}}{\beta_1} = \frac{\gamma R_0^{\mu-1}}{\gamma_1} \tag{3}$$

Les relations (1) et (3) sont compatibles en vertu de l'égalité (2), et le fait précédent est démontré.

Ceci posé, nous allons démontrer le théorème suivant :

Étant donnés un point A et une droite AT passant par ce point, si on désigne par ρ le rayon de courbure de la courbe $f_\mu(x,y) = 0$ au point A, on a quel que soit μ

$$\rho_\mu(1 - \mu) = C^{te}.$$

Pour démontrer ce fait je remarquerai qu'on peut supposer que le point A est l'origine des coordonnées et AT confondu avec l'axe des x, puisque les côtés du triangle de référence n'ont pas de position particulière par rapport aux axes des coordonnées.

Pour exprimer que Ox est tangente à la courbe (I) au point O et calculer le rayon de courbure en ce point, je remarque que pour x et y suffisamment petits on peut développer P^μ, Q^μ, R^μ par la formule

du binome. On a

$$P^p = c^p\left[1 + \frac{ax+by}{c}\right]^\mu = c^p\left[1 + \mu\frac{ax+by}{c} + \frac{\mu(\mu-1)}{2}\frac{(ax+by)^2}{c^2} + P_1(x, y)\right],$$

$P_1(x, y)$ contient $(ax+by)^3$ en facteur, donc ses dérivées premières et secondes en x et y s'annulent pour $x = 0$, $y = 0$.

On a alors

$$f_p(x, y) = u_0 + u_1x + u_2y + u_3x^2 + u_4xy + u_5y^2 + \varphi_3(x, y),$$

$\varphi_3(x, y)$ s'annulant ainsi que ses dérivées premières et secondes pour $x = 0$, $y = 0$. Et on a

$$\begin{aligned}
u_0 &= \alpha c^p + \beta c'^p + \gamma c''^p,\\
u_1 &= (\alpha c^{p-1}a + \beta c'^{p-1}a' + \gamma c''^{p-1}a'')\mu,\\
u_2 &= (\alpha c^{p-1}b + \beta c'^{p-1}b' + \gamma c''^{p-1}b'')\mu,\\
u_3 &= (\alpha c^{p-2}a^2 + \beta c'^{p-2}a'^2 + \gamma c''^{p-2}a''^2)\frac{\mu(\mu-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Pour que la courbe passe par O et soit tangente à Ox en ce point, il faut que

(4) $$u_0 = 0, \qquad u_1 = 0.$$

Alors, le rayon de courbure est $$\rho_\mu = -\frac{u_3}{2u_2}.$$

En posant

(5) $$k = \alpha c^{p-1}b + \beta c'^{p-1}b' + \gamma c''^{p-1}b'', \qquad h = \alpha c^{p-2}a^2 + \beta c'^{p-2}a'^2 + \gamma c''^{p-2}a''^2,$$

on a $$\rho_\mu = -\frac{\mu h}{\mu(\mu-1)k} = \frac{1}{1-\mu}\frac{h}{k}.$$

Pour calculer $\frac{h}{k}$, il suffit de remarquer que les relations (4) et (5) peuvent s'écrire

$$\begin{cases}
u_0 = (\alpha c^{p-1})c + (\beta c'^{p-1})c' + (\gamma c''^{p-1})c'' = 0,\\
u_1 = (\alpha c^{p-1})a + (\beta c'^{p-1})a' + (\gamma c''^{p-1})a'' = 0,\\
(\alpha c^{p-1})b + (\beta c'^{p-1})b' + (\gamma c''^{p-1})b'' - k = 0,\\
(\alpha c^{p-1})\frac{a^2}{c} + (\beta c'^{p-1})\frac{a'^2}{c'} + (\gamma c''^{p-1})\frac{a''^2}{c''} - h = 0.
\end{cases}$$

On a donc

(6) $$\begin{vmatrix} c & c' & c'' & 0\\ a & a' & a'' & 0\\ b & b' & b'' & k\\ \frac{a^2}{c} & \frac{a'^2}{c'} & \frac{a''^2}{c''} & h \end{vmatrix} = 0.$$

En développant par rapport à la dernière colonne, on voit que $\frac{h}{k}$ est indépendant de μ. Donc $\rho_\mu(1-\mu)$ ne dépend que de la position du point A et de la droite AT par rapport au triangle de référence.

Applications. I. — Si on donne à μ la valeur 2 on a une conique conjuguée au triangle de référence, pour $\mu = -1$ on a une conique circonscrite; pour $\mu = \frac{1}{2}$, une conique inscrite. On a ainsi les trois énoncés suivants :

1° *Lorsqu'une conique* C *est harmoniquement circonscrite à une autre* C′ *et lui est tangente en un point, on a entre les rayons de courbure en ce point la relation*

$$\rho_1 = -\frac{\rho_1'}{2}.$$

2° *Lorsqu'une conique* C *est harmoniquement inscrite dans une conique* C′ *et lui est tangente en un point,*

on a la relation

$$\rho_c = -2\rho_{c'}$$

entre les rayons de courbure au point de contact.

3° *Lorsqu'une conique* C *est circonscrite à un triangle inscrit dans une conique* C′ *et lui est tangente en un point, on a au point de contact la relation*

$$\rho_c = \frac{\rho_{c'}}{4}.$$

En particulier si le triangle de référence a pour sommets les points cycliques et un autre point O, une conique conjuguée sera une hyperbole équilatère de centre O, — une conique circonscrite, un cercle passant par O, — une conique inscrite, une parabole de foyer O. On voit alors que :

1° *Le rayon de courbure en un point d'une parabole est le double du diamètre du cercle passant par le foyer et tangent à la courbe en ce point.*

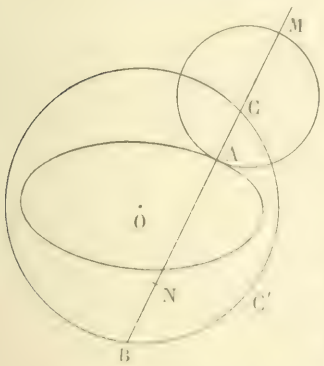
2° *Le rayon de courbure en un point d'une hyperbole équilatère est égal et de sens contraire au diamètre du cercle qui passe par le centre et est tangent à la courbe en ce point.*

De même si on considère un triangle de référence formé par les deux axes de coordonnées rectangulaires et la droite de l'infini, les coniques circonscrites sont des hyperboles équilatères dont les asymptotes sont parallèles aux axes et qui passent par l'origine ; les coniques inscrites sont les paraboles tangentes aux axes. Si on considère alors un cercle ayant pour centre l'origine, il est conjugué au triangle de référence. On a alors les deux propositions suivantes :

1° *Le rayon de courbure en un point d'une parabole est égal et de signe contraire au diamètre du cercle tangent en ce point et ayant son centre sur la directrice ;*

2° *Le rayon de courbure en un point d'une hyperbole équilatère est égal et de signe contraire à la moitié de la portion de la normale comprise entre le point d'incidence et le deuxième point d'intersection avec la courbe.*

Considérons enfin une ellipse ou une hyperbole ; on sait que tout cercle orthogonal au cercle orthoptique est harmoniquement circonscrit à la courbe (Théorème de Faure). On voit alors que si on considère le cercle orthogonal au cercle orthoptique et tangent en un point à la conique, son diamètre est égal et de sens contraire au rayon de courbure.



Dans le cas où le cercle orthoptique est réel, on a la construction suivante (que je fais dans le cas de l'ellipse).

La normale en A coupe le cercle orthoptique en B et C, le conjugué harmonique de A par rapport à B et C est à l'extrémité du diamètre du cercle orthogonal à C et normal en A à BC, le point N symétrique de M par rapport à A est le centre de courbure. On sait d'ailleurs construire M même lorsque B et C sont imaginaires, ce qui se présente dans le cas de l'hyperbole. Enfin dans le cas où le cercle orthoptique est imaginaire et a pour rayon iR, la polaire du point A par rapport à ce cercle est la symétrique par rapport au point O de la polaire du point A par rapport au cercle de centre O et rayon R. Donc on a encore le point M.

On peut aussi construire le rayon de courbure en un point d'une ellipse ou d'une hyperbole en considérant cette courbe comme conjuguée au triangle formé par ses axes et la droite de l'infini. La conique circonscrite à ce triangle et tangente en M à la courbe est alors une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes et qui passe par le centre O. Si y_0 est le rayon de courbure de cette

hyperbole et ρ_c celui de la conique donnée, on a

$$-\rho_c = 2\rho_H.$$

Mais on a vu que si P désigne le second point d'intersection de la normale en M avec l'hyperbole, on a

$$\rho_H = -\frac{MP}{2}.$$

Donc on aura

$$\rho_c = MP.$$

La construction du point P se fait en appliquant le théorème de Pascal. J'ai numéroté sur la figure les cinq points connus sur l'hyperbole équilatère, M comptant pour 2, et P étant le sixième point : les droites (12) et (45) se coupent au point à l'infini sur MT ; (23) et (56) au point Q, (34), (61) en un point R, alors RQ est parallèle à MT, donc perpendiculaire à MN, et P s'obtient en abaissant de R la perpendiculaire sur OQ ; on obtient la construction classique.

En permutant 2 et 3 on a la construction en pointillé.

Remarque. — Le théorème que nous venons de démontrer a été incidemment donné par M. Jamet dans sa thèse (*Annales de l'Ecole normale supérieure*, année 1887).

SUR LA QUESTION 1766

par M. **W. Gaedecke**, à Berlin.

1766. — *On donne la fonction* $y = e^{\frac{1}{x}}$. *Déterminer* $\frac{d^n y}{dx^n}$ *et se servir de la formule obtenue pour démontrer l'égalité*

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right) = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}.$$

Généralisation. — On prend la fonction $y = x^{n-1}e^{\frac{a}{x}}$. On a successivement

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^2}\left[(n-1)x^n - ax^{n-1}\right],$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^4}\left[(n-1)(n-2)x^n - 2a(n-2)x^{n-1} + a^2x^{n-2}\right],$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^6}\left[(n-1)(n-2)(n-3)x^n - 3a(n-2)(n-3)x^{n-1} + 3a^2(n-3)x^{n-2} - a^3x^{n-3}\right],$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^8}\left[(n-1)\ldots(n-4)x^n - 4a(n-2)\ldots(n-4)x^{n-1} + 6a^2(n-3)(n-4)x^{n-2}\right.$$
$$\left. - 4a^3(n-4)x^{n-3} + a^4x^{n-4}\right],$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^{10}}\left[(n-1)\ldots(n-5)x^n - 5a(n-2)\ldots(n-5)x^{n-1} + 10a^2(n-3)\ldots(n-5)x^{n-2}\right.$$
$$\left. - 10a^3(n-4)(n-5)x^{n-3} + 5a^4(n-5)x^{n-4} - a^5x^{n-5}\right];$$

. . . . . .

$$\frac{d^my}{dx^m} = \frac{e^{\frac{a}{x}}}{x^{m+1}}\left[(n-1)\ldots(n-m)x^n - C_m^1a(n-2)\ldots(n-m)x^{n-1} + C_m^2a^2(n-3)\ldots(n-m)x^{n-2}\right.$$
$$- C_m^3a^3(n-4)\ldots(n-m)x^{n-3} + \ldots + (-1)^{m-2}C_m^{m-2}a^{m-2}(n-m+1)(n-m)x^{n-m+2}$$
$$\left. - (-1)^m C_m^{m-1}(n-m)a^{m-1}x^{n-m+1} + (-1)^m a^m x^{n-m}\right].$$

En posant $m = n$, on obtient l'équation

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{a}{x}}\right) = (-1)^n \frac{a^n e^{\frac{a}{x}}}{x^{n+1}},$$

et pour $a = 1$ l'équation demandée.

Remarque. — La fonction $y = x^{n-1}e^{\frac{a}{x}}$ peut être regardée comme l'intégrale particulière de l'équation différentielle du n^e ordre :

$$x^{2n}\frac{d^n y}{dx^n} - ky = 0,$$

si l'on pose $a = -\sqrt[n]{k}$. Les n valeurs des n^{es} racines donnent n solutions particulières différentes, et c'est pourquoi l'intégrale *générale* est aussi connue.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours de 1910.

1867. — 1° *Trouver une série entière en x qui satisfasse à l'équation différentielle*

$$\text{(E)} \qquad 9(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 9x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

et aux conditions initiales suivantes : pour $x = 0$, la série doit prendre la valeur 1 et sa dérivée doit prendre la valeur $-\frac{1}{3}$.

2° *Déterminer l'intervalle de convergence de la série trouvée. La fonction de x que définit cette série dans son intervalle de convergence sera désignée par $f(x)$.*

3° *Montrer qu'il existe une infinité de changements de la variable indépendante, de la forme $t = \varphi(x)$, qui transforment identiquement l'équation (E) en une équation linéaire à coefficients constants ; trouver tous ces changements de variable.*

4° *L'un des changements de variable précédents est $x = \cos 3t$. Partant de là, prouver que les formules*

$$x = \cos 3t, \qquad y = \cos t + \sin t$$

définissent, en coordonnées cartésiennes rectangulaires, le même arc de courbe que l'équation $y = f(x)$, pourvu que t varie dans un intervalle qu'on déterminera.

5° *Les équations paramétriques précédentes représentent, quand on n'y limite pas la variabilité du paramètre, une courbe (C). Montrer que cette courbe est coupée par une droite $y = h$ en deux points au plus et que ces points existent pour toutes les valeurs de la constante h qui sont comprises entre deux certains nombres α et β. Ces points seront désignés par M et M'.*

6° *On imagine qu'on divise le segment de droite MM' en trois parties égales ; soient P et P' les points de division. Calculer l'aire comprise entre les arcs de courbe que décrivent P et P' quand h varie de α à β.*

1° Représentons la série cherchée par la notation habituelle

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots;$$

ses deux dérivées seront

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots,$$

et

$$y'' = 2a_2 + 3.2a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots.$$

Nous écrirons alors que cette fonction satisfait à l'équation différentielle, en portant ces séries à la place de y, y', y'' dans l'équation et en écrivant que tous les termes de la série totale ainsi obtenue sont

nuls. Ce calcul très simple nous donne successivement

$$a_0 + 18a_2 = 0,$$

$$a_1 - 9a_3 + 9.3.2.a_5 = 0,$$

. . . . . .

$$a_{n-2} - 9na_n - 9n(n-1)a_{n+2} - 9(n-2)(n-1)a_{n+4} = 0.$$

Les deux premières relations donnent les coefficients a_2 et a_3 en fonction de a_0 et a_1 respectivement ; la dernière est une loi générale de récurrence qui donne un coefficient en fonction de celui qui le précède de deux rangs. En y changeant n en $n-2$, cette relation s'écrit

$$9n(n-1)a_n = (9(n-2)^2 - 1)a_{n-2},$$

et, sous cette forme, elle permet de calculer tous les coefficients à indices pairs, en fonction de a_0 et tous les coefficients à indices impairs en fonction de a_1.

Changeons-y alors n en $2n$, puis faisons varier n depuis n jusqu'à 1, nous aurons successivement

$$9.2n(2n-1)a_{2n} = (36(n-1)^2 - 1)a_{2n-2},$$

$$9(2n-2)(2n-3)a_{2n-2} = (36(n-2)^2 - 1)a_{2n-4},$$

. . . . . .

$$9.2.1.a_2 = (9-1)a_0.$$

En multipliant ces relations membre à membre, nous obtenons de suite

$$a_{2n} = a_0 \frac{(36-1)(36.2^2-1)\ldots(36(n-1)^2-1)}{9^n.2n!},$$

et la série formée par les termes de rangs impairs est

$$a_0 S_1 = a_0 \left[1 - \sum_1^{\infty} \frac{(36-1)(36.2^2-1)\ldots(36(n-1)^2-1)}{9^n.2n!} x^{2n} \right]$$

Si nous revenons maintenant à la relation initiale et que nous y changions n en $2n+1$, nous aurons d'abord

$$9(2n+1)2na_{2n+1} = (9(2n-1)^2-1)a_{2n-1},$$

puis

$$9(2n-1)(2n-2)a_{2n-1} = (9(2n-3)^2-1)a_{2n-3},$$

. . . . . .

$$9.3.2a_3 = (9-1)a_1.$$

En multipliant ces relations membre à membre, nous avons aussi

$$a_{2n+1} = \frac{(9-1)(9.3^2-1)\ldots(9(2n-1)^2-1)}{9^n(2n+1)!} a_1,$$

et la série formée par les termes de rangs pairs est

$$a_1 S_2 = a_1 \left[x + \sum_1^{\infty} \frac{(9-1)(9.3^2-1)\ldots(9(2n-1)^2-1)}{9^n(2n+1)!} x^{2n+1} \right].$$

La série cherchée est donc

$$S = a_0 S_1 + a_1 S_2,$$

elle dépend de deux constantes arbitraires a_0 et a_1.

Pour $x = 0$, S se réduit à a_0, et, comme S doit être égal à 1, on a $a_0 = 1$.

Pour $x = 0$, S se réduit à a_1, et, comme S doit prendre la valeur $-\frac{1}{3}$, on a $a_1 = -\frac{1}{3}$.

La série cherchée S se réduit donc à $S = S_1 - \frac{1}{3} S_2$.

2° Dans chacune des séries, le rapport d'un terme au précédent est égal à $\frac{9(n-2)^2-1}{9n(n-1)} x^2$,

n étant pair ou impair. La limite de ce rapport est égale à x^2, quand n grandit indéfiniment. Elles ont donc pour intervalle de convergence commun l'intervalle $(-1, +1)$; par suite, la série formée par la combinaison $S_1 - \frac{1}{3} S_2$ admet aussi pour intervalle de convergence l'intervalle $(-1, +1)$, et, dans cet intervalle, la série représente une fonction

$$f(x) = S_1 - \frac{1}{3} S_2,$$

qui satisfait à l'équation différentielle, de même d'ailleurs que toutes les fonctions

$$a_0 S_1 + a_1 S_2.$$

3° Si nous posons $t = \varphi(x)$, nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \varphi'(x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \varphi'^2 + \frac{dy}{dt} \varphi'',$$

et l'équation différentielle devient

$$9(1 - x^2)\left(\frac{d^2y}{dt^2} \varphi'^2 + \frac{dy}{dt} \varphi'' \right) - 9x \frac{dy}{dt} \varphi' + y = 0.$$

Le coefficient de $\frac{d^2y}{dt^2}$ est $9(1 - x^2)\varphi'^2$, et, en l'égalant à une constante, nous avons $\varphi'(x) = \frac{C}{3\sqrt{1 - x^2}}$ ou $\varphi'(x) = \frac{C}{3\sqrt{x^2 - 1}}$, suivant que $|x| \leqq 1$.

Chacune de ces équations s'intègre à vue ; la première donne soit $\varphi(x) = \frac{C}{3} \arcsin x + C'$, soit $\varphi(x) = \frac{C}{3} \arccos x + C'$; en prenant la seconde solution, nous avons

$$\frac{C}{3} \arccos x + C' = t, \qquad x = \cos \frac{3}{C}(t - C').$$

Il est facile de vérifier que, pour toutes ces fonctions, $\varphi(x)$, le coefficient de $\frac{dy}{dt}$ est nul ; ce coefficient est en effet

$$9(1 - x^2)\varphi'' - 9x\varphi' ;$$

d'autre part,

$$\varphi'' = \frac{C}{3\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \varphi'' = \frac{Cx}{3(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} ;$$

la vérification est immédiate.

Ceci peut se voir encore en écrivant

$$9\varphi'^2(1 - x^2) = C^2,$$

et dérivant par rapport à x ; on obtient

$$18\varphi'\varphi''(1 - x^2) - 18x\varphi'^2 = 0,$$

ou

$$2\varphi'[9(1 - x^2)\varphi'' - 9x\varphi'] = 0.$$

Le résultat est établi.

La deuxième donne $\varphi(x) = \frac{C}{3} \mathrm{L}(x + \sqrt{x^2 - 1}) + C'$, et par suite,

$$\frac{C}{3} \mathrm{L}(x + \sqrt{x^2 - 1}) = t - C', \qquad x + \sqrt{x^2 - 1} = e^{\frac{3}{C}(t - C')}.$$

Nous avons donc aussi

$$x - \sqrt{x^2 - 1} = e^{-\frac{3}{C}(t - C')},$$

puis
$$x = \operatorname{ch}\frac{3}{C}(t - C').$$

Les transformations demandées sont donc toutes fournies par les deux formules
$$x = \cos\frac{3}{C}(t - C'), \qquad x = \operatorname{ch}\frac{3}{C}(t - C').$$

Pour l'une quelconque des transformations définies par la première formule, l'équation différentielle devient
$$C^2 y'' + y = 0$$
et s'intègre de suite : elle a pour solution générale
$$y = A\cos\frac{t}{C} + B\sin\frac{t}{C},$$
A et B étant des constantes arbitraires.

4° Si nous prenons $C = 1$, $C' = 0$, nous aurons $x = \cos 3t$, $y = A\cos t + B\sin t$; la fonction $y = \cos t + \sin t$ est donc l'une des solutions de l'équation différentielle. Pour prouver que l'arc de courbe représenté par l'équation $y = f(x)$ peut être représenté par les deux équations
$$x = \cos 3t, \qquad y = \cos t + \sin t,$$
dans un certain intervalle, il suffit de montrer que l'on peut trouver un intervalle pour t, tel que x croisse de -1 à $+1$ et qu'à son passage par 0, la fonction y prenne la valeur 1 et la fonction $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$ la valeur $-\frac{1}{3}$.

Or si on fait varier $3t$ de π à 2π, c'est-à-dire t de $\frac{\pi}{3}$ à $\frac{2\pi}{3}$, toutes les conditions sont réalisées ; car, pour $t = \frac{\pi}{2}$, ou $3t = \frac{3\pi}{2}$, on a $y = 1$, $\frac{dy}{dt} = -1$ et $t'_x = \frac{1}{3}$. On aperçoit que $t'_x = \frac{1}{3}$, en dérivant l'équation $x = \cos 3t$ par rapport à x ; ceci donne
$$1 = -3\sin 3t \cdot t'_x$$
et, pour $t = \frac{\pi}{2}$,
$$t'_x = \frac{1}{3}.$$

L'intervalle demandé est donc bien $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$.

5. La courbe (C) obtenue en ne limitant pas la variabilité du paramètre t, s'obtiendra tout entière en faisant varier t de 0 à 2π. Or si on change t en $\pi + t$, les valeurs de x et de y changent tout simplement de signes ; la courbe est symétrique par rapport à l'origine et il suffit de faire varier t de 0 à π. La fonction $x = \cos 3t$ part de 1, décroît, devient nulle pour $t = \frac{\pi}{6}$, décroît toujours jusqu'à $t = \frac{\pi}{3}$ où elle atteint la valeur -1, croît ensuite, redevient nulle pour $t = \frac{\pi}{2}$, continue à croître et devient égale à 1 pour $t = \frac{2\pi}{3}$, enfin elle décroît de nouveau, s'annule pour $t = \frac{5\pi}{6}$ et décroît jusqu'à -1, valeur qu'elle atteint pour $t = \pi$. Les valeurs remarquables de t qui correspondent à cette fonction sont donc 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$ et π. La fonction $y = \cos t + \sin t$ s'écrit
$$y = \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right);$$

elle croît jusqu'à $t = \frac{\pi}{4}$, s'annule pour $t = \frac{3\pi}{4}$, et, pour $t = \pi$, prend la valeur -1. Les valeurs remarquables de t sont donc, limites comprises,

$$0, \quad \frac{\pi}{6}, \quad \underline{\frac{\pi}{4}}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \underline{\frac{3\pi}{4}}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \pi;$$

nous avons souligné celles relatives à y. Il est alors facile de placer les points A, B, C, D, E, F, G, H, I, qui correspondent à ces valeurs de t et de tracer l'arc de courbe correspondant, puisqu'on sait comment varient x et y dans tous les intervalles signalés. La courbe s'achève alors par symétrie.

Pour préciser la forme de cette courbe, il faudrait placer les tangentes aux divers points que l'on a trouvés ; mais ceci est inutile dans la question actuelle, purement algébrique.

L'arc qui correspond à l'intervalle $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, c'est-à-dire qui est représenté par l'équation

$$y = f(x),$$

est l'arc DEF.

Si nous posons $y = h$, c'est-à-dire $\cos t + \sin t = h$, nous avons l'équation

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{h}{\sqrt{2}},$$

et nous savons que cette équation a deux solutions dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, tant que h est compris entre $-\sqrt{2}$ et $+\sqrt{2}$.

A cause de la symétrie, il nous suffira d'étudier les valeurs positives de h, de faire varier h de 0 à $\sqrt{2}$. Pour $h > 0$, l'équation envisagée a une racine positive α comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; les diverses valeurs de t sont donc fournies par les équations

$$t + \frac{\pi}{4} = \alpha + 2k\pi, \qquad t + \frac{\pi}{4} = (2k+1)\pi - \alpha, \qquad \text{ou} \qquad t = 2k\pi + \alpha - \frac{\pi}{4}, \qquad t = (2k+1)\pi - \alpha - \frac{\pi}{4}.$$

Tant que h est plus petit que 1, α est plus petit que $\frac{\pi}{4}$ et la première valeur de t est $2\pi - \alpha - \frac{\pi}{4}$; elle correspond à un point de l'arc G'H'A. Quand h est plus grand que 1, α est plus grand que $\frac{\pi}{4}$ et il faut prendre $k = 0$; la première valeur de t est $\alpha - \frac{\pi}{4}$; elle correspond à un point de l'arc ABC. L'autre valeur de t est toujours $\pi - \alpha - \frac{\pi}{4}$ et correspond à un point de l'arc CDEFG.

Les points M et M' ont donc pour abscisses $x = \cos 3\left(\pi - \alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, $x' = \cos 3\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, et la différence $x - x'$ est égale à

$$x - x' = -\cos\left(3\alpha + \frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(3\alpha - \frac{3\pi}{4}\right) = -2\cos 3\alpha \cos\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}\cos 3\alpha.$$

Or, on sait que $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = \cos\alpha(1 - 4\sin^2\alpha)$, d'autre part, $\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{2}}$, $\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{h^2}{2}}$; on a donc $x - x' = \sqrt{2 - h^2}(1 - 2h^2)$.

D'autre part, il est évident que l'aire balayée par le segment M'M quand h varie est donnée par l'intégrale définie $\int_0^{\sqrt{2}}(x-x')dh$; l'aire demandée, qui est le $\frac{1}{3}$ de celle-ci, est donc

$$\frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-h^2}\,(1-2h^2)\,dh.$$

Pour évaluer l'intégrale indéfinie $\int\sqrt{2-h^2}\,(1-2h^2)dh$, nous l'écrirons ainsi

$$\int\frac{(2-h^2)(1-2h^2)dh}{\sqrt{2-h^2}}, \qquad \int\frac{2-5h^2+2h^4}{\sqrt{2-h^2}}\,dh.$$

ou $\qquad 2I_0-5I_2+2I_4, \qquad$ en posant $\qquad I=\int\frac{h^2dh}{\sqrt{2-h^2}}$.

Il est facile alors de ramener les intégrales I_2 et I_4 à l'intégrale I_0, dérivons en effet $h\sqrt{2-h^2}$ et $h^3\sqrt{2-h^2}$, nous aurons

$$\frac{d}{dh}(h\sqrt{2-h^2})=\sqrt{2-h^2}-\frac{h^2}{\sqrt{2-h^2}}=\frac{2-2h^2}{\sqrt{2-h^2}},\quad \frac{d}{dh}(h^3\sqrt{2-h^2})=3h^2\sqrt{2-h^2}-\frac{h^4}{\sqrt{2-h^2}}=\frac{6h^2-4h^4}{\sqrt{2-h^2}}.$$

En intégrant, nous aurons donc

$$2I_0-2I_2=h\sqrt{2-h^2}, \qquad 6I_2-4I_4=h^3\sqrt{2-h^2}.$$

Il est visible que les seconds membres sont nuls aux deux limites, 0 et $\sqrt{2}$; les intégrales définies I_0, I_2 et I_4 sont donc liées par les relations $I_2=I_0$, $2I_4=3I_2$, et nous voyons que l'aire totale est nulle.

Pour expliquer ce résultat, il suffit de remarquer que tant que MM' est au-dessous du point double ω, l'aire qu'il décrit est positive, et qu'elle devient négative ensuite. L'aire de la boucle supérieure est donc égale en valeur absolue à celle qui est située au-dessous du point double ω ; or, au point double ω, MM' est nul, h est égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc l'aire totale est en valeur absolue

$$\frac{4}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{2-h^2}\,(1-2h^2)\,dh, \qquad \text{ou} \qquad \frac{4}{3}(2I_0-5I_2+2I_4).$$

Pour évaluer les nouvelles intégrales définies I_0, I_2, I_4, il suffit de faire $h=\frac{1}{\sqrt{2}}$ dans les formules de récurrence que nous avons trouvées ; nous obtenons ainsi

$$2I_0-2I_2=\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 6I_2-4I_4=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Multiplions la seconde par $-\frac{1}{2}$ et ajoutons à la première ; nous aurons

$$2I_0-5I_2+2I_4=\frac{\sqrt{3}}{8}.3.$$

L'aire totale est donc égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Remarque. — Nous avons admis que l'intervalle de convergence de la série totale est le même que celui qui est commun aux deux séries proposées. Il en est évidemment toujours ainsi quand on ajoute deux séries dont les termes ne se réduisent pas ; mais cela n'est plus certain quand les séries ont des termes semblables qui se réduisent entre eux ; tout ce qu'on peut affirmer c'est que l'intervalle de convergence de la somme des deux séries n'est pas moindre que celui qui est commun aux deux séries ; mais il peut être supérieur.

Il est facile de comprendre la raison de ce fait. Considérons deux séries convergentes dans l'intervalle $(-R, +R)$, $u_n=a_nx^n$ et $v_n=b_nx^n$. A l'intérieur de cet intervalle, les deux termes u_n et

v_n tendent vers 0 ; à l'extérieur ils deviennent infinis. Nous pouvons concevoir aisément que ces termes soient formés chacun de deux parties, l'une qui tend vers 0 à l'intérieur d'un intervalle $(-R', +R')$, plus grand que le précédent et l'autre qui devient infinie dès que $|x| > R$. Si les parties qui deviennent infinies ainsi dans u_n et v_n sont égales et de signes contraires, elles disparaissent dans la somme et la série $u_n + v_n$ admet pour intervalle de convergence $(-R', +R')$. Cette remarque s'étend aisément.

Bonnes solutions : MM. Soubaigné, à Mont-de-Marsan ; Amblard, à Ruines ; G. Lach, à Rodez ; A. Rousseau, à Fournes.
Assez bonnes solutions : MM. G. Fougry, à Reims ; Deperrois, à Chartres ; Lapagne, à Lyon.

1868. — *Un point matériel de masse unité* $M(x, y, z)$ *est soumis à une force* MF *qui a pour composantes*

$$X = -ax, \qquad Y = -by, \qquad Z = -cz,$$

où a, b, c *sont trois constantes positives données.*

1° *Calculer les coordonnées* x, y, z *en fonction du temps, connaissant la position initiale* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, *ainsi que la vitesse initiale* $M_0V_0(x'_0, y'_0, z'_0)$. *Conditions pour que le mouvement soit périodique.*

2° *Un second point matériel libre, de masse* 1, *se trouve coïncider constamment avec l'extrémité* F *de la force* MF. *Montrer que le point* F *obéit au même champ de force que le point* M, *et trouver la vitesse correspondant à la position initiale* F_0 *de ce point.*

3° *Plus généralement, montrer que tout point matériel* N, *de masse* 1, *placé initialement sur la droite* M_0F_0, *peut recevoir une vitesse initiale* N_0W_0 *telle qu'il reste constamment situé sur la droite* MF. — *On examinera le cas particulier où la position initiale* N_0 *du point* N *serait dans l'un des plans de coordonnées.*

4° *La position initiale* N_0 *variant sur la droite* M_0F_0, *trouver le lieu du point* W_0 *et le lieu de la droite* N_0W_0.

1. Les équations différentielles du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -ax, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -by, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -cz;$$

en représentant par α^2, β^2, γ^2 les trois constantes positives a, b, c, elles ont pour solutions

$$x = A\cos\alpha t + A'\sin\alpha t, \qquad y = B\cos\beta t + B'\sin\beta t, \qquad z = C\cos\gamma t + C'\sin\gamma t,$$

A, B et C étant des constantes arbitraires ainsi que A', B' et C'. En tenant compte des circonstances initiales du mouvement, les valeurs de x, y, z s'écrivent

$$(1) \quad x = x_0\cos\alpha t + \frac{x'_0}{\alpha}\sin\alpha t, \qquad y = y_0\cos\beta t + \frac{y'_0}{\beta}\sin\beta t, \qquad z = z_0\cos\gamma t + \frac{z'_0}{\gamma}\sin\gamma t.$$

Ce sont les équations du mouvement, et, en particulier, celles de la trajectoire.

En général, cette courbe est transcendante et le mouvement ne présente aucune périodicité.

Pour que le mouvement soit périodique, il faut qu'au bout d'un temps τ, après l'époque t, les valeurs de x, y, z se reproduisent exactement comme elles étaient à l'époque t, c'est-à-dire que les trois angles $\alpha\tau$, $\beta\tau$, $\gamma\tau$ soient des multiples de 2π, ou que l'on ait $\alpha\tau = 2k\pi$, $\beta\tau = 2k'\pi$, $\gamma\tau = 2k''\pi$. Les nombres α, β, γ doivent donc être proportionnels à des nombres entiers k, k', k'' : $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ doivent avoir entre elles des rapports commensurables. Et cela suffit évidemment.

2. Le point matériel de masse 1 placé en F a pour coordonnées

$$x_1 = x - ax = x(1-a), \qquad y_1 = y - by = y(1-b), \qquad z_1 = z - cz = z(1-c).$$

Il est animé d'un mouvement défini par ces trois équations, et la force qui le sollicite a pour composantes

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = (1-a)\frac{d^2x}{dt^2} = -ax(1-a) = -ax_1, \qquad \frac{d^2y_1}{dt^2} = (1-b)\frac{d^2y}{dt^2} = -by(1-b) = -by_1,$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} = c(1-c)\frac{d^2z}{dt^2} = -cz(1-c) = -cz_1;$$

c'est donc la force du champ. Sa vitesse à l'époque $t = 0$, dans la position F_0, a pour composantes

$$x_0'(1-a\rho), \qquad y_0'(1-b\rho), \qquad z_0'(1-c\rho).$$

3. Tout point N qui divise la force MF dans un rapport constant obéit aux mêmes lois ; car, si l'on appelle ρ le rapport $\frac{MN}{MF}$, les composantes de MN sont $-a\rho x$, $-b\rho y$, $-c\rho z$, et les coordonnées du point N, $x_2 = x(1-a\rho)$, $y_2 = y(1-b\rho)$, $z_2 = z(1-c\rho)$.

On a donc bien encore

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -ax_2, \qquad \frac{d^2y_2}{dt^2} = -by_2, \qquad \frac{d^2z_2}{dt^2} = -cz_2.$$

Si donc on choisit le point N_0 de M_0F_0, pour lequel le rapport $\frac{M_0N_0}{M_0F_0}$ soit égal à ρ et qu'on lui communique la vitesse initiale $x_0'(1-a\rho)$, $y_0'(1-b\rho)$, $z_0'(1-c\rho)$, il coïncidera constamment avec le point N.

Le point N_0 sera dans l'un des plans de coordonnées si l'on a $\rho = \frac{1}{a}$, $\rho = \frac{1}{b}$ ou $\rho = \frac{1}{c}$. Le point correspondant N restera alors continuellement dans le plan de coordonnées où il est au départ.

Nous voyons ainsi que la droite MF est divisée par le point N et les trois plans de coordonnées en segments dont le rapport est constant. Ceci apparaît encore immédiatement si l'on remarque que la droite MF reste constamment normale aux surfaces de niveau du champ, et que celles-ci sont des ellipsoïdes

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = C^2.$$

4. Les composantes du vecteur vitesse au point N_0 sont

$$x_0'(1-a\rho), \qquad y_0'(1-b\rho), \qquad z_0'(1-c\rho);$$

les coordonnées du point W_0 sont donc

$$x = (x_0 + x_0')(1-a\rho), \qquad y = (y_0 + y_0')(1-b\rho), \qquad z = (z_0 + z_0')(1-c\rho),$$

et il est visible que le lieu de ce point est une droite qui passe au point $x_0 + x_0'$, $y_0 + y_0'$, $z_0 + z_0'$, et qui a pour paramètres directeurs $a(x_0 + x_0')$, $b(y_0 + y_0')$, $c(z_0 + z_0')$.

Les équations de la droite N_0W_0 sont

$$\frac{x - x_0(1-a\rho)}{x_0'(1-a\rho)} = \frac{y - y_0(1-b\rho)}{y_0'(1-b\rho)} = \frac{z - z_0(1-c\rho)}{z_0'(1-c\rho)};$$

il est visible qu'elle est parallèle à un plan fixe, le plan

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ ax & by_0' & cz_0' \end{vmatrix} = 0,$$

et, comme elle s'appuie sur deux droites fixes, la droite M_0F_0 et le lieu du point W_0, elle engendre un paraboloïde hyperbolique, défini par un plan directeur et deux directrices rectilignes.

Bonnes solutions : MM. Soubaigné, à Mont-de-Marsan ; G. Lagh, à Rodez ; A. Boisseau, à Fournes ; Ambarde, à Rennes ; Laucagne, à Lyon ; M. Felicien, à Lainage ; L. Bérin, à Trévoux.

Assez bonnes solutions : MM. Nicolas, à Lille ; Deperrois, à Chartres.

1871. — *Un système centré est formé d'une lentille convergente* NN′ *et d'un miroir concave* M ; F *et* F′ *sont les foyers de la lentille qui a pour points nodaux* N *et* N′ ; F_1 *est le foyer du miroir ; les points se succèdent dans l'ordre* F, N, N′, F′, F_1, M. *On donne la distance focale* ρ *de la lentille, celle du miroir*

φ_1 *et l'écartement* $F'F_1 = \varepsilon$. *La lumière issue d'un objet lumineux rencontre d'abord la lentille, puis le miroir, puis de nouveau la lentille pour former l'image que l'on considère.*

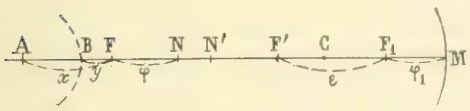
1° *Trouver les deux points de l'axe pour lesquels l'objet et son image sont confondus ; discuter le problème.*

2° *Application. Calculer la distance* δ *de ces deux points pour* $\varphi = 1000$, $\varphi_1 = 1000$, $\varepsilon = 200$.

3° *Le miroir et la lentille sont montés sur un tube à tirage gradué en millimètres. On mesure les valeurs* δ_1, δ_2, δ_3 *de la distance* δ *pour les trois lectures* λ_1, λ_2, λ_3 *du tirage. En déduire les distances focales* φ *et* φ_1 *supposées inconnues.*

1. Soient x et y les distances des deux points cherchés A et B au foyer F.

On sait que le système équivaut à un miroir sphérique dont le centre et le sommet sont respectivement conjugués du centre C et du sommet M du miroir donné par rapport à la lentille. Les deux points cherchés sont précisément le centre et le sommet du miroir équivalent. Alors l'application de la formule de Newton,



$$\varphi\varphi' = -f^2,$$

donne

$$FA.F'C = -\varphi^2, \qquad x(-\varepsilon+\varphi_1) = -\varphi^2, \qquad x = \frac{\varphi^2}{\varepsilon-\varphi_1}.$$

$$FB.F'M = -\varphi^2, \qquad y(-\varepsilon-\varphi_1) = -\varphi^2, \qquad y = \frac{\varphi^2}{\varepsilon+\varphi_1}.$$

Autrement : on peut considérer les images successives du point cherché et écrire que la dernière coïncide avec le point objet. La première réfraction dans la lentille donne une image située à une distance x' de F′ telle que

$$xx' = -\varphi^2.$$

Cette première image est à une distance $x'+\varepsilon$ du foyer F_1 et donne dans le miroir une image située à une distance x'' de ce foyer telle que

$$(x'+\varepsilon)x'' = \varphi_1^2.$$

Enfin cette seconde image est à une distance $x''-\varepsilon$ du foyer F′ et donne, par une nouvelle réfraction dans la lentille, une dernière image qui doit être à une distance x de F ; donc

$$(x''-\varepsilon)x = -\varphi^2.$$

L'élimination de x' et de x'' entre ces trois équations donne

$$\left(-\frac{\varphi^2}{x}+\varepsilon\right)\left(-\frac{\varphi^2}{x}+\varepsilon\right) = \varphi_1^2,$$

d'où les deux solutions

$$-\frac{\varphi^2}{x}+\varepsilon = \varphi_1 \qquad \text{et} \qquad -\frac{\varphi^2}{x}+\varepsilon = -\varphi_1,$$

identiques aux solutions déjà trouvées.

Discussion. — Si le miroir M est très loin, l'image A de C et l'image B de M sont très voisines de F et placées dans le même ordre que C et M ; le miroir qui équivaut au système est un très petit miroir concave. Si M s'approche en se déplaçant vers la gauche, A et B se déplacent dans le même sens, A plus vite que B. Quand C est en F' ($\varepsilon = \varphi_1$) son image est partie à l'infini, le miroir équivalent est plan. Puis ce miroir équivalent, se déplaçant toujours vers la gauche, devient convexe et, pour $\varepsilon = 0$, $x = -\frac{\varphi^2}{\varphi_1}$ et $y = \frac{\varphi^2}{\varphi_1}$, le centre et le sommet sont symétriques par rapport au point F qui devient, par conséquent, foyer du miroir convexe.

2. La distance δ est égale à $x-y$, d'où, en remplaçant x et y par leurs expressions et intro-

duisant les données numériques,

$$\delta = \frac{\varphi^2}{\varepsilon - \varphi_1} - \frac{\varphi^2}{\varepsilon - \varphi_1} = \frac{2\varphi_1\varphi^2}{\varepsilon^2 - \varphi^2} = \frac{2 \times 10 \times 100}{400 - 100} = \frac{20}{3}.$$

3. Si ε est la valeur de la distance F_1F' qui correspond à la lecture λ_1 et si l'on pose $a = \lambda_2 - \lambda_1$ et $b = \lambda_3 - \lambda_1$ on a successivement

$$(1)\quad \delta_1 = \frac{2\varphi_1\varphi^2}{\varepsilon^2 - \varphi_1^2}, \qquad (2)\quad \delta_2 = \frac{2\varphi_1\varphi^2}{(\varepsilon + a)^2 - \varphi_1^2}, \qquad (3)\quad \delta_3 = \frac{2\varphi_1\varphi^2}{(\varepsilon + b)^2 - \varphi_1^2}.$$

Eliminons φ^2 en combinant (1) et (2), puis (1) et (3) ; il vient

$$(\delta_2 - \delta_1)\varphi_1^2 = \delta_2(\varepsilon + a)^2 - \delta_1\varepsilon^2,$$
$$(\delta_3 - \delta_1)\varphi_1^2 = \delta_3(\varepsilon + b)^2 - \delta_1\varepsilon^2.$$

Eliminons φ_1^2 :

$$(\delta_2 - \delta_1)[\delta_3(\varepsilon + b)^2 - \delta_1\varepsilon^2] = (\delta_3 - \delta_1)[\delta_2(\varepsilon + a)^2 - \delta_1\varepsilon^2].$$

Le terme en ε^2 disparaît et, si l'on pose $\alpha = \delta_2 - \delta_1$, $\beta = \delta_3 - \delta_1$, il vient

$$2[\alpha b\delta_3 - \beta a\delta_2] = \beta a^2\delta_2 - \alpha b^2\delta_3.$$

Cette équation permet de calculer ε.

On calculera ensuite φ_1 avec $\delta_1 = \frac{2\varphi_1\varphi^2}{\varepsilon^2 - \varphi_1^2}$ en prenant la racine positive, puisque le miroir est concave.

Enfin, on calculera φ avec $\delta_1 = \frac{2\varphi_1\varphi^2}{\varepsilon^2 - \varphi_1^2}$ en prenant la racine positive, puisque la lentille est convergente.

1872. — *On donne une solution aqueuse de potasse et de soude qu'on utilise pour les deux opérations suivantes :*

On en prend 100^{cm^3} *que l'on chauffe, en y dégageant un courant de chlore jusqu'à ce que celui-ci cesse d'être absorbé ; on évapore alors à sec le produit de la réaction et on le chauffe progressivement jusqu'à une température suffisamment élevée pour qu'il ne laisse plus dégager de gaz. Le poids du résidu ainsi obtenu est de* 10 *grammes, et il s'est dégagé un volume* V *de gaz pendant la calcination.*

Cet ensemble d'opérations a finalement transformé les 100^{cm^3} *de la solution initiale en un mélange solide de chlorures de potassium et de sodium. On dissout ce mélange dans* 500^{cm^3} *d'eau, lesquels sont contenus dans un calorimètre ; dans ces conditions, on observe que la température du liquide s'abaisse de* 15° *à* 14°,26.

Déduire de ces deux résultats les proportions respectives de potasse et de soude contenues dans un litre de la solution.

Calculer, à 0° *et* 760^{mm}, *le volume* V *de gaz dont il est question dans la première opération.*

Poids atomiques : K = 39, Na = 23, O = 16, H = 1, Cl = 35,5.

Chaleurs moléculaires de dissolution : KCl = — 4,39, NaCl = — 1,26, *évaluées en grandes calories par molécule-gramme de substance.*

Calorimètre et accessoires évalués en eau : 5 *grammes.*

N. B. — Pour simplifier les calculs, on admettra que la dissolution des chlorures ne modifie pas le volume de l'eau et que la chaleur nécessaire pour élever de 1° *la température de* 1^{cm^3} *de la solution soit égale à l'unité.*

Si l'on croyait en avoir besoin, on prendrait la densité de l'hydrogène égale à 0,0692.

Les réactions qui s'effectuent successivement sont représentées par les équations

$$6NaOH + 6Cl = 5NaCl + ClO^3Na + 3H^2O,$$
$$6KOH + 6Cl = 5KCl + ClO^3K + 3H^2O,$$
$$ClO^3Na = NaCl + 3O,$$
$$ClO^3K = KCl + 3O.$$

Une molécule de soude ou de potasse donne dans le résidu final une molécule de chlorure de sodium ou de potassium et si x et y désignent les fractions de molécule de soude et de potasse contenues dans 100^{cm3} de la solution, le mélange final contient $x\text{NaCl} + y\text{KCl}$. Remplaçons les symboles NaCl et KCl par les poids qu'ils représentent et exprimons que le mélange pèse 10^g ; on a une première équation

$$(1) \qquad 58,5x + 74,5y = 10.$$

La température du calorimètre s'est abaissée de $0^\circ,74$; sa valeur en eau est $500 + 5 = 505$; il y a donc eu absorption de $505 \times 0,75 = 373,7$ calories-grammes. Or la dissolution du chlorure de sodium a absorbé $1260x$ calories, celle du chlorure de potassium $4390y$; donc

$$(2) \qquad 1260x + 4390y = 373,7.$$

La résolution des équations (1) et (2) donne

$$x = 0,0987, \qquad y = 0,0568.$$

Dans un litre de la solution, il y a un poids de soude

$$0,987 \times 40 = 39,48,$$

un poids de potasse

$$0,568 \times 56 = 31,81.$$

D'autre part, chaque molécule de soude ou de potasse donne à la calcination un demi-atome d'oxygène. Le volume V se compose donc de $\frac{x+y}{2}$ atomes et comme le volume atomique est de 11,2, on a

$$V = \frac{1}{2}(0,0987 + 0,0568) \times 11,2 = 0,871.$$

LOUIS PERRIN, à Trévoux.

Bonnes solutions de MM. A. CHAILLET, à Paris ; G. LACH, à Rodez ; G. OLLIER ; J. SOUBALONE, à Mont-de-Marsan.

QUESTIONS PROPOSÉES

1926. — On donne le cercle C de centre O et de rayon R et son diamètre fixe AA'. M étant un point variable de ce cercle et H sa projection orthogonale sur AA', sur la tangente en M on prend les points P et P' tels que $MP = MP' = MH$.

Le point M parcourant le cercle :

1° Les points P et P' décrivent deux cardioïdes.

2° Les tangentes en P et P' à ces cardioïdes sont rectangulaires, elles se coupent en T, les normales aux mêmes points se coupent en N. Le point T décrit une épicycloïde à deux rebroussements.

Enveloppe du centre de diamètre PP'.

Enveloppe de TN (épicycloïde à deux rebroussements).

3° Enveloppes de PH et P'H (hypocycloïdes à trois rebroussements).

4° Enveloppe de QQ', Q et Q' étant les points de contact de PH et PH' avec leurs enveloppes (hypocycloïde à quatre rebroussements).

M. CARRÉTIÉ.

1927. — On considère un cercle Γ dont l'équation dépend d'un seul paramètre ; il existe une famille de courbes, qui sont les trajectoires orthogonales de ce cercle variable. On demande :

1° Le lieu des points d'inflexion de ces trajectoires ;

2° Le lieu des centres de courbure des trajectoires, aux points où elles coupent orthogonalement le cercle variable dans l'une de ses positions.

A. BUHOTE.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1861. — *Enveloppe des coniques ayant un foyer fixe, la longueur du grand axe constante et dont le deuxième foyer décrit une droite ou un cercle. Cas particuliers.*

1. Prenons pour origine le foyer fixe, pour axe des x une perpendiculaire à la droite donnée D, et, pour axe des y, une parallèle à cette droite.

Soit $x = d$ l'équation de la droite D. Les deux foyers de la conique ont pour équations tangentielles $w = 0$ et $du + \lambda v - w = 0$. L'équation de la conique est alors

$$w\,du + \lambda v - w(v + w) = 0.$$

Pour exprimer que le grand axe a une longueur constante, nous allons former les tangentes aux extrémités de ce grand axe et calculer la distance qui les sépare. Or le second foyer a pour coordonnées d et λ ; l'équation de la tangente en un sommet du grand axe est donc $dx + \lambda y + p = 0$.

Ecrivons que ses coordonnées vérifient l'équation tangentielle de la conique, nous avons

$$p(d^2 + \lambda^2 - p) + \lambda(d^2 + \lambda^2) = 0, \qquad \text{ou} \qquad p^2 - p(d^2 + \lambda^2) + \lambda(d^2 + \lambda^2) = 0,$$

par suite, $p + p' = (d^2 + \lambda^2)$, $pp' = \lambda(d^2 + \lambda^2)$, $p - p' = \sqrt{(d^2 + \lambda^2)^2 - 4\lambda(d^2 + \lambda^2)}$.

D'autre part, il est évident que la distance des deux droites est égale à

$$\frac{p - p'}{\sqrt{d^2 + \lambda^2}};$$

en appelant $2a$ la longueur du grand axe, nous avons donc

$$4a^2 = (d^2 + \lambda^2 - 4\lambda), \qquad \lambda = \frac{d^2 + \lambda^2}{4} - a^2.$$

L'équation tangentielle des coniques du faisceau est

$$4w\,du + \lambda v - w(v + w) - (d^2 + \lambda^2) - 4a^2(v + w) = 0.$$

Nous aurons l'enveloppe de ces coniques en écrivant que les deux coniques tangentes à une droite (u, v, w) sont confondues, c'est-à-dire que l'équation en λ a une racine double. Ceci nous donne

$$4v^2w^2 - w^2 + v^2 - 4w^2\,du - w(v + w)(d^2 - 4a^2)(v^2 + w^2) = 0.$$

ou

$$4w^2v^2 - 4du\,w^2 - v(v + w)(d^2 - 4a^2)(v^2 + w^2) = 4w^2(u - v)^2.$$

Cette équation se décompose immédiatement en deux équations du second degré

$$2uw + d\,w^2 + v(v + w) = 2v(u - v).$$

Ce sont les équations des deux paraboles ayant l'origine pour foyer et Ox pour axe ; l'une d'elles,

$$(2a - d)(u - v) + 2uw = 0,$$

est tangente à la droite

$$v - \frac{2a - d}{2} = 0 ;$$

l'abscisse du sommet est donc $\dfrac{2a + d}{2}$, le paramètre, $2a + d$, et l'équation ponctuelle est

$$y^2 + 2(2a + d)x - (2a + d)^2 = 0.$$

L'autre a pour équation ponctuelle

$$y^2 + 2(d - 2a)x - (d - 2a)^2 = 0.$$

2. Pour traiter le second problème, nous placerons le centre du cercle fixe sur Ox et nous prendrons pour équation de ce cercle

$$(x - d)^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Soit alors (α, β) le foyer mobile qui décrit ce cercle ; l'équation tangentielle de la conique cherchée est

$$w(\alpha u + \beta v + w) + \lambda(u^2 + v^2) = 0,$$

avec la relation

$$(\alpha - d)^2 + \beta^2 = R^2.$$

La tangente à l'extrémité du grand axe a pour équation

$$\alpha x + \beta y + p = 0,$$

et l'on a

$$p^2 + p(\alpha^2 + \beta^2) + \lambda(\alpha^2 + \beta^2) = 0, \qquad p + p' = -\alpha^2 - \beta^2,$$
$$pp' = \lambda(\alpha^2 + \beta^2), \qquad (p - p')^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\lambda(\alpha^2 + \beta^2),$$

la distance des deux tangentes est

$$\frac{p - p'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 2a :$$

par conséquent

$$4a^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 4\lambda, \qquad \lambda = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} - a^2.$$

Le faisceau de coniques a donc pour équation

$$w(\alpha u + \beta v + w) + \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} - a^2\right)(u^2 + v^2) = 0,$$

avec la relation

$$(\alpha - d)^2 + \beta^2 - R^2 = 0.$$

Nous aurons l'enveloppe de ces coniques en écrivant que les deux qui sont tangentes à une droite (u, v, w) sont confondues.

Regardons alors α et β comme coordonnées courantes ; les deux équations précédentes représentent deux cercles qui doivent être tangents. Or le premier a pour centre et rayon $(d, 0)$ et R ; le second, $\left(-\frac{2uw}{u^2 + v^2}, \quad -\frac{2vw}{u^2 + v^2}\right)$ et $2a$.

Nous aurons donc la condition en écrivant que la distance des centres est égale à la somme ou à la différence des rayons, ce qui donne

$$\left(\frac{2uw}{u^2 + v^2} + d\right)^2 + \frac{4v^2w^2}{(u^2 + v^2)^2} = (2a \pm R)^2.$$

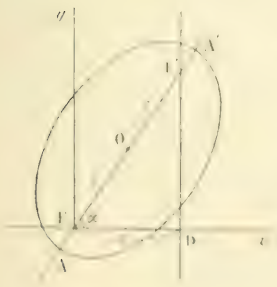
L'enveloppe se compose donc des deux coniques

$$4w^2 + 4duw = (u^2 + v^2)[(2a \pm R)^2 - d^2].$$

Ce sont deux coniques ayant pour foyers le point O et le centre du cercle. Il serait facile d'avoir les sommets situés sur l'axe focal et de voir, par suite, de quelle nature est chacune de ces coniques.

Deuxième solution. — Nous avons reçu de M. E. N. Barisien une excellente solution par les coordonnées polaires et que voici :

I. — *Cas où le deuxième foyer F′ décrit une droite.* — Prenons pour pole des coordonnées le foyer fixe F et pour axe polaire la perpendiculaire FD abaissée de F sur la droite.



Supposons que la conique de foyers F et F′ est une ellipse dont les longueurs des axes soient $2a$ et $2b$, et $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Soient $FD = d$, $\widehat{FFD} = \alpha$.

L'équation polaire de l'ellipse est

$$(1) \qquad \rho = \frac{b^2}{a - c\cos(\theta - \alpha)}.$$

α est constant. Le triangle FF′D donne $\rho = 2c\cos\alpha$, d'où

$$(2) \qquad = \frac{d}{2\cos\alpha}$$

et

$$(3) \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - \frac{d^2}{4\cos^2\alpha}} = \frac{\sqrt{4a^2\cos^2\alpha - d^2}}{2\cos\alpha}$$

Il en résulte que l'équation (1) devient, en fonction du seul paramètre variable α,

$$\rho = \frac{a - \dfrac{d^2}{4\cos^2\alpha}}{a - \dfrac{d}{2\cos\alpha}\cos(\omega - \alpha)}, \qquad \text{ou} \qquad \rho = \frac{a^2 - \dfrac{d^2}{4}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}{a - \dfrac{d}{2}(\cos\omega + \sin\omega\operatorname{tg}\alpha)}.$$

En ordonnant par rapport à $\operatorname{tg}\alpha$, on a

$$d^2\operatorname{tg}^2\alpha - 2d\rho\sin\omega\operatorname{tg}\alpha + 2\rho(2a - d\cos\omega) + d^2 - 4a^2 = 0.$$

L'équation de l'enveloppe est donc

$$(4) \qquad 2\rho(2a - d\cos\omega) + d^2 - 4a^2 - \rho^2\sin^2\omega = 0.$$

Elle devient, en coordonnées rectilignes,

$$4a\sqrt{x^2 + y^2} = y^2 + 2dx + 4a^2 - d^2,$$

ou

$$(5) \qquad (y^2 + 2dx + 4a^2 - d^2)^2 = 16a^2(x^2 + y^2).$$

Cette courbe semble être une quartique. Cependant, si on ordonne l'équation par rapport à y^2, elle devient

$$y^4 + 2y^2(2dx - 4a^2 - d^2) + (2dx + 4a^2 - d^2)^2 - 16a^2x^2 = 0,$$

d'où, en la résolvant par rapport à y^2,

$$y^2 = -(2dx - 4a^2 - d^2) \pm \sqrt{(2dx - 4a^2 - d^2)^2 - (2dx + 4a^2 - d^2)^2 + 16a^2x^2},$$

ou

$$y^2 = -(2dx - 4a^2 - d^2) \pm \sqrt{16a^2(x^2 - 2dx + d^2)} = -(2dx - 4a^2 - d^2) \pm 4a(x - d).$$

En tenant compte du signe $+$ ou $-$, on voit que la quartique (5) se décompose en deux paraboles dont les équations sont

$$(6) \qquad y^2 = 2(2a - d)x + (2a - d)^2,$$

$$(7) \qquad y^2 = -2(2a + d)x + (2a + d)^2.$$

Ces deux paraboles ont leur foyer commun en F.

Si $d = 2a$, ces deux paraboles deviennent

$$y^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad y^2 = -8ax + 16a^2.$$

Si $d = -2a$, elles se réduisent à

$$y^2 = 8ax + 16a^2 \qquad \text{et} \qquad y^2 = 0.$$

On traiterait de la même manière le cas où le second foyer F′ décrit un cercle.

E.-N. BARISIEN.

M. Barisien fait remarquer avec juste raison que, dans le cas où le point F′ décrit une droite, le lieu du centre, les lieux des sommets, les enveloppes des axes peuvent s'obtenir facilement.

Le lecteur pourra s'exercer sur ce point et traiter les mêmes questions dans le second cas.

Solution géométrique. — M. Marescalchi nous a fait parvenir la solution suivante :

Etudions d'abord le cas où la trajectoire du foyer mobile est une droite. Dans ce cas, la conique mobile touche son enveloppe en deux points M et M′ situés sur la perpendiculaire à sa trajectoire menée par le foyer mobile.

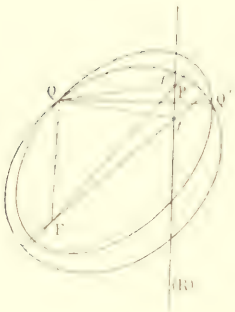


Fig. 1.

Fig. 1′.

En effet, soient (*fig.* 1 et *fig.* 1′) F le foyer fixe, f le foyer mobile, et considérons deux positions de la conique indiquée qui ont pour points communs les points Q et Q′. D'après les données, nous avons

$$QF + Qf = 2a, \qquad QF + Qf = 2a,$$

ou

$$|QF - Qf| = 2a, \qquad |QF - Qf| = 2a;$$

dans les deux cas, $Qf = Qf$; de même $Qf = Qf$, et les deux points Q et Q′ sont sur la perpendiculaire au milieu de ff'. A la limite les points f et f' coïncident, les points Q et Q′ deviennent les deux points caractéristiques de l'enveloppe, M et M′. La propriété est démontrée.

On démontrera de même que, lorsque le foyer mobile se meut sur un cercle de centre S, les deux points caractéristiques de la conique enveloppée sont situés sur le rayon du cercle S qui passe au foyer mobile f.

Revenons maintenant au cas où la conique mobile O′ a un foyer f', mobile sur une droite fixe (R), et appelons M un point de l'enveloppe (*fig.* 2, 3, 4). Nous avons $MF \pm Mf' = 2a$.

Traçons alors deux droites parallèles à (R) et telles que leurs distances à (R) soient égales à $2a$. Soient (D) et (D′) ces deux droites. La distance du point M à l'une de ces droites est $2a \pm Mf'$; c'est $2a + Mf'$ pour l'une, et $2a - Mf'$ pour l'autre. Si la conique O′ est une hyperbole, c'est la première qui est égale à MF; si c'est une ellipse, c'est la seconde.

Chacun des points M et M′ décrit donc une parabole ayant pour foyer le point F et pour directrice l'une des droites

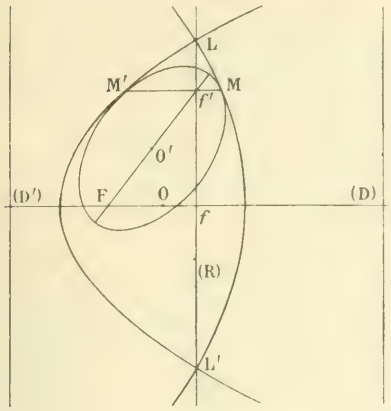


Fig. 2.

Fig. 3.

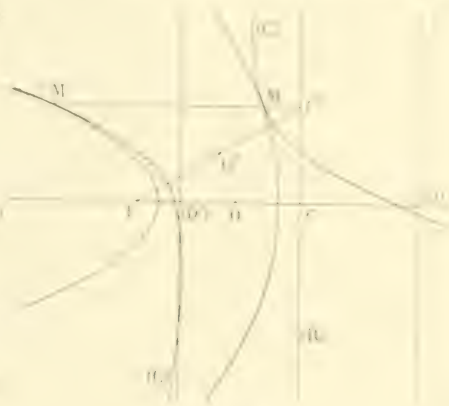


Fig. 4.

et (D′) ; ces points décrivent deux paraboles différentes.

Si la distance du point F à la droite (R), Ff, est plus petite que $2a$, les deux paraboles se coupent sur la droite (R) en deux points, L et L′, tels que FL et FL′ soient égaux à $2a$. Quand le point f' est entre L et L′, la conique mobile est une ellipse ; quand le point f' est en dehors de ce segment, la conique O′ est une hyperbole (fig. 2 et 3).

Si cette distance Ff est plus grande que $2a$, les deux paraboles ont leurs concavités tournées dans le même sens et ne se coupent pas. La conique O′ est toujours une hyperbole.

Si F$f = 2a$, la conique O′ est toujours une hyperbole aussi ; cette hyperbole a une asymptote parallèle à Ff et l'un des points M et M′ est toujours à l'infini ; l'autre enveloppe l'unique parabole qui reste.

Supposons maintenant que le foyer mobile de la conique O′, le point f', décrive un cercle de centre S et de rayon r. Il y a alors plusieurs cas à distinguer suivant la grandeur de FS $+ r$ ou de FS.

Premier cas : FS $> r > 2a$. Le centre S est alors tout entier à l'intérieur du cercle décrit de F comme centre avec $2a$ comme rayon, la conique mobile est toujours une ellipse, et l'on a MF $+$ Mf $= 2a$, MF $+$ MS $= 2a + r$,
par conséquent (*fig.* 5),

MF $+$ MS $= 2a + r$, MF $+$ MS $= 2a + r$.

Les deux points M et M′ décrivent deux ellipses ayant pour foyers les points F et S.

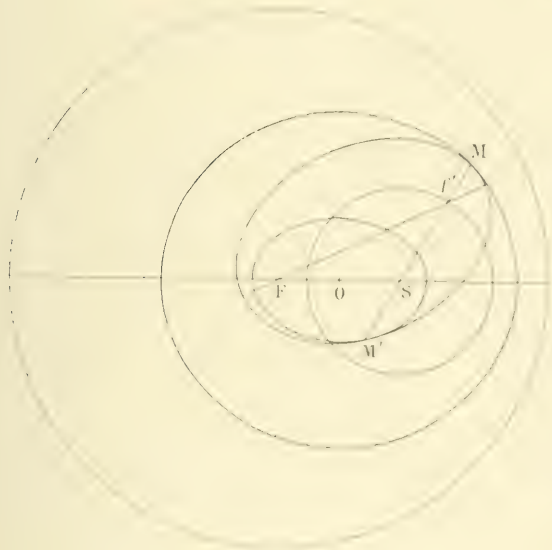


Fig. 5.

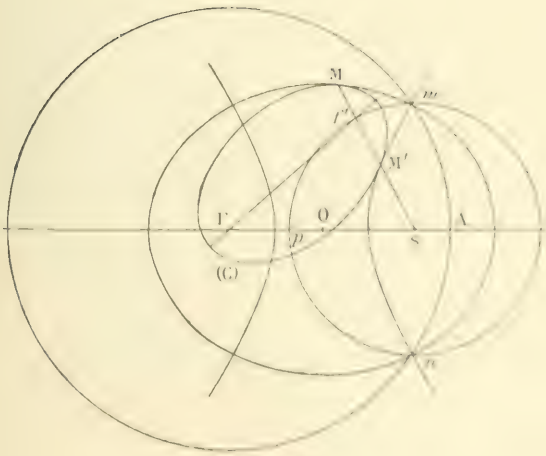


Fig. 6

Fig. 7

Deuxième cas : $|2a - r| < FS < 2a + r$.

Le cercle S coupe le cercle F de rayon $2a$ (*fig.* 6 et 7) en deux points m et n. Quand le point f est intérieur au cercle F, la conique O′ est une ellipse ; quand le point f est extérieur au cercle F, la conique O′ est une hyperbole. L'enveloppe totale se compose d'une ellipse et d'une hyperbole ayant toutes deux pour foyers les points F et S.

Troisième cas. — Si les deux cercles F et S sont extérieurs l'un à l'autre, $FS > 2a + r$, la conique O′ est toujours une hyperbole, et l'enveloppe se compose de deux hyperboles ayant pour foyers les deux points F et S.

Le lecteur étudiera lui-même les deux derniers cas, ainsi que les cas particuliers où $r = 2a$.

MARESCALCHI.

Bonnes solutions : MM. Névejans, 27e d'artillerie ; G. Ollier.

Assez bonnes solutions : MM. G. Foucry, à Reims ; A. Rousseau, à Fournes ; Soubaigné, à Mont-de-Marsan.

ÉCOLE CENTRALE (1910)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Suite.*)

5130. — Etudier les équations :

$$x^3 + x - 3 = 0, \quad x^3 + x - 5 = 0, \quad x^3 - 8x + 8 = 0, \quad x^3 + 4x + 1 = 0,$$
$$x^5 + 5x + 1 = 0, \quad x^5 - 10x^2 + 3 = 0, \quad x^3 + x^2 + 1 = 0, \quad x^3 + 6x^2 + 7 = 0,$$
$$x^3 + 3x^2 - 3x + 7 = 0, \quad x^3 + 3x^2 + m = 0, \quad x^3 + 3x^2 + 2 = 0, \quad mx^3 + 4mx^2 + x^3 + x^2 + m = 0.$$

5131. — Nombre de racines réelles de l'équation $x^4 + 4ax + b = 0$.

5132. — Nombre des racines réelles de l'équation $x^3 - 5x^2 + 1 = 0$. Nombre des racines comprises entre -2 et $+2$. Calculer la racine comprise entre -2 et 0.

5133. — On donne l'équation $2x^3 + 4x - 11 = 0$. Calculer la racine à l'aide de la méthode des parties proportionnelles.

5134. — Appliquer la méthode de Newton aux équations :

$$x^2 - 88 = 0, \quad x^2 - 241 = 0, \quad x^2 - 234 = 0, \quad x^3 - 248 = 0, \quad x^3 - 308 = 0, \quad x^4 - 376 = 0.$$

Calcul approximatif de la racine au moyen de la règle à calcul.

5135. — Résoudre les inégalités $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 4} > 0$, $\dfrac{x^2}{3x - 2} < 1$

5136. — Résoudre l'équation $\sqrt{x} = \sqrt{x - a} + \sqrt{x - b}$.

5137. — Décomposer en éléments simples les fractions suivantes

$$\frac{1}{x^2(x-1)}, \quad \frac{1}{x(x-1)^2}, \quad \frac{1}{x(x^2+3x-12)}, \quad \frac{1}{x(x^2+2x-72)}$$

5138. — Primitives des fonctions suivantes :

$y' = \cos^2 x$, $y' = \cos^3 x$, $y' = \sin^3 x$, $y' = \sin^4 x$, $y' = \cos^4 x$,

$y' = \cos^5 x$, $y' = \sin 2x . \sin x$, $y' = \sin 2x . \sin 3x$, $y' = \operatorname{tg} x$, $y' = \operatorname{tg}^2 x$,

$y' = \operatorname{tg}^3 x$, $y' = \dfrac{1}{1 + \cos^2 x}$, $y' = \dfrac{1}{2 + \cos x}$, $y' = \dfrac{1}{1 + 3x}$, $y' = \dfrac{1}{3x^2 + 4}$,

$y' = \dfrac{1}{3x^2 + 10}$, $y' = \dfrac{3}{4 + 5x^2}$, $y' = \dfrac{4}{7 + 8x^2}$, $y' = \dfrac{5}{8 + 6x^2}$, $y' = \dfrac{1}{4x^2 - 4}$,

$y' = \dfrac{x^2}{x^2 + 3x + 4}$, $y' = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$, $y' = \dfrac{x}{5x^2 - x + 1}$, $y' = \dfrac{1}{x^2 - 64}$, $y' = \dfrac{1}{x^2 + 1}$,

$y' = \dfrac{1}{8x^3 + 1}$, $y' = \dfrac{x}{8x^3 + 1}$, $y' = \dfrac{8x}{8x^3 - 1}$, $y' = \dfrac{x}{x^3 - 1}$, $y' = \dfrac{x^2}{x^3 + 27}$,

$y' = \dfrac{1}{2x^3 + 3x - 5}$, $y' = \dfrac{x}{2x^3 - x^2 - 1}$, $y' = \dfrac{x^2}{3x^2 + x + 1}$, $y' = \dfrac{x}{x^3 - 3x + 2}$, $y' = \dfrac{x^2}{x^3 + 3x^2 - 4}$,

$y' = \dfrac{x^3}{(x-1)^2(x-2)}$, $y' = \dfrac{x}{x^3 + 5x - 6}$, $y' = \dfrac{x^2}{x^3 - 1}$, $y' = \dfrac{1}{x^3 + 1}$, $y' = \dfrac{1}{x(x^4 + 1)}$,

$y' = \dfrac{1}{x^5 - 1}$, $y' = \dfrac{1}{x^3 + 4x - 5}$, $y' = \dfrac{1}{x(x^2 - 2x - 12)}$, $y' = \dfrac{4x - 5}{x(x^2 + 3x - 70)}$, $y' = \dfrac{1}{(1 + x^2)^2}$,

$y' = \sqrt{\dfrac{2 + x}{2 - x}}$, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{8 - 6x^2}}$, $y' = \dfrac{3x + 4}{\sqrt{5x^2 - 2}}$, $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$,

$y' = \dfrac{1}{x\sqrt{3 - 4x^2}}$, $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x - x^2}}$, $y' = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 9}}$, $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}}$, $y' = \dfrac{3x + 4}{\sqrt{1 + 3x - x^2}}$,

$y' = \dfrac{3x + 4}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$.

5139. — Trouver une fonction y telle que l'on ait $y' = \dfrac{1 - x}{y - 1}$.

5140. — Trouver toutes les fonctions y de x qui satisfont à l'équation $y = -\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$. Calculer la dérivée seconde y''.

5141. — Intégrer les équations $y^2y'' = 1$, $y = -\frac{2}{y^2}$, $y' = -\frac{2}{x}$.

5142. — Calculer $\cos 5\omega$ en fonction de $\cos\omega$; $\operatorname{tg} 4a$, $\operatorname{tg} 5a$ en fonction de $\operatorname{tg} a$.

5143. — Calculer $\cos\frac{7\pi}{8}$, $\sin\frac{7\pi}{8}$.

5144. — Calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$. — Longueur du côté du pentagone inscrit.

5145. — Résoudre l'équation $2 \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} 2$, directement, puis au moyen de la règle à calcul.

5146. — Résoudre l'équation $2 \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} 4$. — Construction géométrique ; nombre de solutions.

5147. — Calculer x, sachant que

$$\operatorname{arc\,tg} x = 3 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{arc\,tg} x + 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}, \qquad 2 \operatorname{arc\,sin} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{5},$$

$$2 \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{a^2-1}\sin 2\varphi}{a\cos 2\varphi - 1}.$$

5148. — Nombre des solutions de l'équation $\operatorname{tg} 4y = m$.

5149. — Etudier l'équation $x = \operatorname{arc\,tg} \frac{1+x}{1-x}$.

5150. — Calculer la somme $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx$.

5151. — Résoudre l'équation $\sqrt{\sin x} = \sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}$.

5152. — Démontrer que $x - \sin x < \frac{x^3}{6}$. — Appliquer à l'arc de 20°.

5153. — Rendre calculable par logarithmes : 1° les racines d'une équation du second degré ; 2° l'expression $y = \sin x + \cos x$; 3° l'expression $y = \sin p + \sin q$.

5154. — Dans un triangle, on donne b, c, A. — Calculer h_a et $\operatorname{tg} B$.

5155. — Résoudre un triangle connaissant les angles et le produit soit de deux, soit des trois hauteurs.

5156. — Résoudre un triangle connaissant un angle et deux hauteurs.

5157. — Résoudre un triangle connaissant : 1° a, A, $b - c = d$; 2° a, A, S ; 3° a, A, h_b ; 4° a, A, $bc = m^2$; 5° a, A, $\frac{h_b}{h_c}$.

5158. — Résoudre un triangle connaissant a, b et sachant de plus que $B = 3A$.

5159. — Démontrer la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique $\cos a = \cos b \cos c + \sin b . \sin c . \cos A$. Cas où $A = \frac{\pi}{2}$; démonstration directe. — Appliquer la formule au trièdre supplémentaire.

Géométrie analytique et Mécanique (M. Jablonski).

5160. — Construire avec la règle et le compas les racines de l'équation $a^2x^4 - x^2(a^4+b^4) - a^2b^2 = 0$.

5161. — Angle de deux droites connaissant leurs coefficients angulaires, les axes de coordonnées faisant un angle θ.

5162. — Angle des droites $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$. Conditions d'orthogonalité de ces deux droites.

5163. — Intersection de deux cercles. Axe radical (Propriétés). — Condition pour que les deux cercles soient tangents.

5164. — Que représente l'équation

$$x^2 + y^2 - R^2 + \lambda(ax + by + c) = 0,$$

où λ désigne un paramètre variable ? Déterminer le cercle du faisceau qui est orthogonal à $x^2 + y^2 = R^2$.

5165. — Equation du cercle en coordonnées polaires, cas où le cercle passe au pôle. Que représente l'équation

$$\rho = 2\cos\omega + 3\sin\omega ?$$

5166. — Construire les courbes

$$y = \frac{x^2-4}{x^2-1}, \qquad y = 3x - 1 \pm \sqrt{3x^2 - 5x - 5}, \qquad y = \frac{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}{x - 1}, \qquad y = \frac{x}{x+1} + \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}},$$

$$x = y + \sqrt{\frac{y}{y^2-1}}, \qquad y = \frac{x - 2 \pm \sqrt{x^2 - 1}}{x - 2}.$$

5167. — Construire les courbes

$$x = (t-1)(t-2)(t-3), \qquad y = (t-1)^2(t-2),$$

$$x = \frac{t-1}{t^2}, \qquad y = \frac{t^2-1}{t^3}; \qquad x = \frac{t^3}{t-1}, \qquad y = \frac{t^3}{t^2-1}; \qquad x = \frac{t^2-1}{t^2-4}, \qquad y = \frac{t^2}{t^2-1}$$

$$x = \frac{\sin t}{1 - \operatorname{tg} t}, \qquad y = \frac{\cos^2 t}{\sin t - \cos t}.$$

5168. — Construire les courbes

$$\rho = \frac{\operatorname{tg}\omega}{1 - 2\sin\omega}, \qquad \rho = \frac{1}{1 - 2\cos\omega}, \qquad \rho = \frac{\sin^2\omega}{1 - 2\cos\omega}, \qquad \rho = \frac{\sin^2\omega}{\cos\omega + \sin\omega}, \qquad \rho = \frac{\sin 3\omega}{1 + \operatorname{tg}\omega},$$

$$\rho = \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{1 - \operatorname{tg}\omega}, \qquad \rho = \frac{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}{1 - \sin\omega}.$$

5169. — Asymptotes des courbes

$$y - 2ax^2 - 2x^3 + x^2 + y + x + y = 0,$$

$$x = \frac{t^2 - 4}{t - 1}, \qquad y = \frac{t - 4}{t - 2t - 2} \quad \text{(degré)}, \qquad x = \frac{t^2 - 1}{t^2 - 4}, \qquad y = \frac{t}{t^2 - 2t + 2}.$$

5170. — Étant donnée l'équation d'une courbe $\rho = f(\omega)$ en coordonnées polaires, trouver les asymptotes de cette courbe.

Faire la théorie sur l'exemple suivant :

$$\rho = \frac{\sin^2\omega}{\cos\omega - 1}.$$

5171. — Équation de la strophoïde. Discussion. Construction de la courbe.

5172. — On donne une droite D et une sécante OM coupant D en M : on porte sur cette sécante les segments

$$MN = MN' = l.$$

Lieu des points N et N' quand la sécante tourne autour de O.

5173. — Conchoïde d'un cercle par rapport à un de ses points.

5174. — Trouver les courbes pour lesquelles la sous-tangente en un point est proportionnelle à l'abscisse.

5175. — Équation quadratique des directions asymptotiques d'une conique.

5176. — Conditions pour que la droite $y = mx + p$ soit asymptote à l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

5177. — Polaire d'un point par rapport à une conique. Signification du paramètre λ dans la formule

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Démontrer que la polaire d'un point est conjuguée du diamètre de ce point.

5178. — Réduction des équations des coniques

$$2x^2 + 3y^2 + 5xy - 1 = 0,$$
$$x^2 + 4y^2 + 4xy - 5x + 4y - 1 = 0.$$

5179. — Directions principales d'une conique. Recherche de deux directions conjuguées et application à la recherche des directions principales. Axes. Cas de la parabole.

5180. — Trouver les axes de la conique

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + f = 0.$$

5181. — Formules de Chasles pour l'ellipse. Équation de la droite passant par les extrémités de deux diamètres conjugués. Combien passe-t-il de ces droites par un point du plan ?

5182. — Théorèmes d'Apollonius pour l'ellipse.

5183. — Relation entre les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués. Variation de l'angle de deux diamètres conjugués.

5184. — On considère une ellipse, deux diamètres conjugués et un point M de cette ellipse. La tangente en M coupe les diamètres en P et Q. Relation entre les segments MP, MQ.

5185. — Normales menées d'un point M à la parabole $y^2 - 2px = 0$. Cas où le point M est sur l'axe de la parabole.

5186. — Soient deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy ; deux points A, B sur Ox ; deux autres C, D sur Oy. Équation des coniques passant par A, B, C, D. Lieu des centres de ces coniques.

5187. — Équation des coniques passant par l'intersection de deux coniques données. Condition pour que l'une de ces coniques se réduise à deux droites, ou à un cercle.

5188. — Intersection de deux coniques. Cas où il y a une direction asymptotique commune.

5189. — Coniques homothétiques. Conditions d'homothétie de deux paraboles.

5190. — Transformation de coordonnées dans l'espace. Changement d'axes en gardant la même origine. Les deux systèmes d'axes étant rectangulaires, montrer que la position des nouveaux axes dépend de trois paramètres. Relations entre les cosinus directeurs.

5191. — Condition pour que les deux droites

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \qquad \frac{x - x_1}{a'} = \frac{y - y_1}{b'} = \frac{z - z_1}{c'}$$

soient dans un même plan.

5192. — Propriétés du plan qui a une équation de la forme $P + \lambda Q = 0$, où P et Q désignent les équations de deux plans donnés. Comment varie le plan $P + \lambda Q = 0$ quand λ varie de $-\infty$ à $+\infty$?

5193. — Angle des deux plans

$$3x + y - 2z - 4 = 0, \qquad x - 3y - z - 5 = 0.$$

5194. — Angle de la droite $x - y - 1 = 0$, $2x + z - 3 = 0$ et du plan $x - 4y + 2z - 3 = 0$.

5195. — Angle de la droite

$$\frac{x - x}{a} = \frac{y - y}{b} = \frac{z - z}{c}$$

avec le plan $Ax + By + Cz + D = 0$.

5196. — Mener par la droite $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ un plan qui fasse un angle donné avec le plan $2x + 3y - z = 0$.

5197. — Angle des deux droites

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4}, \qquad \frac{x}{-2} = \frac{y}{+1} = \frac{z}{3}$$

5198. — Distance d'un point à une droite dans l'espace.

5199. — Soit la droite $z - 1 = 0$, $y - 2x + 1 = 0$, et la droite $y - 2 = 0$, $z - 3x + 2 = 0$. Trouver leur distance.

5200. — Distance de la droite D $x + y - z = 0$, $x + y - 4z = 0$ et de la droite D' $x - 2y - 4 = 0$, $x + 3z - 4 = 0$.

5201. — Distance des deux droites

$$x = az + p, \quad y = bz + q \qquad \text{et} \qquad x = a'z + p', \quad y = b'z + q'$$

en coordonnées rectangulaires.

5202. — Conditions pour qu'une équation représente une sphère.

5203. — Trouver le rayon de la section plane de la surface $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 7 = 0$ par le plan $x + y + z - 1 = 0$. Equation du cône circonscrit à la sphère le long de cette intersection.

5204. — Equation du cône de sommet (1, 5, -2), ayant pour directrice la courbe $x^2 - 2z = 0$, $y^2 - 2z = 0$.

5205. — Asymptotes de la section du cône

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

par le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z + p = 0$.

5206. — Asymptotes de la section du cône

$$x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 7zy = 0$$

par le plan $x + y - z + 1 = 0$. Mener au cône précédent un plan tangent vertical.

5207. — Equation du cylindre de génératrices parallèles à la direction 2, 1, 1 et de directrice

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0, \qquad 2x + y + z - 1 = 0$$

5208. — Plan tangent à une surface de révolution. Propriétés de la normale. Montrer qu'elle est dans un plan méridien.

5209. — Surface de révolution engendrée par la courbe

$$x^2 + 2y^2 - 1 = 0, \qquad z = 0$$

en tournant autour de la droite $x = y = z$.

5210. — Un plan P tourne autour de la droite Δ $x = p$, $y = q$. Soit M la trace d'une droite D $\left(\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}\right)$ sur ce plan. Surface engendrée par la perpendiculaire en M au plan P.

5211. — Cône circonscrit à la surface $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4 = 0$ et ayant pour sommet le point S (1, 4, 2).

5212. — Cône de sommet x_0, y_0, z_0 circonscrit à la surface $x^2 + y^2 - 2pz = 0$.

5213. — Cylindre circonscrit au paraboloïde

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0$$

et ayant ses génératrices parallèles à la droite $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$.

5214. — Etude des sections planes du paraboloïde hyperbolique

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0.$$

La conique section peut-elle se réduire à deux droites ?

5215. — Sections planes de l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ 1° par les plans principaux, 2° par des plans quelconques.

5216. — Sections circulaires du cône $x^2 + 4y^2 - z^2 + 4xy = 0$.

5217. — Sections circulaires de l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

5218. — Sections circulaires du paraboloïde elliptique.

5219. — Directions principales du cône $x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 2xy = 0$.

5220. — Directions principales d'une quadrique $f(x, y, z) = 0$.

5221. — Plans diamétraux et diamètres dans une quadrique. Cas d'un paraboloïde hyperbolique. Intersection du plan diamétral et de la surface. Paramètre de la parabole d'intersection.

5222. — Equation du diamètre conjugué à une direction de plan dans une quadrique. Tous les diamètres passent par le centre dans le cas des quadriques à centre. Cas du paraboloïde : les diamètres sont parallèles à l'axe.

5223. — Mener par la droite $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ un plan tangent à la quadrique $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0$.

5224. — Par la droite $x-y+z-1=0$, $x-2z=0$ mener un plan tangent à la quadrique $x^2-y^2+z^2-1=0$.

5225. — Mener à la surface $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ un plan tangent parallèle au plan $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$.

5226. — Mener au paraboloïde hyperbolique $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}-2z=0$ un plan tangent parallèle au plan $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$.

Lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits au paraboloïde hyperbolique précédent.

5227. — Qu'appelle-t-on plans asymptotes de l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Cône asymptote. Equation et propriétés.

5228. — Génératrices rectilignes du paraboloïde hyperbolique. Propriétés. Démontrer qu'un système de génératrices engendre toute la surface dans son déplacement.

5229. — Génératrices rectilignes de l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

5230. — Trouver les génératrices rectilignes de la quadrique

$$xz-y^2+2y=0.$$

L'un des systèmes de génératrices engendre-t-il toute la quadrique ?

5231. — Intersections d'une droite donnée et de l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Discussion.

5232. — Lieu des points d'un hyperboloïde où les génératrices sont rectangulaires.

5233. — Réduction des équations des quadriques

$$x^2-2y^2-z^2-4yz-1=0 \qquad x^2-y^2-z^2-4yz-1=0, \qquad x^2-3y^2-3z^2-2xy-2x=0$$

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

1928. — Par un point P du plan d'une parabole, on peut mener quatre cordes d'une même longueur donnée. Le lieu des points P tels que deux de ces cordes soient rectangulaires est une cubique ; calculer l'aire totale comprise entre la cubique et son asymptote.

Dr. Werner Gaedecke.

1929. — Par le point de rencontre O de l'axe d'une parabole et de sa directrice, on mène une sécante qui coupe la courbe en deux points M et N. On joint ces points au foyer F par les droites FM, FN, et par M et N on trace des parallèles à l'axe qui rencontrent respectivement FN en M′ et FM en N′.

1° Démontrer que le trapèze MM′NN′ est inscriptible et circonscriptible. Lieux des points de contact du cercle inscrit avec les côtés.

2° La différence $\frac{1}{NN'}-\frac{1}{MM'}$ des inverses des bases du trapèze est constante.

3° Le cercle inscrit au trapèze est orthogonal à une famille de cercles, et si l'on fixe l'un des cercles de la famille, l'axe radical de ce cercle et du cercle inscrit passe par un point fixe.

4° Enveloppe de l'axe radical du cercle inscrit et du cercle de centre A et de rayon AP. (A est le sommet de la parabole et P le centre du cercle inscrit au trapèze).

5° Les tangentes en M et N à la parabole coupent l'axe aux points T et S. Enveloppe de l'axe radical du cercle de diamètre TS et du cercle inscrit au trapèze.

R. Manen, à Albi.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

21e Année. Mars 1911. N° 6.

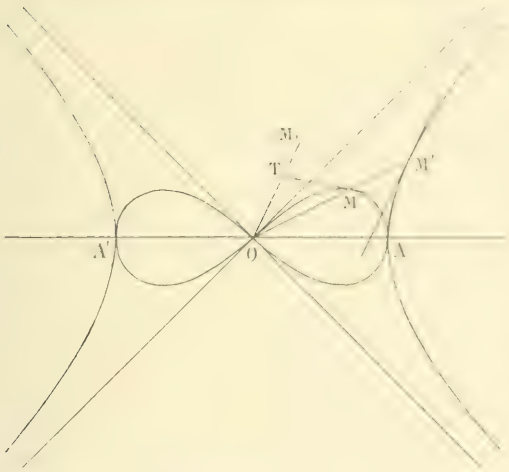
REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE SUR LA LEMNISCATE

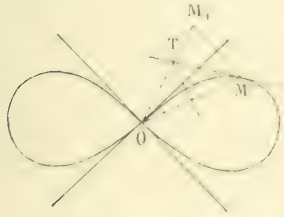
par M. J. **Denis**.

Considérons une lemniscate définie par la longueur $OA = a$ de son demi-axe. En la transformant par inversion avec O comme pôle et a^2 comme puissance, on sait que l'on obtient une hyperbole équilatère de sommets A et A′, et ayant comme asymptotes les tangentes d'inflexion de la lemniscate.



Nous appliquerons ce résultat à la détermination de la tangente et du rayon de courbure en un point de la lemniscate.

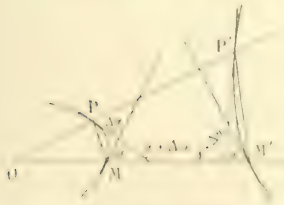
Tangente en un point. — Soit M un point de la lemniscate, M′ le point correspondant de l'hyperbole. On sait que les tangentes en M et M′ aux deux courbes sont également inclinées sur le rayon vecteur OMM′; d'autre part, la tangente en M′ à l'hyperbole est parallèle au diamètre conjugué OM_1 de OM′. L'hyperbole étant équilatère, OM′ et OM_1 sont également inclinés sur les asymptotes. Si on considère alors le point T où la tangente en M à la lemniscate coupe OM_1, le triangle OTM ayant ses angles en O et M égaux, est isocèle. D'où la construction suivante :



Pour avoir la tangente en M à la lemniscate, on prend le symétrique M_1 de M par rapport à une des tangentes d'inflexion, on mène la perpendiculaire au milieu de OM, elle coupe OM_1 en T : TM est la tangente.

Rayon de courbure. — Avant de traiter la question pour la lemniscate, nous allons d'une façon générale chercher la relation qui lie les rayons de courbure R et R′ de deux courbes inverses C et C′ en deux points correspondants.

Soient M et P deux points extrêmement voisins sur la courbe C, M′ et P′ les points correspondants de la courbe inverse C′.



Soient α et $\alpha + \Delta\alpha$ les angles avec OM des tangentes en M et P à C, et soit arc $MP = \Delta s$.

Appelons α', $\alpha' + \Delta\alpha'$, et $\Delta s'$ les éléments correspondants de C′. Le rayon de courbure en M est donné par

$$R = \text{limite } \frac{\Delta s}{\Delta\alpha} = \frac{ds}{d\alpha}.$$

Le rayon de courbure en M′ est

$$R' = \text{limite } \frac{\Delta s'}{\Delta\alpha'} = \frac{ds'}{d\alpha'}$$

Or on a, d'après une propriété connue de l'inversion, $\alpha = \alpha'$ d'où $d\alpha = d\alpha'$, on a alors

$$\frac{R}{R'} = \frac{ds}{ds'} = \text{limite}\,\frac{\Delta s}{\Delta s'},$$

mais l'arc étant un infiniment petit équivalent à la corde, on a

$$\text{limite}\,\frac{\Delta s}{\Delta s'} = \text{limite}\,\frac{MP}{M'P'}.$$

Les formules connues de transformation des propriétés métriques dans l'inversion donnent

$$M'P' = \frac{MP}{OM \times OP} \times K, \qquad \text{(K étant la puissance d'inversion).}$$

d'où $\dfrac{MP}{M'P'} = \dfrac{OM \times OP}{K}$. Lorsque P tend vers M on a à la limite

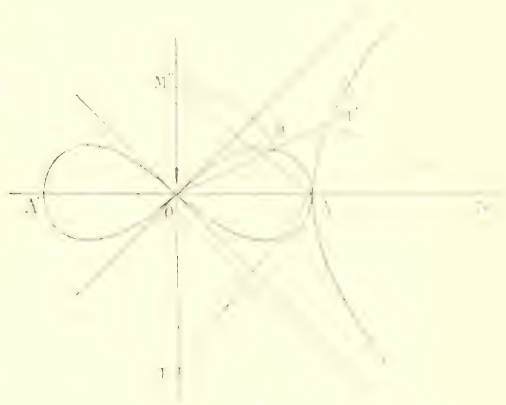
$$\text{limite}\,\frac{MP}{M'P'} = \frac{\overline{OM}^2}{K} = \frac{ds}{ds'}$$

d'où

$$\frac{R}{R'} = \frac{\overline{OM}^2}{K}$$

Cas de la lemniscate. — Soit M un point de la lemniscate, M′ le point correspondant de l'hyperbole, M′N′ la normale en M′. On sait que le rayon de courbure en M′ à l'hyperbole est

$$R' = \frac{\overline{M'N'}^2}{p^2}.$$



p étant le paramètre. Mais comme l'hyperbole est équilatère, on a à la fois

$$p^2 = a^2 \qquad \text{et} \qquad M'N' = OM',$$

d'où

$$R' = \frac{\overline{OM}^2}{a^2}$$

Le rayon de courbure en M à la lemniscate sera donc, d'après la relation trouvée plus haut,

$$R = \frac{\overline{OM}^2}{a^2} \times \frac{\overline{OM}^2}{a^2} = OM \times \frac{a^2}{OM}.$$

On en tire la construction suivante du rayon de courbure en M :

sur la perpendiculaire à AA′ on porte $OM = OM$, *on joint* A′ *à* M *et on mène la perpendiculaire en* A′ *à* A′M, *elle coupe* OM *en* P. OP *est le rayon de courbure cherché.*

Dans le triangle rectangle A′MP qui admet $OA = a$ comme hauteur, on a bien

$$a^2 = OP \times OM = OP \times OM.$$

d'où

$$OP = \frac{a^2}{OM} = R.$$

SUR LES FONCTIONS HOMOGÈNES

par M. **Ch. Halphen**.

Soit une fonction de plusieurs variables, trois par exemple, $f(x, y, z)$, admettant des dérivées partielles du premier ordre, et k un paramètre arbitraire. Proposons-nous de chercher dans quel cas l'identité

(1) $$f(kx, ky, kz) \equiv \varphi(k) f(x, y, z)$$

est possible, quelles que soient les valeurs attribuées à x, y, z et k.

Un cas évident est celui où la fonction $f(x, y, z)$ est homogène, $\varphi(k)$ étant alors de la forme k^m. *Nous allons démontrer que ce cas est le seul.*

Différentions par rapport à k l'identité (1) ; nous obtenons une nouvelle identité

(2) $$x f'_{kx}(kx, ky, kz) + y f'_{ky}(kx, ky, kz) + z f'_{kz}(kx, ky, kz) \equiv \varphi'(k) f(x, y, z).$$

Divisons maintenant (2) et (1) membre à membre,

(3) $$\frac{x f'_{kx}(kx, ky, kz) + y f'_{ky}(kx, ky, kz) + z f'_{kz}(kx, ky, kz)}{f(kx, ky, kz)} \equiv \frac{\varphi'(k)}{\varphi(k)}.$$

Cette identité doit être satisfaite pour toutes les valeurs de x, y, z et k ; elle le sera donc en particulier pour $k = 1$. Or, pour $k = 1$, $\frac{\varphi'(k)}{\varphi(k)}$ se réduit à une quantité purement numérique; appelons-la m. Nous aurons donc

$$x f'_x(x, y, z) + y f'_y(x, y, z) + z f'_z(x, y, z) \equiv m f(x, y, z),$$

quels que soient x, y et z. D'après la réciproque du théorème d'Euler, on déduit de là que la fonction $f(x, y, z)$ est homogène et de degré m. Dès lors, comme on a

$$f(kx, ky, kz) \equiv k^m f(x, y, z),$$

l'identité (1) montre que $\varphi(k) \equiv k^m$.

Remarque. — Nous avons dit que m est la valeur numérique que prend $\frac{\varphi'(k)}{\varphi(k)}$ pour $k = 1$. Dans l'identité (3), faisons $k = x = y = z = 1$; nous aurons

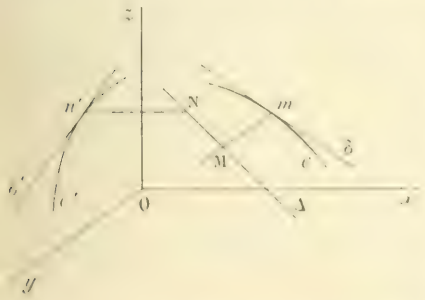
$$m = \frac{f'_x(1, 1, 1) + f'_y(1, 1, 1) + f'_z(1, 1, 1)}{f(1, 1, 1)},$$

expression du degré d'homogénéité de la fonction f. On la déduirait d'ailleurs immédiatement du théorème d'Euler.

SUR L'ENVELOPPE D'UNE DROITE

par M. **Ch. Halphen**.

La condition pour qu'une droite variable de l'espace, à un paramètre, admette une enveloppe, peut être mise sous une forme géométrique des plus simples. Si une telle droite Δ est tangente dans toutes ses positions à une courbe gauche Γ, ses projections sur deux plans quelconques ont évidemment des enveloppes, projections de Γ sur ces plans. Réciproquement, soient δ et δ' les projections de la droite mobile Δ sur les plans xOz et yOz, Γ et Γ' ayant des enveloppes c, c', qu'elles touchent en m et n'. La droite Δ est tangente au cylindre ayant pour base la courbe c et des génératrices parallèles à Oy, en M ; et au cylindre ayant pour base la courbe c' et des génératrices parallèles à Ox, en N. Si elle est tangente à une courbe gauche, ce ne peut être qu'à la courbe d'intersection de ces cylindres qui seule a c et c' pour projections sur les plans xOz et yOz ; il faut et suffit pour cela que M et N soient confondus, ce qui n'arrive pas en général. Par suite, la condition nécessaire et suffisante pour que Δ ait une enveloppe, est que M et N soient confondus, c'est-à-dire que m et n' aient la même cote z.



Soient $x = az + p$, $y = bz + q$ les équations de Δ, où a, b, p, q sont fonctions d'un paramètre t. Prises séparément, elles représentent, la première δ, la seconde δ', dans les plans xOz et yOz; ces droites ont des enveloppes, puisqu'elles ne dépendent que d'un paramètre, et les z des points de contact m et n' s'obtiennent en les différentiant par rapport à t,

$$a'z + p' = 0, \qquad \text{ou} \qquad z = -\frac{p'}{a'}, \qquad \text{(point } m\text{)}$$

$$b'z + q' = 0, \qquad \text{ou} \qquad z = -\frac{q'}{b'}. \qquad \text{(point } n'\text{)}$$

La droite Δ a donc une enveloppe si

$$\frac{p'}{a'} = \frac{q'}{b'}, \qquad \text{ou} \qquad a'q' - b'p' = 0.$$

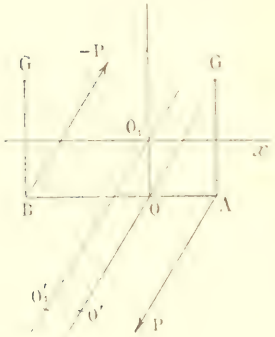
Cette condition étant supposée remplie, le point de contact de Δ et de son enveloppe ayant pour cote $z = -\frac{p'}{a'}$ $\left(\text{ou } -\frac{q'}{b'}\right)$, fonction de t, et par suite pour abscisse et ordonnée

$$x = -a\frac{p'}{a'} + p, \qquad y = -b\frac{p'}{a'} + q,$$

on a là les trois équations paramétriques de l'enveloppe Γ.

NOTE SUR LE MOMENT D'UN COUPLE

On appelle *couple de vecteurs*, ou simplement *couple*, un système de deux vecteurs parallèles, égaux et opposés, mais qui n'ont pas la même ligne d'action.



Lorsqu'on envisage les moments par rapport à un point ou par rapport à un axe, on peut faire glisser chacun de ces vecteurs le long de sa ligne d'action et placer leurs origines sur une même perpendiculaire commune aux deux lignes d'action, cette perpendiculaire étant d'ailleurs arbitrairement choisie. Cette figuration d'un couple est particulièrement commode ; elle est due à Poinsot.

La longueur AB s'appelle le bras de levier du couple, P est le vecteur du couple, et le produit numérique de AB par P se nomme le moment du couple.

Nous allons démontrer que le moment résultant du couple par rapport à un point quelconque de l'espace est toujours le même, et que c'est un vecteur perpendiculaire au plan du couple, ayant pour longueur P . AB et orienté dans un sens tel que le sens de rotation du couple soit direct par rapport à ce vecteur.

Il nous sera commode de prendre pour plan du tableau le plan mené par AB perpendiculairement au plan du couple. Alors les deux vecteurs P et — P seront perpendiculaires au plan du tableau, P en avant, par exemple, et — P, en arrière.

Il est d'abord évident que, pour tous les points d'une droite de l'espace parallèle aux vecteurs P et — P, le moment résultant est le même. Nous sommes donc ramenés à étudier le moment par rapport aux points du plan du tableau.

Prenons ceux de AB. En A, le moment se réduit au moment linéaire du vecteur — P par rapport au point A. En B, il se réduit au moment linéaire du vecteur P. Ces deux vecteurs, AG et BG, sont bien équipollents à celui que nous avons signalé. En O, point compris entre A et B, les deux moments s'ajoutent, ils ont tous deux le même sens que AG, et pour valeurs numériques, OA.P et

OB.P ; leur somme est donc bien un vecteur équipollent à AG. Si le point O est sur le prolongement de AB, les deux moments se retranchent, le résultat est toujours le même et tout aussi évident.

Prenons maintenant un point O_1 quelconque dans le plan du tableau et envisageons l'axe O_1O perpendiculaire à AB. Le moment résultant par rapport à cet axe est le même que le moment linéaire du point O, c'est donc un vecteur équipollent à AG. Mais c'est aussi la projection du moment résultant sur l'axe au point O_1, ou la somme algébrique des projections des moments des deux vecteurs P et — P, par rapport au point O_1. Nous aurons démontré que cette projection est égale au moment résultant en O_1, si nous démontrons qu'elle est nulle sur un axe perpendiculaire à OO_1, c'est-à-dire sur un axe parallèle à AB, puisque les deux vecteurs moments sont visiblement dans le plan du tableau, perpendiculaires à O_1A et O_1B. Or ce dernier fait est évident, car les moments des vecteurs P et — P par rapport à l'axe O_1x sont évidemment égaux et opposés.

E. H.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours de 1910 (*fin*).

Calcul.

1870. — *L'élongation u d'une vibration amortie a pour expression, en fonction du temps t,*

$$u = U.\frac{e^{-st}}{\cos\varphi}\cos(rt-\varphi); \qquad \left(s = \frac{\sin\varphi}{\theta}, \qquad r = \frac{\cos\varphi}{\theta}, \qquad e = 2{,}718\right).$$

1° *Quelles sont les valeurs de t qui donnent à u soit une valeur nulle, soit une valeur maximum ou minimum ?*

2° *Pour* U = 1 cm, $\theta = 1$ sec., $\varphi = 45°$, *construire une table des valeurs de u en fonction de t, du premier maximum de u à son premier minimum, et procédant par huitièmes de cet intervalle.*

3° *Comment cette table peut-elle être étendue à l'intervalle suivant ?*

1° Les valeurs finies de t qui annulent u sont données par l'équation

$$\cos(rt-\varphi) = 0, \qquad rt-\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

et sont, par suite,

$$t = \frac{\varphi}{r} + (2k+1)\frac{\pi}{2r}.$$

La dérivée de u par rapport à t est

$$\frac{du}{dt} = \frac{-U}{\cos\varphi}e^{-st}[s\cos(rt-\varphi) + r\sin(rt-\varphi)], \qquad \text{ou} \qquad \frac{du}{dt} = \frac{-Ue^{-st}}{\theta\cos\varphi}\sin\varphi t;$$

elle s'annule pour

$$\varphi t = k\pi, \qquad t = \frac{k\pi}{r}.$$

2° Pour

$$U = 1^{cm}, \qquad \theta = 1^{sec}, \qquad \varphi = 45°,$$

on a

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad r = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad u = \sqrt{2}e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right)$$

et

$$\frac{du}{dt} = -\sqrt{2}e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}.$$

De $t = 0$ à $t = \pi\sqrt{2}$, la dérivée est négative et u décroît. Le premier maximum a donc lieu pour $t = 0$, le second pour $t = \pi\sqrt{2}$. Les valeurs intermédiaires sont $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$, $\frac{2\pi\sqrt{2}}{8}$, ... $\frac{7\pi\sqrt{2}}{8}$; les valeurs de u sont alors :

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{8}}\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = e^{-\frac{\pi}{8}}\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}, \qquad u_2 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\cos 0 = e^{-\frac{\pi}{4}}\sqrt{2},$$

$$u_3 = \sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{8}}\cos\frac{\pi}{8} = e^{-\frac{3\pi}{8}}\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}, \qquad u_4 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{4} = e^{-\frac{\pi}{2}},$$

$$u_5 = \sqrt{2}e^{-\frac{5\pi}{8}}\cos\frac{3\pi}{8} = e^{-\frac{5\pi}{8}}\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}, \qquad u_6 = \sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}\cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$u_7 = \sqrt{2}e^{-\frac{7\pi}{8}}\cos\frac{5\pi}{8} = -e^{-\frac{7\pi}{8}}\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}, \qquad u_8 = \sqrt{2}e^{-\pi}\cos\frac{3\pi}{4} = -e^{-\pi}.$$

On a successivement $\sqrt{2} = 1,414213$, $1+\frac{\sqrt{2}}{2} = 1,707106$, $1-\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,292894$,

puis $\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1,306$, $\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0,541$.

Pour calculer les exponentielles nous utiliserons la règle à calculs. Nous avons

$$\log e^{-\frac{\pi}{8}} = -\frac{\pi}{8}\log e = -0,393\log e.$$

La règle nous donne $\log e = 0,434$, puis le produit $0,393 \times 0,434 = 0,170$.

Donc $$\log e^{-\frac{\pi}{8}} = -0,170 = \bar{1},830,$$

et on en déduit $$e^{-\frac{\pi}{8}} = 0,675.$$

Puis $$e^{-\frac{\pi}{4}} = e^{-\frac{\pi}{8}}\cdot e^{-\frac{\pi}{8}} = 0,675 \times 0,675 = 0,456,$$
$$e^{-\frac{3\pi}{8}} = e^{-\frac{\pi}{4}}\cdot e^{-\frac{\pi}{8}} = 0,456 \times 0,675 = 0,308,$$

et, de la même manière,

$$e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,208, \qquad e^{-\frac{5\pi}{8}} = 0,140, \qquad e^{-\frac{3\pi}{4}} = 0,0945, \qquad e^{-\frac{7\pi}{8}} = 0,064, \qquad e^{-\pi} = 0,0432,$$

tous les produits étant effectués au moyen de la règle.

On calcule alors aisément les valeurs de $u_0, u_1, \ldots$ On obtient

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = 0,882, \qquad u_2 = 0,645, \qquad u_3 = 0,402, \qquad u_4 = 0,208,$$
$$u_5 = 0,076, \qquad u_6 = 0, \qquad u_7 = -0,0346, \qquad u_8 = -0,0432.$$

3° L'intervalle suivant est $\pi\sqrt{2}$ à $2\pi\sqrt{2}$; chaque t est augmenté de $\pi\sqrt{2}$ et $\frac{t}{\sqrt{2}}$ est augmenté de π; le cosinus se reproduit donc changé de signe : quant au premier facteur, il est multiplié par $e^{-\pi}$, et le nouvel u, u', est donné par $u' = -ue^{-\pi}$ ou $u' = -u \times 0,0432$.

Bonnes solutions : MM. Ampeyrard, à Ruines ; G. Lacau, à Rodez ; M. A. Rousseau, à Fournes.

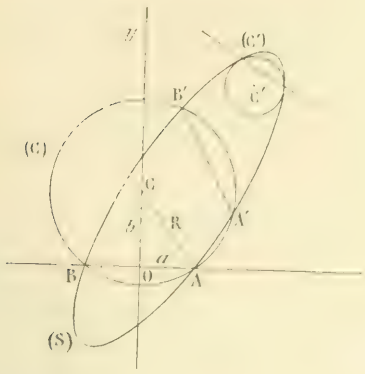
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1853. — *Soient deux cercles fixes C et C', par deux points fixes A et B de C, on fait passer une conique S bitangente à C' ; démontrer qu'il existe deux familles de coniques S, et que pour les coniques de chaque famille, la corde de contact avec C' passe par un point fixe.*

Lieu du pôle d'une droite fixe par rapport aux coniques S.

S coupe C en deux autres points A' et B' ; enveloppe de A'B', lieu du point commun à A'B' et à la corde de contact de S et C'.

Prenons pour axe des x la droite AB et pour axe des y la perpendiculaire à AB en son milieu O. Soient $OA = OB = a$, $OC = b$. Le rayon du cercle C est $R = \sqrt{a^2+b^2}$.



Soient aussi (α, β) les coordonnées du centre C′ et R le rayon du cercle C′.

Les équations des deux cercles C et C′ sont

$$(C) \qquad x^2 + y^2 - 2by - a^2 = 0,$$

$$(C') \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2 = 0.$$

L'équation générale des coniques qui sont bitangentes à C′ est

$$(1) \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2 + \lambda(ux + vy - 1)^2 = 0,$$

l'équation de la corde de contact avec C′ étant

$$(2) \qquad ux + vy - 1 = 0.$$

Si la conique (1) passe par A et B, il faut que, pour $y = 0$, l'équation en x

$$x^2(1 + \lambda u^2) - 2x(\alpha + \lambda u) + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 + \lambda = 0$$

ait pour racines $+a$ et $-a$, ce qui donne les conditions

$$(3) \qquad \alpha + \lambda u = 0,$$

$$(4) \qquad a^2(1 + \lambda u^2) - \alpha^2 + \beta^2 - R^2 + \lambda = 0.$$

Ces deux équations permettent de déterminer λ et u. L'élimination de λ donne l'équation en u,

$$a^2\alpha u^2 - u(a^2 + \alpha^2 + \beta^2 - R^2) + \alpha = 0.$$

On a donc pour u les deux valeurs

$$(5) \qquad u = \frac{a^2 - \alpha^2 + \beta^2 - R^2 \pm \sqrt{(a^2 + \alpha^2 + \beta^2 - R^2)^2 - 4a^2\alpha^2}}{2a^2\alpha},$$

et les deux valeurs correspondantes de λ

$$(6) \qquad \lambda = -\frac{\alpha}{u} = -\frac{1}{2}\left(a^2 + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 \pm \sqrt{(a^2 + \alpha^2 + \beta^2 - R^2)^2 - 4a^2\alpha^2}\right).$$

La corde de contact (2), puisque u et λ sont constants, passe par le point fixe $x = \frac{1}{u}$, $y = 0$.

Chacune des valeurs (5) de u et la valeur correspondante (6) de λ donnent pour l'équation (1) un système de coniques S, pour lesquelles v est le seul paramètre variable. La corde de contact de chacune de ces coniques dans chaque système passe par un point fixe situé sur AB. Soient P et Q ces deux points fixes. On a

$$OP = \frac{a^2 - \alpha^2 + \beta^2 - R^2 - \sqrt{(a^2 - \alpha^2 + \beta^2 - R^2)^2 - 4a^2\alpha^2}}{2\alpha},$$

$$OQ = \frac{a^2 + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 - \sqrt{(a^2 + \alpha^2 + \beta^2 - R^2)^2 - 4a^2\alpha^2}}{2\alpha}.$$

OP correspond au signe $+$, OQ au signe $-$ du radical (5) de u.

Les deux systèmes de coniques S ne seront réels que si

$$[(a^2 - \alpha^2 + \beta^2 - R^2)^2 - 4a^2\alpha^2] > 0,$$

ou

$$[(a^2 + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 - 2a\alpha)(a^2 + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 + 2a\alpha)] > 0,$$

$$[(a - \alpha)^2 + \beta^2 - R^2][(a + \alpha)^2 + \beta^2 - R^2] > 0.$$

Il faut donc que les quantités

$$(a - \alpha)^2 + \beta^2 - R^2 \quad \text{et} \quad (a + \alpha)^2 + \beta^2 - R^2$$

soient à la fois positives et négatives, ce qui exige *que les points A et B soient tous les deux ou à l'intérieur, soit à l'extérieur du cercle C*.

Lieu du pôle d'une droite fixe $Ax + By = 1$ *par rapport aux coniques* S. Leur équation (1) s'écrit

$$(7) \qquad x^2(1+\lambda u^2) + 2\lambda uvxy + y^2(1+\lambda v^2) - 2x(\beta+\lambda v) - 2y(\alpha+\lambda u) + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 + \lambda = 0.$$

La polaire d'un point (ξ, η) par rapport à S a pour équation

$$x[\xi(1+\lambda u^2) + \eta\lambda uv] + y[\xi\lambda uv + \eta(1+\lambda v^2)] - \xi(\beta+\lambda v) - \eta(\alpha+\lambda u) + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 + \lambda = 0.$$

L'identification avec la droite fixe donne

$$\frac{\xi(1+\lambda u^2)+\eta\lambda uv}{A} = \frac{\xi uv\lambda + \eta(1+\lambda v^2) - (\beta+\lambda v)}{B} = \frac{-\eta(\beta+\lambda v) - \alpha^2 + \beta^2 - R^2 + \lambda}{-1}.$$

On aura le lieu du point (ξ,η) en éliminant v entre ces trois rapports.

Le premier et le troisième donnent pour v

$$v = \frac{A\beta\eta - A(\alpha^2+\beta^2-R^2+\lambda) - \xi(1+\lambda u^2)}{\eta(\lambda u - A)}$$

et, pour abréger,

$$(8) \qquad v = \frac{P\eta - Q\xi + S}{\eta},$$

où P, Q, S sont des constantes,

$$P = \frac{A\beta}{\lambda u - A}, \qquad Q = -\frac{1+\lambda u^2}{\lambda u - A}, \qquad S = \frac{-A(\alpha^2+\beta^2-R^2+\lambda)}{\lambda u - A}.$$

Les deux derniers rapports donnent

$$\eta(1+\lambda v^2) - (\beta+\lambda v)(1+B\eta) + \lambda uv\xi + B(\alpha^2+\beta^2-R^2+\lambda) = 0.$$

En portant dans cette équation la valeur (8) de v, on voit que l'équation en ξ et η est du second degré. *Le lieu de* (ξ, η) *est donc une conique.*

Le lieu total *se compose de deux coniques*, en raison des deux familles de coniques S.

Enveloppe de la seconde sécante d'intersection A'B' *de* S *et* C. — Soit l'équation de A'B'

$$(9) \qquad Ux + Vy - 1 = 0.$$

L'équation de la conique S doit s'écrire

$$\mu x^2 + y^2 - 2by - \lambda(1 + \mu(Ux + Vy - 1)) = 0.$$

En l'identifiant avec (7), on a

$$\frac{\mu}{1+\lambda u^2} = \frac{U}{2\lambda uv} = \frac{\mu + V}{1+\lambda v^2} = \frac{2b - 1}{2(\beta+\lambda v)} = \frac{-\alpha^2 - \mu}{\alpha^2+\beta^2-R^2+\lambda}.$$

De là, on déduit μ, U et V en fonction de v. Le premier et le dernier rapport donnent

$$\mu = \frac{1+\lambda v^2}{2(\lambda v + \beta - b(1+\lambda v^2))}.$$

On en conclut

$$U = \frac{2\lambda uv \cdot \mu}{1+\lambda u^2} = \frac{\lambda uv}{\lambda v + \beta - b(1+\lambda v^2)}, \qquad V = \frac{\mu(1+\lambda v^2) - v^2}{1+\lambda v^2} = \frac{\lambda(v^2-u^2)}{2(\lambda v + \beta - b(1+\lambda v^2))}.$$

Les valeurs de U et V portées dans (9) donnent pour A'B'

$$(10) \qquad 2\lambda uvx + (\lambda v^2 - u^2)y - 2(\lambda v + \beta - b(1+\lambda v^2)) = 0.$$

ou, en ordonnant par rapport au seul paramètre variable v,

$$\lambda v^2 y + 2\lambda v(ux - 1) - (1+\lambda u^2)y - 2\beta + 2b(1+\lambda u^2) = 0.$$

L'enveloppe de A'B' est donc

$$\lambda(ux-1)^2 + y[\lambda u^2 y + 2\beta - 2b(1+\lambda u^2)] = 0.$$

ou

$$(11) \qquad x^2 + y^2 - \frac{2x}{u} + \frac{2y}{\lambda u^2}[\beta - b(1+\lambda u^2)] + \frac{1}{u^2} = 0.$$

C'est un cercle tangent à AB en un des points fixes P ou Q.

En réalité l'enveloppe comprend deux cercles, tangents à AB, l'un en P, l'autre en Q, correspondant chacun à l'une des familles de coniques S.

Lieu du point de rencontre de A'B' *avec la corde de contact de* S *et* C'. — Il suffit d'éliminer v entre (2) et (10). (2) donne

$$v = \frac{1 - ux}{y}.$$

Cette valeur, portée dans (10), conduit à l'équation

$$\left(x - \frac{1}{u}\right)^2 + y^2 + \frac{2y}{\sqrt{u^2}}\left[3 - b_1(1 + \sqrt{u^2})\right] = 0,$$

qui n'est autre que (11).

Donc les deux cercles (11) sont à la fois l'enveloppe de A'B' et le lieu du point de rencontre de A'B' avec la corde de contact de S' et C'. Il en résulte qu'en ce point la droite A'B' est tangente à son cercle enveloppe.

Remarque. — *Le lieu du centre des coniques* S *se compose de deux cercles passant par le milieu* O *de* AB, *et dont le centre est au milieu de* OC'.

E.-N. BARISIEN.

Solution géométrique. — Effectuons une transformation homographique qui rejette les points A et B aux points cycliques ; le cercle C se transforme en un autre cercle, C_1, et le cercle C' se transforme en une conique, C'_1 ; la conique S devient un cercle S_1 bitangent à C'_1.

Or on sait qu'il existe deux familles de cercles bitangents à une conique dont les centres décrivent les deux axes de la conique, les cordes des contacts étant aussi parallèles aux axes. Le premier système se compose de ceux qui ont leurs centres sur l'axe focal et leurs cordes de contact parallèles à l'autre axe. Les cordes des contacts des deux familles passent donc par deux points fixes, P et Q, à l'infini, c'est-à-dire sur la droite AB, et conjugués harmoniques par rapport aux deux points cycliques, c'est-à-dire par rapport aux points A et B.

Si l'on considère l'une des familles de cercles bitangents, celle, par exemple, dont les centres sont sur l'axe focal de la conique C'_1, le lieu des pôles d'une droite fixe par rapport à ces cercles est une conique qui passe aux foyers de la conique C'_1 ; cette conique se transforme en une autre conique. Le lieu total des pôles se compose donc de deux coniques.

Considérons maintenant deux cercles S_1 et S'_1 et le cercle C_1 ; leurs axes radicaux passent par le même point. Donc, à la limite, quand les deux cercles S_1 et S'_1 seront confondus, l'axe radical du cercle S_1 et du cercle C_1 aura son point caractéristique sur la corde des contacts de S_1 avec C'_1. L'enveloppe de A'B' et le lieu du point de rencontre de A'B' avec la corde des contacts sont donc confondus. Pour avoir ce lieu dans le cas actuel, il suffit de trouver le lieu du point de la corde des contacts qui a même puissance par rapport au cercle C_1 et à la conique C'_1, cette dernière étant comptée sur la corde des contacts.

Soient alors
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$$
les équations de C_1 et de C'_1, et (x, y) un point du lieu. Appelons y_1 et $-y_1$ les ordonnées des points de rencontre avec l'ellipse de la droite $X - x = 0$; nous aurons $(y - y_1)(y + y_1) = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma$,

ou
$$y^2 - y_1^2 = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma ;$$

or
$$y_1^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}.$$

Le lieu actuel est donc
$$\frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2 = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma.$$

C'est une parabole dont l'axe est parallèle à Oy ; elle touche la droite AB en l'un des points fixes P ou Q. En outre, son équation peut s'écrire
$$y^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2 = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma,$$

ou
$$b^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma.$$

Sous cette forme, on voit que l'enveloppe passe par les points communs aux coniques C_1 et C'_1 ; dans le

première figure, cette enveloppe est donc un cercle, et l'enveloppe totale se compose de deux cercles respectivement tangents à AB aux points P et Q.

Bonnes solutions analytiques de MM. G. Foucry, à Reims; A. Rousseau, à Fournes.

QUESTIONS PROPOSÉES

1930. — On considère la congruence de droites

$$y = \lambda x + z - \lambda^2, \qquad z = \mu x + \lambda z - \lambda^2$$

qui dépendent de deux paramètres arbitraires.

1° Montrer que par tout point de l'espace il passe une de ces droites et une seule, en général. Trouver le lieu des points par lesquels il en passe plus d'une.

2° Montrer que dans tout plan de l'espace il y a trois de ces droites. Trouver l'enveloppe de ceux pour lesquels deux de ces droites sont confondues. Trouver l'enveloppe des plans pour lesquels les trois droites sont confondues.

3° Déterminer μ en fonction de λ de façon que cette droite engendre une surface développable. Montrer que l'une de ces surfaces coïncide avec la précédente.

E. H.

1931. — Etant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy et Oz, on considère une barre pesante de poids $4a$ et de longueur $2a$ articulée en une de ses extrémités O de façon que ce point coïncide constamment avec l'origine des coordonnées. L'autre extrémité A de la barre est soumise à une force attractive émanant d'un centre fixe M du plan xOy et représentée précisément par le vecteur AM. Equilibre de cette barre.

Etudier la surface lieu de l'extrémité du vecteur ON qui représente la réaction du point O quand M occupe successivement toutes les positions dans le plan xOy. On donnera une définition géométrique de ce lieu.

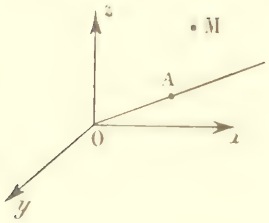
A. Sainte-Lague, professeur au lycée de Douai

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE

Concours de 1910

1873. — *Soient trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz. OA un axe fixe défini par le point A de coordonnées x_0, y_0, z_0. M un point invariablement lié à l'axe OA et qui tourne autour de OA avec une vitesse angulaire constante ω. Donner, sans démonstration, les expressions des composantes suivant Ox, Oy, Oz du vecteur-vitesse du point M, à l'instant où ses coordonnées sont x_1, y_1, z_1. Le sens positif de la rotation est le sens direct par rapport à un observateur ayant les pieds en O et la tête en A (le sens direct est de gauche à droite).*



Application numérique. — *On donne*

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 8, \quad x_1 = 18, \quad y_1 = 14, \quad z_1 = 11$$

M *fait* 27 *tours par minute sexagésimale autour de* OA *dans le sens positif. L'unité de temps est la seconde sexagésimale, l'unité de longueur le centimètre. Calculer les composantes suivant* Ox, Oy, Oz *du vecteur-vitesse de* M, *à un centimètre près.*

Le vecteur-vitesse du point M n'est autre chose que le moment par rapport à ce point d'un vecteur ω

porté par l'axe de rotation. Les cosinus directeurs de cet axe sont donnés par les formules

$$\frac{\cos\alpha}{x_0} = \frac{\cos\beta}{y_0} = \frac{\cos\gamma}{z_0} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$$

les projections du vecteur ω sont $\omega\cos\alpha$, $\omega\cos\beta$, $\omega\cos\gamma$ et les coordonnées de son origine O par rapport à des axes menés par le point M parallèlement aux axes Ox, Oy, Oz sont $-x_1$, $-y_1$, $-z_1$. On a donc

$$v_x = -y_1\omega\cos\gamma + z_1\omega\cos\beta = \omega\frac{y_0z_1 - z_0y_1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}, \qquad v_y = -z_1\omega\cos\alpha + x_1\omega\cos\gamma = \omega\frac{z_0x_1 - x_0z_1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},$$

$$v_z = -x_1\omega\cos\beta + y_1\omega\cos\alpha = \omega\frac{x_0y_1 - y_0x_1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$$

Application numérique : $\omega = \frac{2\pi\times 27}{60} = \frac{9\pi}{10}$, $\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2} = 9$.

$$y_0z_1 - z_0y_1 = -68, \qquad z_0x_1 - x_0z_1 = 133, \qquad x_0y_1 - y_0x_1 = -58$$

$$v_x = -\frac{\pi}{10}\times 68 = -21{,}36\ldots \qquad v_y = \frac{\pi}{10}\times 133 = 41{,}78\ldots \qquad v_z = -\frac{\pi}{10}\times 58 = -18{,}22\ldots$$

ou, à un centimètre près, $v_x = -21$, $v_y = 42$, $v_z = -18$.

Bonnes solutions de MM. L. Moniaut ; A. Rousseau.

1874. — *On considère la conique* (C)

$$x^2 + 4y^2 - 2py = 0$$

rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy ; p *désigne un segment rectiligne donné. Dans son plan on prend un point* M *d'abscisse* α *et d'ordonnée* β. *On joint l'origine* O *à deux points* P *et* P′ *diamétralement opposés sur* (C), *et du point* M *on abaisse des perpendiculaires sur* OP *et* OP′ ; *soient* Q *et* Q′ *leurs pieds respectifs sur ces droites, les points* P *et* P′ *décrivant* (C).

1° *Établir la relation à coefficients constants qui lie les coefficients angulaires* m *et* m' *de* OP *et de* OP′.

2° *Démontrer que la droite* QQ′ *passe par un point fixe ; soit* S *ce point. Calculer les coordonnées de* S *en fonction de celles de* M.

3° *La conique* (C) *restant fixe, ainsi que* Ox *et* Oy, *le point* M *étant mobile et par suite aussi le point* S *qui lui correspond, on demande les lois du mouvement de* M *projeté sur* Ox *et* Oy, *dans l'hypothèse où le vecteur-accélération de* M, *pour chacune de ses positions, est le vecteur* MS *correspondant. On supposera qu'à l'instant pris pour origine du temps la vitesse de* M *est nulle et que ses coordonnées* α_0 *et* β_0 *sont données positives.*

4° *Construire la trajectoire du point* M *et discuter le sens de son mouvement sur cette trajectoire.*

1° La conique C est une ellipse passant par l'origine, tangente à Ox et ayant pour centre le point $x = 0$, $y = \frac{p}{4}$ sur Oy. Ses demi-longueurs d'axes sont $a = \frac{p}{2}$, $b = \frac{p}{4}$. Or PP′ étant un diamètre, OP et OP′ sont deux cordes supplémentaires, d'où la relation entre m et m',

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{\frac{p^2}{16}}{\frac{p^2}{4}} = -\frac{1}{4}$$

Pour le vérifier, soit $y = \lambda x + \frac{p}{4}$ l'équation d'un diamètre quelconque PP′ ; nous aurons l'équation du système de deux droites OP et OP′ en éliminant y entre les deux équations rendues homogènes

$$x^2 + 4y^2 - 2pyz = 0, \qquad y = \lambda x + \frac{p}{4}z,$$

d'où $$x^2 + 8\lambda xy - 4y^2 = 0.$$

On en déduit $$mm' = -\frac{1}{4}, \qquad m + m' = 2\lambda.$$

2° Le point Q est à l'intersection de la droite OP, $y = mx$, avec la perpendiculaire menée du point M sur OP : $y - \beta = -\frac{1}{m}(x - \alpha)$. Ses coordonnées sont

$$x = \frac{\alpha + m\beta}{1 + m^2}, \qquad y = \frac{m(\alpha + m\beta)}{1 + m^2}.$$

Celles de Q s'en déduisent en changeant m en m'. La droite QQ′ a donc pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha + m\beta & m(\alpha + m\beta) & 1 + m^2 \\ \alpha + m'\beta & m'(\alpha + m'\beta) & 1 + m'^2 \end{vmatrix} = 0.$$

En retranchant les éléments de la troisième ligne de ceux de la seconde, on obtient

$$(m - m')\beta, \qquad m(m - m')\beta, \qquad m^2 - m'^2,$$

ou, suppression faite du facteur $m - m'$,

$$\beta, \qquad m\beta, \qquad m + m'.$$

En second lieu, si l'on multiplie les éléments de la seconde ligne par m' et qu'on en retranche ceux de la troisième, multipliés par m, il vient

$$(m' - m)\alpha, \qquad (m'm - m)\alpha, \qquad (m' - m)(1 - mm'),$$

ou, suppression faite du facteur $m' - m$,

$$\alpha, \qquad -\alpha m, \qquad 1 - mm'.$$

Nous aurons donc pour équation de la droite QQ′

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \beta & \beta + \alpha(m + m') & m + m' \\ \alpha & -\alpha mm' & 1 - mm' \end{vmatrix} = 0.$$

Remplaçant $m + m'$ par 2λ et mm' par $-\frac{1}{4}$, il vient

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \beta & \beta + 2\lambda\alpha & 2\lambda \\ \alpha & \frac{1}{4}\alpha & \frac{5}{4} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \beta & \beta & 0 \\ \alpha & \frac{1}{4}\alpha & \frac{5}{4} \end{vmatrix} + 2\lambda \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & \frac{1}{4}\alpha & \frac{5}{4} \end{vmatrix} = 0.$$

Elle contient le paramètre variable λ au premier degré seulement.

Donc la droite QQ′ passe par un point fixe. C'est le point de rencontre S des deux droites

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \beta & \beta & 0 \\ 4\alpha & \beta & 5 \end{vmatrix} = 5\beta x - \beta y - \beta^2 - 4\alpha^2 = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 4\alpha & \beta & 5 \end{vmatrix} = 4\beta x - \alpha y - \alpha\beta = 0.$$

Ses coordonnées sont : $x = \frac{4}{5}\alpha$, $y = \frac{1}{5}\beta$.

3° Calculons les projections du vecteur MS sur les axes OY, OY.

$$\text{proj. MS} = \frac{4}{5}\alpha - \alpha = -\frac{1}{5}\alpha \qquad \text{proj. MS} = \frac{4}{5}\beta - \beta = -\frac{1}{5}\beta$$

D'autre part l'accélération du point M a pour projections $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d^2\beta}{dt^2}$. Les équations différentielles du mouvement de M sont donc

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{1}{5}\alpha \qquad \frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{1}{5}\beta$$

équations de la forme $\frac{d^2y}{dx^2} = -\omega^2 y$ dont l'intégrale générale est $y = y_0 \cos x + \frac{y'_0}{\omega}\sin \omega x$. On aura donc

$$\alpha = \alpha_0 \cos\frac{t}{\sqrt{5}} + \alpha'_0\sqrt{5}\sin\frac{t}{\sqrt{5}} \quad \left(\omega = \frac{1}{\sqrt{5}}\right). \qquad \beta = \beta_0 \cos\frac{2t}{\sqrt{5}} + \frac{\beta'_0\sqrt{5}}{2}\sin\frac{2t}{\sqrt{5}} \quad \left(\omega = \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

La vitesse au temps $t = 0$ étant nulle, $\alpha'_0 = 0$, $\beta'_0 = 0$, et il reste

$$\alpha = \alpha_0 \cos\frac{t}{\sqrt{5}}, \qquad \beta = \beta_0 \cos\frac{2t}{\sqrt{5}},$$

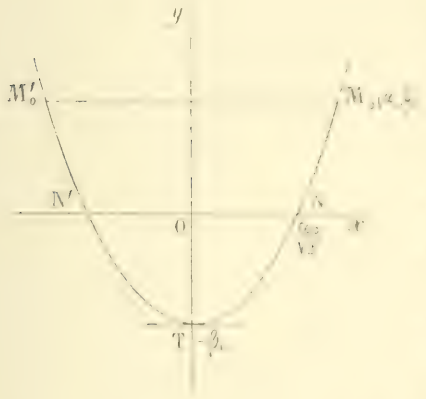
α_0 et β_0 étant données positives.

4° La trajectoire est l'arc $M_0TM'_0$ d'une parabole, dont on obtient l'équation en éliminant t entre les équations ci-dessus. On a en effet

$$\cos 2\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) = \cos^2\frac{t}{\sqrt{5}} - \sin^2\frac{t}{\sqrt{5}} = 2\cos^2\frac{t}{\sqrt{5}} - 1,$$

d'où l'équation (en remplaçant α et β par x et y)

$$\frac{y}{\beta_0} = 2\frac{x^2}{\alpha_0^2} - 1.$$



Le mobile part de M_0 au temps $t = 0$, passe en N $\left(x = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}},\ y = 0\right)$ au temps $t = \frac{\pi\sqrt{5}}{4}$, puis au sommet T de la parabole au temps $\frac{\pi\sqrt{5}}{2}$, en N_1 symétrique de N au temps $t = \frac{3\pi\sqrt{5}}{4}$, en M_1 symétrique de M_0 au temps $t = \pi\sqrt{5}$, revient en N au temps $t = \frac{5\pi\sqrt{5}}{4}$, etc, et au point de départ M_0 au temps $t = 2\pi\sqrt{5}$, après quoi le mouvement se reproduit périodiquement, la période étant $2\pi\sqrt{5}$.

P. L.

Bonnes solutions de MM. G. Estrem, G. Lyon à Rodez; R. Mlaing à Alès; L. Vachon, Nivelage, à Corbeille; Louis Perrin, à Trévoux; A. Rousseau, à Fourchambault; [illegible], à Marcq-en-Barœul; [illegible] à Toulouse; L. Gonnard, E. [illegible].

1875. — *Un fil* AB, *indéfini, d'épaisseur négligeable, est chargé uniformément d'électricité de densité* λ *par unité de longueur; écrire l'expression de la composante du champ* $\mathcal{M}$ *produite par un élément* dl *au un point* P *à une distance* a *du fil et en déduire le champ* $\mathcal{M}$ *au point* P.

Calcul numérique. — Trouver dans le système des unités électromagnétiques la valeur de $\mathcal{M}$, *sachant que la charge du fil est de* 4,5 *coulombs par kilomètre et que le point* P *est à* 3 *mètres du fil. Le pouvoir inducteur spécifique du milieu ambiant est égal à l'unité.*

L'élément dl contient une masse d'électricité égale à λdl ; l'action de cette masse sur une masse unité placée en P, à une distance r de l'élément, vaut, en désignant par k le pouvoir inducteur spécifique du milieu ambiant,

$$df = \frac{1}{k}\frac{\lambda dl}{r^2} = \frac{\lambda}{k}\frac{dl}{a^2}\cos^2\alpha.$$

Comptons l à partir du pied de la perpendiculaire abaissée du point P sur AB ; on a

$$l = a \operatorname{tg}\alpha \qquad \text{et} \qquad dl = \frac{a}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

Remplaçons et il vient

$$df = \frac{1}{k}\frac{\lambda}{a}d\alpha.$$

Or le champ est la somme des projections de ses composantes sur la perpendiculaire à AB, il est égal à l'intégrale

$$\mathcal{H} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k}\frac{\lambda}{a}\cos\alpha d\alpha = \frac{1}{k}\frac{\lambda}{a}(\sin\alpha)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{k}\frac{\lambda}{a}.$$

Application numérique. — Le coulomb vaut 3×10^9 unités électrostatiques C. G. S., le kilomètre 10^5 et le mètre 10^2. Donc $\lambda = \frac{4,5\times3\times10^9}{10^5}$, $a = 3\times10^2$, enfin $k = 1$. Remplaçons :

$$\mathcal{H} = 2\frac{4,5\times3\times10^9}{10^5\times3\times10^2} = 900.$$

J. SOUBADNE, à Mont-de-Marsan.

Remarque. — En suivant une autre méthode que celle que suggère l'énoncé, on peut arriver plus rapidement à l'expression du champ. A cet effet, imaginons un cylindre de révolution d'axe AB, de longueur très grande l et passant par le point P. Appliquons-lui le théorème de Gauss, en remarquant que la charge située à l'intérieur du cylindre est λl ; il vient

$$2\pi a l\mathcal{H} = 4\pi\lambda l \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{H} = 2\frac{\lambda}{a}.$$

Bonne solution de M. L. MONTAGE.

1876. — A. *On chauffe* $2^g,5$ *d'un mélange parfaitement sec d'oxalate neutre de potassium et de formiate de potassium avec un excès d'acide sulfurique concentré. On recueille un mélange gazeux qu'on recueille dans un tube eudiométrique gradué sur la cuve à mercure.*

B. *Dans cet eudiomètre on introduit une solution aqueuse froide de potasse en excès et on agite. On absorbe ainsi un volume gazeux égal à* $0^l,223$.

C. *On fait passer dans l'eudiomètre contenant, avec la solution de potasse, un résidu gazeux, une masse de peroxyde de sodium telle qu'après le passage de l'étincelle le volume gazeux soit nul.*

On demande :

1° *La composition du mélange salin initial employé pour réaliser l'expérience* A ;

2° *La nature du gaz absorbé par la potasse pendant l'opération* B. *Ecrire la réaction ;*

3° *Quelles réactions se passent en* C, *quel est le volume du gaz produit après l'introduction du peroxyde de sodium ;*

4° *Le calcul de la masse du peroxyde de sodium.*

On supposera que les réactions sont complètes et qu'il n'y a pas de perte.

On ne fera pas les corrections de température, pression, etc.

L'acide sulfurique, au contact de l'oxalate de potassium, donne un mélange d'anhydride carbonique et d'oxyde de carbone ; avec le formiate, il ne se dégage que de l'oxyde de carbone. Ces réactions se font suivant les équations

(1) $$C^2O^4K^2 + 2SO^4H^2 = 2SO^4KH + H^2O + CO^2 + CO.$$

(2) $$HCO^2K + SO^4H^2 = SO^4KH + H^2O + CO.$$

Dans l'opération B, la potasse absorbe l'anhydride carbonique pour donner du carbonate de potassium :

$$2KOH + CO^2 = CO^3K^2 + H^2O.$$

Le volume absorbé, $0^l,223$, représente exactement $\frac{1}{100}$ de molécule de gaz carbonique ; or l'équation (1) montre qu'à une molécule de gaz carbonique correspond une molécule ou 166^g d'oxalate ; la quantité d'oxalate contenue dans le mélange était donc $1^g,66$ et la quantité de formiate

$$2^g,5 - 1^g,66 = 0^g,84.$$

Le poids moléculaire du formiate étant précisément 84, on avait également $\frac{1}{100}$ de molécule de ce sel.

Les équations (1) et (2) montrent qu'une molécule de chacun des deux sels produit une molécule d'oxyde de carbone. Le volume d'oxyde de carbone dégagé représente donc $\frac{2}{100}$ de molécule, soit $0^l,446$.

Dans la réaction C, le peroxyde de sodium se décompose pour former avec l'eau une dissolution de soude caustique et abandonne de l'oxygène. Cet oxygène, sous l'action de l'étincelle, se combine avec l'oxyde de carbone pour donner de l'anhydride carbonique qui sera absorbé par la dissolution de potasse et de soude. Or la combustion se fait entre une molécule d'oxyde de carbone et une demi-molécule d'oxygène : $CO + O = CO^2$. La réaction ayant été complète et ayant brûlé $\frac{2}{100}$ de molécule d'oxyde de carbone, la décomposition du peroxyde de sodium a dû donner $\frac{1}{100}$ de molécule d'oxygène. La formule généralement admise pour le peroxyde de sodium est Na^2O^2 : l'action de l'eau est alors représentée par

$$Na^2O^2 + H^2O = 2NaOH + O.$$

Pour avoir $\frac{1}{100}$ de molécule d'oxygène, il faut donc employer $\frac{2}{100}$ de molécule de peroxyde, soit

$$\frac{2}{100} \times 78 = 1^g,56.$$

G. LACH, à Rodez.

Assez bonne solution de M. Félicien Michel, à Larnage.

1878. — *Résoudre un triangle* ABC *connaissant l'angle* B, *la longueur* a *du côté* BC, *et la somme* k^2 *des carrés du côté* AC *et de la hauteur* AD *issue de* A

$$\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 = k^2.$$

On pourra prendre pour inconnue le côté AB. *Indiquer dans quels cas le problème est possible, combien il a de solutions et dans quels cas l'angle* A *est aigu, droit ou obtus.*

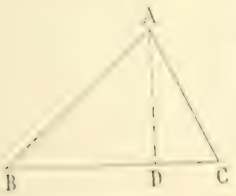
Trouver le minimum de k^2 *pour des valeurs données de* a *et de* B *et, dans le cas où* k^2 *est égal au minimum, calculer* tg A *et* tg C *en fonction de* tg B.

Soit $AB = c$; on a $AD = c \sin B$, $\overline{AC}^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$.

L'équation du problème est donc $c^2(1 + \sin^2 B) - 2ac \cos B + a^2 - k^2 = 0$.

Pour convenir, une valeur de c doit être réelle et positive. L'angle A sera aigu, droit ou obtus, suivant que

$$a^2 \gtrless b^2 + c^2 = a^2 + 2c^2 - 2ac \cos B \quad \text{ou} \quad c \gtrless 2a \cos B$$



1° Condition de réalité : $a^2 \cos^2 B - (a^2 - k^2)(1 + \sin^2 B) \geq 0$,

d'où $$k^2 \geq \frac{2a^2 \sin^2 B}{1 + \sin^2 B}$$

2° Comparaison des racines à 0 et à $a \cos B$.

$$f(0) = a^2 - k^2, \qquad f(a\cos B) = a^2 \sin^2 B(1 - \cos^2 B) - k^2.$$

On vérifie sans peine que

$$\frac{2a^2 \sin^2 B}{1 + \sin^2 B} < a^2 \sin^2 B(1 + \cos^2 B) < a^2.$$

Cela fait, distinguons suivant que B est aigu, droit ou obtus.

1° $B < \frac{\pi}{2}$. Nous aurons le tableau suivant :

k^2	$f(0)$	$f(a\cos B)$	
$\frac{2a^2 \sin^2 B}{1 + \sin^2 B}$			$c' = c'' = \frac{a \sin B}{\sqrt{1 + \sin^2 B}} < a \cos B$. $A' = A''$ (obtus).
			deux racines réelles positives : $\frac{c' + c''}{2} = \frac{a \cos B}{1 + \sin^2 B} < a \cos B$,
	+	+	d'où $0 < c' < c'' < a \cos B$, par suite A' et A'' obtus.
$a^2 \sin^2 B(1 + \cos^2 B)$		0	$c' < c'' = a \cos B$. A' obtus. A'' droit.
			deux racines réelles positives $c' < a \cos B < c''$.
	+	−	A' obtus, A'' aigu.
a^2	0		$c' = 0$, $c'' < a \cos B$, une solution A'' aigu.
	−	−	$0 < c'' < a \cos B$, une solution A'' aigu.
$+\infty$			

En résumé, deux solutions si $\frac{2 \sin^2 B}{1 + \sin^2 B} < k^2 < a^2$ et une seule pour $k^2 > a^2$. Le minimum de k^2 est

$$k^2 = \frac{2a^2 \sin^2 B}{1 + \sin^2 B},$$

la valeur correspondante de c est

$$c = \frac{a \sin B}{\sqrt{1 + \sin^2 B}}$$

On en déduit :

$$\frac{\cos B}{1 + \sin^2 B} = \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin(A - B)}{\sin A},$$

$$\sin A \cos B = (\sin A \cos B - \sin B \cos A)(1 + \sin^2 B),$$

$$0 = \sin B \cos A(1 + \sin^2 B) - \sin A \cos B \sin^2 B,$$

d'où

$$\operatorname{tg} A = -\frac{1 + \sin^2 B}{\sin B \cos B} = -\frac{1 - 2 \operatorname{tg}^2 B}{\operatorname{tg} B} \qquad (A' = A'', \text{ obtus}).$$

On aura de même

$$\frac{\cos B}{1 + \sin^2 B} = \frac{\sin C}{\sin(B + C)}, \qquad \cos B(\sin B \cos C + \sin C \cos B) = \sin C(1 + \sin^2 B),$$

$$\sin B \cos B \cos C = \sin C(1 - \sin^2 B - \cos^2 B) = 2 \sin C \sin^2 B. \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{tg} C = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} B.$$

2° $B = \frac{\pi}{2}$. L'équation se réduit à $2a^2 = k^2 - a^2$; le problème n'est possible que pour $k^2 > a^2$; il admet une solution $\left(c = \sqrt{\frac{k^2 - a^2}{2}}, \text{ angle A aigu}\right)$

3° $B > \frac{\pi}{2}$. La somme des racines étant négative, le problème n'est possible que dans le cas où l'équation en c a une racine positive $(f(0) < 0)$, c'est-à-dire pour $\cos B > \frac{a}{b}$, et pour $c' < a \cos B < 0 < c''$, à cette racine c'' correspond un angle A″ aigu (évident *a priori*).

Dans ces deux cas, le minimum de k^2 est a^2 et correspond à une valeur nulle de c. Pour $c = 0$, on trouverait

$$\operatorname{tg} C = 0, \qquad \operatorname{tg} A = -\operatorname{tg} B.$$

P. L.

Solutions de MM. G. Esteben ; G. Lach ; Marescalchi ; Névejans ; A. Rousseau, à Fontainebleau-Wattrus ; J. Thomas, à Lyon ; G. Fouchy ; C. Jacquet ; J. Soubaigné

1879. — *En désignant par* A *les* $\frac{3}{7}$ *d'un angle droit, calculer, soit en grades, soit en degrés, tous les angles* x *positifs et inférieurs à quatre angles droits qui vérifient l'équation*

$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt[3]{\frac{32425 \operatorname{tg} A}{85664 \sin 3A}}.$$

$$A = \frac{300^g}{7} = 42^g,85\,\frac{5}{7}$$

$$\pi - 3A = \frac{500^g}{7} = 71^g,42\,\frac{6}{7}$$

$$\log \operatorname{tg} 42^g,85 = \bar{1},90162 \qquad \Delta = 14$$

$$\frac{5}{7} \qquad 10$$

$$\log \operatorname{tg} A = \bar{1},90172$$

$$\log \sin 71^g,42 = \bar{1},95468 \qquad \Delta = 3$$

$$\frac{6}{7} \qquad 3$$

$$\log \sin 3A = \bar{1},95471$$

$$\log 32425 = 4,51088$$

$$\log 85664 = 4,93280$$

$$\log 32425 = 4,51088$$

$$\log \operatorname{tg} A = \bar{1},90172$$

$$\operatorname{colog} 85664 = \bar{5},06720$$

$$\operatorname{colog} \sin 3A = 0,04529$$

$$3 \log \operatorname{tg} \varphi = \bar{1},52509$$

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \bar{1},844696$$

$$= \bar{1},84170$$

Calcul de x en grades.

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \bar{1},84170$$

$$38^g,64 \qquad \frac{64}{9} \qquad \Delta = 14$$

$$6 \qquad \frac{8,4}{0,6}$$

$$4$$

$$\varphi = 38^g,6464$$

or $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} \varphi$, d'où $x = \frac{\varphi + k\pi}{3}$

$$x_0 = \frac{\varphi}{3} = 12^g,8821, \qquad x_3 = \frac{\varphi + 3\pi}{3} = 212^g,8821$$

$$x_1 = \frac{\varphi + \pi}{3} = 79^g,5488, \qquad x_4 = \frac{\varphi + 4\pi}{3} = 279^g,5488$$

$$x_2 = \frac{\varphi + 2\pi}{3} = 146^g,2155, \qquad x_5 = \frac{\varphi + 5\pi}{3} = 346^g,2155$$

Calcul en degrés.

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \bar{1},84170$$

$$34^\circ 10' \qquad \frac{10}{21} \qquad \Delta = 25$$

$$50' \qquad \frac{22,5}{1,5}$$

$$\varphi = 34^\circ 40' 50''$$

$$\frac{\varphi}{3} = 11^\circ 35' 38''$$

$$x_0 = 11^\circ 35' 38'', \qquad x_3 = 191^\circ 35' 38''$$

$$x_1 = 71^\circ 35' 38'', \qquad x_4 = 251^\circ 35' 38''$$

$$x_2 = 131^\circ 35' 38'', \qquad x_5 = 311^\circ 35' 38''$$

Conversion des grades en degrés.

12^g	$10°\,48'$	212^g	$190°\,48'$
88	$47'\,31'',2$	88	$47'\,31'',2$
21	$6'',8$	21	$6'',8$
$x = 11°\,35'\,38'',0$		$x_1 = 191°\,35'\,38'',0$	
79^g	$71°\,6'$	279^g	$251°\,6'$
54	$29'\,9'',6$	54	$29'\,9'',6$
68	$28'',5$	88	$28'',5$
$x = 71°\,35'\,38'',1$		$x_1 = 251°\,35'\,38'',1$	
146^g	$131°\,24'$	346^g	$311°\,24'$
21	$11'\,20'',4$	21	$11'\,20'',4$
55	$17'',8$	55	$17'',8$
$x = 131°\,35'\,38'',2$		$x_1 = 311°\,35'\,38'',2$	

P. L.

Calculs exacts : MM. J. Soulaine, à Mont-de-Marsan (en grades) ; A. Bonnetac, à Fourmes (en degrés) ; G. Laou, à Rodez (grades et degrés) ; C. Jacquet (en degrés) ; L. Montaut (en degrés).

ÉCOLE CENTRALE (1910)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Suite*)

5234. — Etudier les mouvements rectilignes

$$x = x_0 + vt - \frac{k}{2}t^2, \qquad x = at - t^2, \qquad x = M - t^2, \qquad x = t - \sin t, \qquad x = 2\operatorname{ch} t + t.$$

Diagrammes.

5235. — Mouvement résultant des deux mouvements

$$x = a\cos pt, \qquad y = b\cos pt,$$

les axes Ox, Oy étant rectangulaires.

5236. — Mouvement résultant des deux mouvements

$$x = a\cos pt, \qquad y = b\sin pt.$$

Force qui produirait le mouvement. Trajectoire.

5237. — On donne les trois mouvements

$$x = a\cos pt, \qquad y = b\sin pt, \qquad z = c\sin pt.$$

Mouvement résultant. Trajectoire.

5238. — On compose suivant les axes les trois mouvements

$$x = at, \qquad y = bt, \qquad z = ct + dt^2.$$

Mouvement résultant. La trajectoire est une parabole. En trouver l'axe. Force qui produit le mouvement.

5239. — L'hodographe d'un mouvement est une droite parcourue d'un mouvement uniforme ; quel est le mouvement ?

5240. — Mouvement d'un point pesant sur une hélice verticale sans frottement.

5241. — Un point matériel pesant se meut sur une circonférence de rayon r, verticale, de telle façon que sa vitesse soit $v = \sqrt{\frac{gr}{2}}$ lorsque le point se trouve à l'une des extrémités du diamètre horizontal. Étudier le mouvement.

5242. — Champ de forces. — Surfaces de niveau. — Lignes de forces. — Intensité du champ.

5243. — Lignes de force du champ formé par la pesanteur et une force attractive proportionnelle à la distance du point à l'origine.

5244. — Mouvement d'un point attiré par une force centrale inversement proportionnelle au carré de la distance. Trajectoire.

5245. — Mouvement d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance.

5246. — Mouvement d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse du cube de la distance. Trajectoire. Cas où l'on obtient une droite.

5247. — Mouvement d'un point de l'espace attiré par l'axe des z proportionnellement à sa distance à cet axe.

5248. — On donne un point M se déplaçant sur $x'x$, la force qui le sollicite est $f = m\omega^2 x$. Équation du mouvement du point. Vitesse.

5249. — On considère un axe vertical Oz. Un point M pesant est repoussé par cet axe proportionnellement à la distance. Équations du mouvement.

5250. — On donne une force dont les projections sont ma, mb, mc. Mouvement communiqué par cette force à un point de masse m, qui part de l'origine avec une vitesse dont les composantes suivant les axes sont x'_0, y'_0, z'_0.

5251. — Soient trois axes rectangulaires, un vecteur (x, y, z, X, Y, Z) et un point $M(x', y', z')$. Projections du moment linéaire de ce vecteur par rapport à M. Lieu de M tel que le moment passe par un point fixe (α, β, γ).

5252. — On donne le moment d'un système de vecteurs par rapport à un point O. Soient L, M, N ses projections sur les axes. Trouver le moment résultant par rapport à l'axe

$$\frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z-\gamma}{c}.$$

5253. — Axe central d'un système de vecteurs. Démontrer la formule $L' = L - y'Z + z'Y$, et les formules analogues, qui donnent les projections sur les axes du moment d'un vecteur par rapport au point (x', y', z'). Équations de l'axe central.

5254. — Axe d'un couple par rapport à un point de l'espace. Condition nécessaire et suffisante pour que le moment résultant d'un système de vecteurs par rapport à un point soit indépendant de la position de ce point.

5255. — Centres de gravité du périmètre d'un triangle (supposé homogène), de l'aire d'un trapèze ; d'un quadrilatère ; d'un arc de cercle ; de l'aire d'un secteur circulaire ; de l'aire d'un demi-octogone régulier ; d'un prisme ; d'une pyramide ; du volume d'un secteur sphérique ; de la calotte sphérique (appliquer le théorème de Guldin) ; d'une zône sphérique.

5256. — Conditions d'équilibre d'un solide qui a un point fixe. Que deviennent les conditions d'équilibre quand le corps peut glisser le long d'un axe passant par le point ?

5257. — Équilibre d'un solide invariable qui a deux points fixes. Conditions analytiques de l'équilibre.

5258. — Conditions d'équilibre d'un solide reposant sur un plan par trois points d'appui.

5259. — Poulie mobile. Conditions d'équilibre entre la puissance et la réaction appliquée au point fixe du fil. Calcul de la charge en fonction de la puissance.

5260. — Poulie avec frottement dans le cas où les cordons sont parallèles. Condition d'équilibre.

5261. — Travail d'un couple pour un déplacement élémentaire, le bras de levier restant toujours égal à lui-même et la direction des forces restant fixe.

Géométrie et Géométrie analytique (M. Malloizel).

5262. — Rapport anharmonique de quatre points en ligne droite.

5263. — Trouver sur une droite deux points x, y, à la fois conjugués harmoniques par rapport à deux couples de points A, C et B, D de cette droite.

5264. — Lieu des points d'où l'on voit deux cercles sous le même angle. Lieu des points tels que le rapport des distances de chacun d'eux à deux points fixes soit constant (dans le plan et dans l'espace).

5265. — On donne trois points A, B, C. Lieu des points M de l'espace tels que l'on ait $\frac{MA}{\alpha} = \frac{MB}{\beta} = \frac{MC}{\gamma}$, α, β, γ étant des quantités données.

5266. — Lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cercles ; lieu des points tels que la somme de leurs puissances par rapport à deux cercles soit nulle. Lieu des points d'égale puissance par rapport à deux sphères, trois sphères. Lieu des centres des sphères orthogonales à trois sphères.

5267. — Lieu des points tels que la différence des carrés des distances de chacun d'eux à deux points fixes soit constante (dans le plan et dans l'espace).

5268. — Mener par un point P une sécante telle que la portion de cette sécante comprise entre deux cercles concentriques ait une longueur donnée.

5269. — Mener une droite qui coupe deux cercles sous le même angle. Mener une droite qui coupe trois cercles sous le même angle. Nombre de solutions.

5270. — On donne deux points A et B. Mener par un troisième point C une droite telle que la somme de ses distances aux points A et B ait une valeur donnée. Nombre de solutions.

5271. — On donne une droite Δ et deux points A et B. Tracer un cercle qui passe par A et B et intercepte sur Δ un segment de longueur donnée.

5272. — On donne une droite Δ et de part et d'autre de cette droite deux points A et B. Tracer le cercle qui passe par A et B et intercepte sur Δ le segment le plus petit possible.

5273. — On donne un cercle (C) et deux points A et B, l'un extérieur, l'autre intérieur. Tracer le cercle qui passant par A et B intercepte sur (C) la corde minimum.

5274. — On donne dans l'espace trois points A, B, C et une droite Δ. Quel passer par les trois points la sphère qui détermine sur Δ le segment minimum.

5275. — Lieu des centres des sphères tangentes à deux droites qui se coupent. Une troisième droite s'appuie sur les deux premières ; lieu des centres des sphères tangentes aux trois droites.

5276. — Construire une sphère passant par trois points et tangente à un plan. Nombre de solutions. Conditions de possibilité.

5277. — Construire une sphère passant par trois points et tangente à une droite. Nombre de solutions. Conditions de possibilité.

5278. — Mener une sphère passant par deux points et tangente à deux plans. Nombre de solutions.

5279. — Mener une sphère tangente à trois plans et passant par un point. Nombre de solutions.

5280. — Mener une sphère passant par un point et tangente à trois droites.

5281. — Construire une sphère de rayon donné tangente à trois plans. Nombre de solutions.

5282. — On donne deux plans rectangulaires et une sphère. Trouver sur la sphère le lieu des points tels que la somme des carrés des distances de chacun d'eux aux deux plans soit une constante donnée.

5283. — Intersection d'une droite et d'une ellipse définie par ses foyers et un cercle directeur ; d'une droite et d'une ellipse définie par ses foyers et son grand axe ; d'une droite et d'une hyperbole définie par ses foyers et son axe transverse ; d'une droite et d'une parabole définie par son foyer et sa directrice.

5284. — Mener d'un point donné les tangentes à une ellipse dont on connaît les foyers et le grand axe. En déduire le lieu des points d'où l'on voit l'ellipse sous un angle droit.

5285. — D'un point P du grand axe d'une ellipse dont on connaît les foyers et les sommets mener une normale à cette courbe. Montrer qu'on est ramené à prendre la polaire du conjugué harmonique de P par rapport aux deux foyers.

5286. — Tangentes communes à deux ellipses ayant un foyer commun et définies par leurs foyers et leurs grands axes. Démontrer que les deux tangentes communes et la droite qui joint les deux autres foyers sont concourantes.

5287. — On donne deux ellipses ayant un foyer commun. Démontrer que les directrices correspondantes à ce foyer sont conjuguées harmoniques par rapport aux sécantes communes aux deux courbes.

5288. — On donne une ellipse, une droite quelconque et deux points M et N de cette droite. Tracer dans l'ellipse une corde parallèle à MN et égale à MN.

5289. — Construire une hyperbole connaissant trois points et les directions asymptotiques. Centre. Asymptotes.

5290. — Lieu des centres des cercles tangents à deux cercles donnés extérieurs l'un à l'autre.

5291. — On donne une hyperbole par ses foyers et ses sommets. Lui mener une tangente parallèle à une direction donnée. Condition de possibilité.

5292. — Intersection de deux paraboles homofocales. Mener les tangentes communes à ces courbes.

5293. — On donne une parabole et deux points A et B. Mener à la parabole une tangente telle que le quotient des distances de A et B à cette tangente soit un rapport donné.

5294. — On donne une droite D et un point A, fixes. Lieu des points tels que la somme des distances de ce point à la droite D et à A soit constante.

5295. — Construire une conique connaissant un foyer et trois points ; une directrice et trois points ; un foyer, deux points et une tangente.

5296. — Lieu des points tels que le rapport des distances de chacun d'eux à un point fixe et à un plan soit constant. Discussion suivant que la valeur de la constante est supérieure, égale ou inférieure à 1.

5297. — Lieu des points également éloignés d'un point et d'une droite dans l'espace.

5298. — Paraboloïde défini par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche. Plan tangent. Génératrices.

5299. — Trouver une droite d'un plan donné par son échelle de pente, passant par un point donné de ce plan et faisant un angle donné avec une droite donnée.

5300. — On donne deux droites graduées, mener une horizontale sur laquelle elles interceptent une longueur donnée. Conditions de possibilité.

5301. — Par un point donné mener une droite qui s'appuie sur deux droites données.

5302. — Par un point donné (a, a') mener une droite qui fasse deux angles donnés avec les deux plans de projection. Même problème en remplaçant la droite par un plan.

5303. — Déterminer la cote du sommet C d'un triangle isocèle connaissant la projection de ce point et les deux autres sommets $a(0)$, $b(4)$.

5304. — Ligne de pente d'un plan situé à une distance donnée d'un plan donné par sa ligne de pente.

5305. — D'un point a de cote donnée abaisser la perpendiculaire sur une droite graduée.

5306. — Perpendiculaire commune à deux droites graduées.

5307. — On donne une droite par deux de ses points $a(0)$, $b(3)$. Par b on mène un segment de droite bc et par c une droite cx. Connaissant les projections de bc et de cx et sachant que bc est perpendiculaire commune à $a(0)b(3)$ et à cx, on demande de déterminer bc et cx.

5308. — On considère une droite graduée Δ et un point $a(4)$ situé dans un plan défini par son échelle de pente. Mener par le point $a(4)$ la perpendiculaire à la droite Δ située dans le plan.

5309. — On donne un plan par son échelle de pente et une droite du plan par sa projection. Abaisser d'un point du plan la perpendiculaire sur la droite.

5310. — On donne deux droites dont l'une de profil. Perpendiculaire commune aux deux droites.

5311. — On donne les projections de deux droites quelconques. Déterminer un plan vertical tel qu'en projetant les deux droites sur ce plan on ait deux droites parallèles. Vraie grandeur de la perpendiculaire commune aux droites.

5312. — Mener par une droite donnée ab, $a'b'$ un plan faisant un angle donné avec le premier bissecteur.

5313. — Trouver l'angle de deux plans donnés par leurs échelles de pente.

5314. — Trouver l'angle de deux plans passant par la droite ab, $a'b'$ et respectivement par les points c, c' et d, d'.

5315. — On donne un plan par son échelle de pente et une droite graduée, faire tourner la droite autour d'une verticale jusqu'à l'amener parallèle au plan.

5316. — On donne un axe vertical, une droite quelconque par ses projections et un plan par ses traces. Faire tourner le plan autour de l'axe jusqu'à ce qu'il devienne parallèle à la droite.

5317. — On donne un axe Δ vertical et deux droites quelconques A, B ; faire tourner B autour de Δ jusqu'à ce qu'elle rencontre A.

5318. — Faire tourner un point $a(5)$ autour d'un axe vertical ω jusqu'à ce qu'il vienne à une distance donnée d'un plan vertical P.

5319. — Faire tourner un plan défini par son échelle de pente autour d'un axe vertical ω jusqu'à ce qu'il passe par un point donné $a(5)$.

5302. — On donne trois points $a(2)$, $b(5)$, $c(8)$. Construire dans leur plan un carré sur ac comme côté.

5321. — On donne un plan par sa ligne de pente et la projection ab d'un segment de droite de ce plan. Construire sur ce segment de droite un carré, puis un cube.

5322. — Construire un trièdre connaissant deux dièdres et la face comprise (géométrie cotée).

5323. — Déterminer, en géométrie cotée, les trois faces d'un trièdre dont on connaît les trois dièdres.

5324. — On donne une droite sa, $s'a'$ dans un plan P donné par ses traces. Construire un trièdre trirectangle ayant sa, $s'a'$ pour arête et une face dans le plan P. Traces du trièdre sur le plan horizontal.

5325. — On donne un triangle équilatéral abc dans le plan horizontal de cote zéro. Construire sur ce triangle comme face un octaèdre régulier.

5326. — On donne un segment ab dans le plan horizontal. Projections du tétraèdre régulier d'arête ab et dont un sommet est dans un plan donné par son échelle de pente.

5327. — Sur un segment de droite $a(2)b(4)$ situé dans un plan donné par son échelle de pente, construire un tétraèdre régulier dont une face soit dans ce plan.

5328. — On donne un point $d(4)$ et dans le plan horizontal de cote zéro un triangle abc. Mener par un point $m(0)$ un plan coupant le tétraèdre $a(0)b(0)c(0)d(4)$ suivant un parallélogramme.

5329. — On donne dans le plan horizontal de cote 0 un quadrilatère convexe $abcd$ et on considère la pyramide qui a pour sommet un point s de cote donnée et pour base le quadrilatère. Couper la pyramide par un plan tel que la section soit un parallélogramme.

5330. — On donne les projections $abcd$, $a'b'c'd'$ d'un tétraèdre. Trouver le volume de ce tétraèdre.

5331. — Un tétraèdre régulier a pour arête un segment de droite ab du plan horizontal et l'un des deux autres sommets est sur une sphère convenablement donnée. Projection du tétraèdre régulier (géométrie cotée).

5332. — Déterminer une hauteur et un dièdre du tétraèdre $a(0)b(0)c(0)d(5)$.

5333. — On donne le point $a(5)$ et une droite graduée d. Construire le tétraèdre régulier qui a le point pour sommet et dont une arête est située sur d. En déterminer un dièdre.

5334. — On donne dans le plan horizontal un cercle base d'un cône de sommet s, s' et une droite A, A', mener par cette droite un plan qui coupe le cône suivant une parabole. Condition de possibilité.

5335. — Sur le plan du tableau on donne un triangle qui est la projection d'un triangle équilatéral. Projection du cercle circonscrit à ce dernier triangle. Tracer deux diamètres conjugués de l'ellipse projection, ses axes, ses sommets.

5336. — On donne le centre et le rayon d'une sphère. Section plane de la sphère par un plan déterminé par sa trace horizontale et un point intérieur à la sphère.

5337. — Dans le plan de cote 0 on donne une ellipse base d'un cône de sommet donné de cote 5. Intersection de ce cône et d'un plan donné par son échelle de pente. Directions asymptotiques et asymptotes de l'intersection.

5338. — Dans le plan horizontal on donne un cercle base d'un cône de sommet (s, s'), et une des génératrices sa, $s'a'$ de ce cône. Intersection du cône et du plan mené par la ligne de terre parallèlement à sa, $s'a'$. Points où la tangente est horizontale. Asymptotes.

5339. — On donne un cercle projection horizontale d'une ellipse [illegible] cône de sommet s, s'. Section de ce cône par un plan perpendiculaire à une génératrice.

5340. — Un plan étant donné par ses traces et trois de ses points [illegible] qui pour base le cercle circonscrit au triangle de ces trois points, et son sommet sur la ligne de terre. Contours apparents de ce cône.

5341. — Contour apparent horizontal d'un cône de révolution tangent au plan horizontal le long d'une génératrice sa donnée, et dont on donne en outre le demi-angle au sommet.

5342. — Contour apparent horizontal du cône qui a pour sommet le point s [illegible] aux points $a(0)$, $b(2)$, $c(5)$.

5343. — Contours apparents d'un cône de sommet s, s' qui a pour base une parabole du plan horizontal.

5344. — Contour apparent d'un cône de sommet donné ayant pour base un cercle dans un plan donné par son échelle de pente.

5345. — On donne un cône de sommet $s(0)$ et de base [illegible] située dans le plan horizontal. Contour apparent du cône supplémentaire du cône précédent et de sommet arbitraire.

5346. — Un cône oblique à base circulaire est coupé par le premier plan bissecteur suivant une conique qu'on prend pour base d'un second cône de sommet donné t, t'. Contours apparents de ce second cône.

5347. — On donne un plan par ses traces P'αQ et un point o, o' de ce plan, centre d'un cercle de rayon R. Ce cercle est la base d'un cône de sommet s, s'. Contours apparents de ce cône.

5348. — On donne les projections de deux génératrices opposées d'un cylindre de révolution de rayon connu. Contours apparents du cylindre.

5349. — On donne un cône de révolution dont l'axe est vertical et les projections d'une droite quelconque. Mener une normale commune à cette droite et au cône.

5350. — Un cône de sommet s, s' a pour base un cercle du plan horizontal ; un cylindre horizontal a pour base un cercle du plan vertical. Mener une normale commune au cône et au cylindre.

5351. — On donne deux droites quelconques, axes de deux cylindres de révolution de rayons donnés. Mener à ces deux cylindres une normale commune.

5352. — On donne un cône oblique à base circulaire. On demande de trouver la trace horizontale du cône supplémentaire du précédent et de même sommet. Points à l'infini. Asymptotes.

5353. — On donne une conique dans le second bissecteur. Section droite du cylindre de direction donnée qui a cette conique pour base.

5354. — Une conique du plan horizontal est la base d'un cylindre parallèle à une direction donnée. Section droite de ce cylindre menée par un point donné α, α' de la ligne de terre. Tangentes de front à la section.

5355. — On donne la projection horizontale d'une hyperbole du premier bissecteur. Cette hyperbole est la base d'un cylindre parallèle à une direction donnée. Section du cylindre par un plan donné par ses traces. Asymptotes de la section.

5356. — Section circulaire, menée par un point a, a', d'un cône oblique qui a pour base un cercle du plan horizontal.

5357. — Cylindre de révolution admettant pour génératrices trois droites graduées parallèles.

5358. — Intersection d'une droite graduée et d'une sphère donnée.

5359. — Mener par un point m de cote donnée un plan tangent au cône de révolution engendré par une droite graduée tournant autour d'une autre droite graduée.

5360. — Soient deux droites graduées : elles sont les axes de deux cônes de révolution d'angles donnés. Mener un plan tangent commun à ces deux cônes.

5361. — Dans le plan horizontal de projection, on donne un triangle base d'un prisme qui a ses arêtes de front. Intersection de ce prisme et d'une sphère donnée par son centre et son rayon.

5362. — Sphère circonscrite à un tétraèdre régulier dont une face est dans le plan de cote zéro.

5363 — Par un point donné a, a', mener un plan tangent à deux sphères données, de centres o, o', ω, ω'. Nombre de solutions.

5364. — On donne dans le plan horizontal un cercle base d'un cône de sommet s, s'. D'un point extérieur a, a' on abaisse les perpendiculaires sur les génératrices du cône. Courbe qu'elles déterminent sur le cône. Tangente en un point.

5365. — Même problème, dans le cas où l'on abaisse de a, a' des perpendiculaires aux plans tangents au cône.

5366. — Intersection de deux cônes à axes verticaux ayant des sommets de même cote. Projection horizontale de cette intersection. L'intersection a-t-elle des plans de symétrie ?

5367. — Les axes de deux cônes de révolution de demi-angles aux sommets donnés sont deux droites du plan horizontal de cote zéro. Intersection de ces deux cônes.

5368. — Dans un plan horizontal on donne deux coniques tangentes en A. Par A on mène une droite quelconque sur laquelle on prend deux points S et T pour sommets de deux cônes ayant pour bases les coniques précédentes. Intersection des deux cônes.

5369. — Même question dans le cas où les coniques sont deux cercles.

5370. — On donne deux cercles sécants C, C' du plan horizontal. Sur une droite de l'espace passant par un de leurs points d'intersection A, on prend deux points S, T comme sommets de deux cônes de bases C, C'. Intersection des deux cônes. Tangente et point courant. La cubique rencontre-t-elle la génératrice commune ST ?

5371. — Intersection de deux cônes de sommets de même cote ayant respectivement pour bases une hyperbole et un cercle du plan horizontal de projection.

5372. — Intersection de deux cônes de sommets de même cote ayant respectivement pour bases une hyperbole équilatère et une ellipse du plan horizontal de projection.

5373. — Dans le plan horizontal de projection on donne deux cercles sécants et deux points s et t de chacun d'eux, projections de deux points S et T de cote donnée. Intersection des deux cônes qui ont pour bases les cercles et pour sommets S et T. Points à l'infini.

5374. — On donne, dans le plan horizontal de projection, deux cercles sécants o, ω ; on leur mene une tangente commune qui touche le cercle o en s, le cercle ω en t. Les points s et t sont les projections de deux points de l'espace S, T, de cotes 6 et 4, sommets respectifs de deux cônes de bases o et ω. Intersection des deux cônes. Plans limites. Point double. Asymptotes verticales.

5375. — On donne dans le plan horizontal de projection, deux coniques tangentes en un point A. Par A on mène une droite AD dans l'espace et on prend un point S de cette droite. Intersection du cône de sommet S qui a pour base l'une des coniques et du cylindre de génératrices parallèles à AD qui a pour base l'autre conique. Point de l'intersection situé sur SA.

5376. — Intersection d'un cône de sommet s, s' qui a pour base une parabole du plan horizontal et d'un cylindre de bout qui a pour base une ellipse du plan vertical.

5377. — On donne deux cercles du plan horizontal dont les centres sont à la même distance de la ligne de terre. L'un des cercles est la base d'un cône dont le sommet est situé dans le plan de front des deux centres ; l'autre est la base d'un cylindre parallèle à une direction donnée. Intersection du cône et du cylindre.

5378. — Intersection d'un cône de sommet s, s' dont la base est une parabole du plan horizontal et d'un cylindre vertical dont la base est un cercle du plan horizontal.

5379. — On donne un cercle dans le plan horizontal de projection. Ce cercle est à la fois la base d'un cône de révolution de sommet $s(5)$, et la base d'un cylindre parallèle à une direction donnée $a(0)b(5)$. Intersection du cône et du cylindre.

5380. — Une ellipse du plan vertical de projection est la base d'un cylindre de génératrices horizontales. Un cercle tangent au contour apparent vertical de ce cylindre est la base d'un second cylindre horizontal. Intersection des deux cylindres.

5381. — Deux hyperboles du plan horizontal de projection ayant une asymptote commune sont les bases de deux cylindres de directions données. Intersection des deux cylindres. Pourquoi est-ce une conique ?

5382. — Intersection de deux cylindres parallèles à des directions données et ayant tous deux pour base un même cercle du plan horizontal.

5383. — Dans le plan horizontal de projection on donne un cercle et une hyperbole dont l'une des asymptotes est parallèle à la ligne de terre. Ces deux courbes sont les bases de deux cylindres de front, de directions données. Intersection des deux cylindres.

5384. — Intersection de deux cylindres de révolution l'un de bout, l'autre de front, dont les axes ne se coupent pas.

5385. — On donne un cône de révolution d'axe vertical et une sphère tangente à l'une des génératrices du contour apparent vertical du cône, dont le centre est dans le plan de front de l'axe du cône. Intersection du cône et de la sphère. Points de cette intersection situés dans le plan de symétrie.

5386. — Intersection d'une sphère de centre o, o' et d'un cône de sommet o, o', dont la base est une hyperbole du plan horizontal de projection. Points doubles en projection horizontale.

5387. — On donne les points $a(0)$, $b(0)$, $c(0)$ et $d(5)$. Une sphère a pour diamètre ab. Un cylindre a pour base dans le plan adc le cercle circonscrit au triangle adc. Ses génératrices sont parallèles à bc. Intersection du cylindre et de la sphère.

5388. — Intersection d'un hyperboloïde de révolution d'axe vertical avec une droite parallèle à une génératrice. Même problème dans le cas où la droite est quelconque.

5389. — On considère l'hyperboloïde de révolution défini par une génératrice de front et un axe vertical. Trouver un point de cette génératrice tel que la seconde génératrice qui passe en ce point y fasse avec la première un angle donné.

5390. — On donne une verticale et une droite quelconque qui tourne autour de la première. Intersection de l'hyperboloïde de révolution engendré et d'un plan quelconque.

5391. — Même problème dans le cas où le plan est parallèle à une génératrice et à la ligne de terre. Asymptotes et sommets de la section.

5392. — Un hyperboloïde de révolution est défini par un axe vertical et une génératrice de front. Intersection de la surface par un plan quelconque. Tangente en un point.

5393. — Même problème dans le cas où le plan passe par la génératrice de front.

5394. — Par une droite donnée Δ, Δ' mener un plan qui coupe suivant une hyperbole équilatère un hyperboloïde défini par un axe vertical et une génératrice de front.

5395. — Par une droite donnée mener un plan tangent à un hyperboloïde de révolution à une nappe défini par son axe et une génératrice.

5396. — Un hyperboloïde de révolution est défini par un axe de front et par une génératrice parallèle à la ligne de terre. Mener par un point donné a, a' un plan tangent à l'hyperboloïde de façon que le point de contact soit sur un parallèle donné.

5397. — Un hyperboloïde de révolution est défini par un axe vertical et une génératrice de front. Détermination du cône asymptote.

5398. — Un hyperboloïde de révolution est défini par un axe de front et par une génératrice horizontale. Contours apparents de cet hyperboloïde et de son cône asymptote.

5399. — Une droite graduée tourne autour d'une seconde droite graduée, fixe. Centre de l'hyperboloïde de révolution engendré et contour apparent de son cône asymptote.

5400. — On donne une verticale et deux droites quelconques B, B', C, C'. Ces trois droites [illegible] un hyperboloïde. Tracer une génératrice de la surface. Plan tangent en un point de cette génératrice.

5401. — Un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal est défini par deux génératrices. Intersection du paraboloïde et du second bissecteur. Directions asymptotiques.

5402. — Intersection d'une droite donnée D, D' et d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal dont on connaît deux génératrices.

5403. — Intersection d'un paraboloïde de révolution à axe vertical par un plan de bout.

5404. — On donne un paraboloïde hyperbolique par un plan directeur qui est de profil et par deux génératrices horizontales. En tracer une génératrice quelconque. Section du paraboloïde par un plan donné par ses traces. Directions asymptotiques de la section.

5405. — Intersection d'une droite et d'un paraboloïde de révolution d'axe vertical. Plans tangents aux points d'intersection. Angle de ces plans.

5406. — Un paraboloïde hyperbolique a pour plan directeur le deuxième bissecteur et pour génératrices une verticale et une ligne de bout. En tracer une génératrice. Mener au paraboloïde un plan tangent parallèle à un plan donné.

5407. — Contour apparent d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal dont on connaît deux génératrices (géométrie descriptive).

5408. — Même problème en géométrie cotée.

5409. — Contour apparent horizontal d'un paraboloïde de révolution engendré par une parabole qui située d'abord dans un plan de front tourne autour de son axe. Projection verticale du contour apparent horizontal. Trouver un plan qui coupe le paraboloïde suivant une conique dont la projection horizontale soit un cercle.

5410. — Un paraboloïde hyperbolique est défini par un plan directeur horizontal et deux génératrices. Courbe de contact du cylindre circonscrit parallèlement à une direction donnée.

5411. — Un paraboloïde hyperbolique est défini par un plan directeur horizontal et deux génératrices. Courbe de contact avec le cône de sommet donné s, s' circonscrit au paraboloïde.

5412. — On donne un paraboloïde de révolution à axe vertical. Courbe de contact avec un cylindre circonscrit parallèle à une direction donnée. Sommet et axe de la courbe en projection verticale.

5413. — Un paraboloïde hyperbolique est donné par un plan directeur, horizontal, et deux génératrices A, A', B, B'. Mener au paraboloïde un plan tangent parallèle à un plan donné.

5414. — Intersection d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical et d'un plan quelconque. Tangente en un point.

5415. — Intersection d'un ellipsoïde de révolution d'axe vertical et d'une droite quelconque.

5416. — Mener par une droite donnée les plans tangents à un ellipsoïde de révolution à axe vertical.

5417. — Deux points a et b du plan horizontal de cote 0 sont les foyers d'une ellipse de grand axe connu. Mener par une droite graduée donnée les plans tangents à l'ellipsoïde de révolution engendré par l'ellipse tournant autour de son axe focal.

5418. — Par un point donné, mener à un ellipsoïde de révolution donné, d'axe vertical, un plan tangent faisant avec le plan horizontal un angle donné.

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

1932. — 1° Intégrer l'équation différentielle

$$x \; [illegible] \; \frac{[illegible]}{x}.$$

et déterminer celle des intégrales.

$$= f(x)$$

qui s'annule pour $x = e$.

2° Etudier les variations de la fonction $y = f(x)$ et construire la courbe représentative de cette fonction

3° L'équation $y = f(x)$ définit parfaitement une fonction

$$x = \varphi(y)$$

de x à 0, pourvu que l'on astreigne x à être compris entre 0 et e. Calculer

$$\int [illegible] dy.$$

E. H.

1933. — On considère un cercle de rayon R et un diamètre fixe A'A. Sur ce diamètre on prend un point mobile P tel que si on le joint à un point M du cercle le triangle A'MP soit isocèle, MP = MA'. En A on mène la tangente au cercle et l'on projette M en M' sur cette tangente.

1° Construire et rectifier l'enveloppe de M'P.

2° Construire l'enveloppe de la perpendiculaire élevée au milieu de M'P et calculer la surface limitée par la courbe.

3° Lieux du centre du cercle circonscrit et du point de concours des hauteurs du triangle MM'P.

4° Enveloppe de la hauteur abaissée de M' sur MP.

5° Enveloppe de la hauteur abaissée de M sur M'P. Construire et rectifier la développée de cette enveloppe.

6° On considère les ellipses ayant trois sommets en A', M et P. Lieu des points de rebroussement des développées de ces ellipses.

R. Manen, Ecole Ste-Marie, Albi.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

21e Année. Avril 1911. N° 7.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

CONDITIONS POUR QU'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE AIT TOUTES SES RACINES NÉGATIVES OU A PARTIE RÉELLE NÉGATIVE (*)

par M. **A. Liénard**, professeur à l'Ecole des Mines.

La résolution d'un grand nombre de problèmes de physique ou de mécanique dépend de l'intégration d'une équation linéaire à coefficients constants de la forme

$$\frac{d^n u}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{du}{dt} + a_n u = 0.$$

L'intégrale générale bien connue a pour expression $u = \sum_1 C_i e^{x_i t}$, où $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont les constantes arbitraires d'intégration et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines, réelles ou imaginaires, de l'équation caractéristique

$$(1) \qquad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Pour que l'intégrale générale u tende vers zéro quelles que soient les constantes arbitraires lorsque t croît indéfiniment, il faut et il suffit que les x_i soient négatifs s'ils sont réels ou aient du moins leur partie réelle négative lorsqu'ils sont imaginaires. Il est par suite intéressant de voir à quelles conditions il en sera ainsi sans être obligé de résoudre l'équation caractéristique (1). C'est la question que je me propose de traiter et je vais établir la proposition suivante :

Les racines d'une équation algébrique seront négatives ou à partie réelle négative si cette équation et l'équation aux sommes deux à deux des racines de la proposée ont leurs premiers membres complets et ne présentant que des permanences.

A. *Nécessité des conditions imposées.* — Je désignerai par $-x'$, $-x''$,... les racines réelles, en mettant leur signe en évidence, et par $-y' \pm z'i$, $-y'' \pm z''i$,... les racines imaginaires qui sont conjuguées deux à deux, l'équation proposée étant naturellement à coefficients réels. Les x', x'',..., y', y''... sont par hypothèse positifs et non nuls tandis que les z sont seulement différents de zéro.

Le premier membre de l'équation (1) peut se décomposer en facteurs réels du premier et du second degré. Les facteurs du premier degré sont de la forme $x + x'$ et ceux du second degré

$$(x + y')^2 + z'^2 = x^2 + 2y'x + y'^2 + z'^2.$$

Tous ces polynomes étant complets et à coefficients positifs, il en sera de même de leur produit, c'est-à-dire du premier membre de l'équation (1).

Soit maintenant

$$(2) \qquad \varphi(x) = 0,$$

l'équation aux sommes deux à deux des racines de (1). Je supposerai, pour simplifier, le coefficient du terme du plus haut degré ramené à l'unité. $\varphi(x)$ est le produit de facteurs binomes ou trinomes qu'on peut classer en quatre catégories. Nous aurons :

(*) Au moment de la mise en pages, M. Liénard nous écrit que depuis l'époque où cette note a été rédigée il a eu connaissance que le capitaine Routh a appliqué les conditions établies plus loin pour l'équation du quatrième degré dans un travail relatif à une question de stabilité. M. Liénard se propose de faire des recherches bibliographiques à ce sujet et les publiera dans la Revue s'il y a lieu afin de signaler ce qui a été fait antérieurement dans cet ordre d'idées. (N. D. R.)

1° Des facteurs binomes $\alpha - (x + x'i)$ correspondant à deux racines réelles de $f(x)$;

2° Des facteurs $\alpha + x' + y' + z'i$ obtenus en associant une racine réelle de $f(x)$ à une racine imaginaire. En groupant ce facteur avec le facteur conjugué nous avons le trinome réel $(\alpha + x' + y')^2 + z'^2$;

3° Des facteurs $\alpha + y' + z'i + y'' + z''i$ obtenus en associant deux racines imaginaires non conjuguées. Groupant ces facteurs deux à deux comme ci-dessus nous obtiendrons des facteurs trinomes $(\alpha + y' + y'')^2 + (z' + z'')^2$.

Ces facteurs trinomes sont complets car les x' et y' sont positifs ;

4° Enfin des facteurs $\alpha + 2y$ obtenus en ajoutant deux racines conjuguées de $f(x)$ (1).

Ces quatre sortes de facteurs sont complets et à coefficients positifs. Il en est de même de leur produit $\varphi(\alpha)$.

B. *Les conditions nécessaires sont en même temps suffisantes.* — La démonstration est facile : tout d'abord si $f(x)$ ne présente que des permanences, toutes les racines réelles sont négatives. De même $\varphi(\alpha)$ n'admettra comme racines réelles que des quantités négatives. Or $\varphi(\alpha)$ admet en particulier comme racines réelles toutes les quantités $-2y'$, ce qui établit la proposition.

C. *Nombre des conditions. Leur indépendance.* — L'équation $\varphi(\alpha) = 0$ est de degré $\frac{n(n-1)}{2}$ qui représente le nombre de combinaisons deux à deux des racines de $f(x)$. En exprimant que f et φ n'ont que des permanences, on obtiendra au total $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ conditions. On voit que leur nombre croît très rapidement avec n. Mais, sauf pour $n = 1$, ces conditions ne sont pas indépendantes comme on le vérifiera tout à l'heure. La question, résolue au point de vue théorique, ne l'est donc pas au point de vue de la simplicité. Je donnerai quelques indications sur ce que l'on peut tenter dans cette voie, mais je commencerai par appliquer la théorie précédente aux valeurs de n inférieures à 6.

D. *Applications de la théorie précédente.* — 1° *Equation du troisième degré.* Sans nous arrêter aux équations du premier et du second degré $x + a = 0$, $x^2 + ax + b = 0$ pour lesquelles les conditions sont simplement $a > 0$, $b > 0$, je passe directement à l'équation du troisième degré

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

L'équation à la somme des racines se forme facilement :

$$\varphi(\alpha) = f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\alpha^3 + 6\alpha x^2 + 2ax^2 + 2\alpha^2 a + 2\alpha b + ab + c.$$

f et φ ne présenteront que des permanences si $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $ab - c > 0$.

L'une des deux premières conditions rentre dans les deux autres. Il y a cependant intérêt pour les applications à garder les quatre inégalités.

2° *Equation du quatrième degré* $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Pour former l'équation en α, je remarque que, en désignant par α et β la somme et le produit de deux racines de $f(x)$, par α' et β' les somme et produit des deux autres racines, on peut écrire

$$f(x) = (x^2 - \alpha x + \beta)(x^2 - \alpha' x + \beta'),$$

d'où $\alpha + \alpha' + a = 0$, $\beta + \beta' + b = 0$, $\alpha\beta' + \alpha'\beta + c = 0$, $\beta\beta' = d$.

Eliminant α', β, β' entre ces quatre équations, il vient

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c + (\alpha^2 + a\alpha + b)(\alpha^2 + a\alpha + a^2 - b) + c(\alpha^2 + a\alpha) - 2\alpha + a^2 d = 0,$$

et par suite

$$\varphi(\alpha) = \alpha^6 + 3a\alpha^5 + (3a^2 + 2b)\alpha^4 + (a^3 + 4ab)\alpha^3 + (2ab + ac + b^2 - 4d)\alpha^2$$
$$+ (ab^2 - a^2c - 4ad)\alpha + abc - c^2 - a^2 d.$$

Comme on peut écrire identiquement

$$ab^2 - a^2c - 4ad = \frac{4}{a}(abc - c^2 - a^2 d) = \frac{1}{a}(ab - 2c)^2 + a^2c,$$

$$2ab + ac + b^2 - 4d = \frac{1}{a}(ab^2 - a^2c - 4ad) + 2ab,$$

(1) Si ces racines conjuguées sont multiples d'ordre p, il y aura p^2 facteurs égaux à $\alpha + 2y$, ce qui ne modifie en rien les raisonnements qui suivent.

on voit qu'il suffit, pour n'avoir dans f et φ que des permanences, de satisfaire aux inégalités

$$(3) \qquad a > 0, \qquad b > 0, \qquad c > 0, \qquad d > 0, \qquad abc - c^2 - a^2d > 0.$$

Ici encore une des trois premières inégalités rentre dans les deux autres, mais il n'y a aucun avantage pour la simplicité à effectuer la réduction.

Il est au contraire plus intéressant de remarquer que la cinquième inégalité (3) entraine la condition simple

$$(4) \qquad b^2 - 4ad > 0,$$

car le trinome en c : $-c^2 + abc - a^2d$ ne peut être positif que si c est compris entre ses racines, ce qui exige d'abord que ces racines soient réelles et distinctes, d'où la condition (4).

3° *Équation du cinquième degré* $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - e = 0$. $\varphi(\alpha)$ est de degré $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ et les calculs deviennent laborieux. Sans les reproduire, je me bornerai à indiquer le résultat. Les dix coefficients de $\varphi(\alpha)$ seront positifs si ceux de $f(x)$ le sont et si en outre

$$ab - e > 0, \qquad (ab - e)(cd - be) - (ad - e)^2 > 0.$$

Enfin, pour l'équation du sixième degré, $\varphi(\alpha)$ serait du quinzième degré. Sans faire le calcul complet de $\varphi(\alpha)$, j'ai pu établir que les conditions de n'avoir dans le polynome $\varphi(\alpha)$ que des permanences se réduisent à

$$abc + ae - c^2 - a^2d > 0, \qquad (abc + ae - c^2 - a^2d)(ad^2 - c^2 - a^2f) - (abc - c^2 - a^2f)^2 > 0.$$

(*A suivre.*)

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE.

Concours de 1910.

Groupe I.

1880. — *Soit* (G) *la courbe définie, en coordonnées rectangulaires, par les équations*

$$x = \frac{1 - t^2}{t}, \qquad y = 1 + t^2,$$

où t est un paramètre arbitraire.

1° *Déterminer un polynome du second degré $f(x, y)$ (dans lequel le coefficient de y^2 est 1) tel qu'on ait une identité de la forme*

$$f\left(\frac{1 - t^2}{t}, 1 + t^2\right) = (t^2 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma)^2.$$

On montrera qu'une telle identité n'est possible que moyennant l'existence d'une relation entre les constantes α, β, γ. Cette relation se décompose en deux autres très simples.

2° *Supposant successivement vérifiée chacune de ces deux relations, les coefficients de $f(x, y)$ se trouvent, dans chaque cas, exprimés au moyen de deux des paramètres α, β, γ. Pour l'une des solutions, le polynome $f(x, y)$ est le carré d'un polynome du premier degré en x, y.*

Des résultats précédents on déduit immédiatement la réponse aux questions suivantes :

3° *Écrire la condition que doivent vérifier les paramètres t_1, t_2, t_3 de trois points de* (G) *pour que ces trois points soient en ligne droite.*

4° *Écrire la condition que doivent vérifier les paramètres t_1, t_2, t_3 de trois points de* (G) *pour qu'il existe une conique* (C) *tangente à* (G) *en ces trois points.*

5° *Former l'équation générale des coniques* (C).

En outre :

6° *Trouver, lorsque la conique* (C) *se décompose en deux droites, le lieu du point de concours des deux droites.*

7° *Montrer que les tangentes aux trois points de contact de* (C) *et de* (G) *coupent encore la courbe* (G) *en trois autres points situés sur une même droite* (D).

8° *Trouver l'équation générale de la droite* (D) *en fonction des mêmes paramètres que ceux qui déterminent la conique correspondante* (C).

9° *Déterminer en fonction des mêmes paramètres le centre de gravité* P *du triangle formé par les points de contact de* (C) *et de* (G).

10° *Trouver l'enveloppe de la droite* (D) *lorsque* P *décrit une parallèle à l'axe des* x.

1. Désignons par

$$y^2 + 2Bxy + Ax^2 + 2Cx + 2Dy + F$$

le polynome $f(x, y)$, et formons l'expression $t^2 f\left(\frac{1-t^2}{t}, \frac{1+t^2}{t}\right)$.

$$t^2(1-t^2)^2 + 2Bt(1+t^2)^2 + A(1+t^2)^2 + 2Ct(1-t^2) + 2Dt^2(1-t^2) + Ft^2;$$

nous aurons à identifier ce polynome du sixième degré avec le polynome $(t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma)^2$, et ceci nous donnera les six équations :

$$B = \alpha, \qquad 2 + A - 2D = \alpha^2 - 2\beta, \qquad 4B + 2C = 2\alpha\beta + 2\gamma,$$

$$1 + 2A + 2D + F = \beta^2 + 2\alpha\gamma, \qquad 2B + 2C = 2\beta\gamma, \qquad A = \gamma^2.$$

Ces six équations donnent successivement A, D, B, C et F, et l'une d'elles, par exemple la cinquième, est inutilisée ; en y portant les valeurs de B et C, on aura la relation qui doit exister entre α, β et γ.

Nous avons ainsi successivement :

$$A = \gamma^2, \quad 2D = \alpha^2 + 2\beta - \gamma^2 - 2, \quad B = \alpha, \quad C = \alpha\beta + \gamma - \beta\gamma \quad \text{et} \quad F = \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\gamma - \gamma^2 - 2\beta + 1,$$

avec la relation $B + C = \beta\gamma$, ou $\alpha\beta + \gamma - \alpha - \beta\gamma$.

Cette relation s'écrit $(\beta - 1)(\alpha - \gamma) = 0$, et elle se décompose en deux : $\beta = 1$ et $\alpha = \gamma$.

2. Si nous faisons d'abord $\gamma = \alpha$, les valeurs des coefficients sont

$$A = \alpha^2, \qquad D = \beta - 1, \qquad B = \alpha, \qquad C = \alpha(\beta - 1), \qquad F = (\beta - 1)^2,$$

et le polynome $f(x, y)$ s'écrit $f(x, y) = y^2 + 2\alpha xy + \alpha^2 x^2 + 2\alpha(\beta - 1)x + 2(\beta - 1)y + (\beta - 1)^2$: c'est le carré du polynome $y + \alpha x + \beta - 1$.

L'équation $f(x, y) = 0$ représente dans ce cas une droite double $(y + \alpha x + \beta - 1)^2 = 0$, qui, pour des valeurs convenablement choisies de α et β, peut coïncider avec une droite quelconque du plan.

Si nous faisons maintenant $\beta = 1$, les coefficients du polynome $f(x, y)$ prennent les valeurs $A = \gamma^2$, $2D = \alpha^2 - \gamma^2$, $B = \alpha$, $C = \gamma - \alpha$, $F = -(\alpha - \gamma)^2$, et le polynome $f(x, y)$ s'écrit ainsi

$$y^2 + 2\alpha xy + \gamma^2 x^2 + (\alpha^2 - \gamma^2)y + 2(\gamma - \alpha)x - (\alpha - \gamma)^2.$$

L'équation $f(x, y) = 0$ représente, quand α et γ varient, un réseau de coniques.

3. Les paramètres des points de rencontre de la cubique (G) avec une droite quelconque, $y + \alpha x + \beta - 1 = 0$, sont fournis par l'équation

$$t^3 + \alpha t^2 + \beta t - \alpha = 0 \qquad (\gamma = \alpha)$$

et vérifient la relation $t_1 + t_2 + t_3 = t_1 t_2 t_3$.

4. Pour que la conique $f(x, y) = 0$ soit tritangente à la cubique (G), il faut justement que l'équation du sixième degré aux t des points de rencontre soit un carré parfait. Les t des points de

contact sont donc fournis par l'équation

$$t^3 + \alpha t^2 + t + \gamma = 0 \qquad (\gamma = 1)$$

et vérifient la relation $t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = 1$.

5. L'équation générale des coniques (C) est obtenue en annulant le second polynome trouvé antérieurement :

$$y^2 + 2\alpha xy + \gamma^2x^2 + 2(\gamma - \alpha)x + (\alpha^2 - \gamma^2)y - (\alpha - \gamma)^2 = 0.$$

6. Si la conique (C) se décompose en deux droites, chacune d'elles sera tangente à la cubique (G) et la coupera en un autre point. Pour que les six points de rencontre soient confondus deux à deux, il faudra que ces deux autres points de rencontre de la cubique avec les deux droites coïncident, c'est-à-dire que le point de concours des deux droites soit sur la cubique. D'autre part, l'origine est un point double de la cubique, qui correspond aux valeurs $t = i$ et $t = -i$; la cubique est donc de quatrième classe et d'un point de cette courbe on peut bien mener deux tangentes autres que la tangente en ce point ; chaque point de (G) est bien le centre d'une conique singulière du réseau (C), et le lieu demandé est la cubique (G) elle-même.

Pour traiter la question par le calcul, nous annulerons les trois dérivées partielles de (C), et nous diviserons la troisième par $\alpha - \gamma$, qui n'est pas nul dans le cas actuel ; nous aurons ainsi

$$\gamma^2x + \alpha y + \gamma - \alpha = 0, \qquad 2\alpha x + 2y + \alpha^2 - \gamma^2 = 0, \qquad 2x - (\alpha + \gamma)y + 2(\alpha - \gamma) = 0.$$

Multiplions la première par 2 et ajoutons à la troisième, nous aurons ainsi

$$2(\gamma^2 + 1)x + (\alpha - \gamma)y = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{x}{\gamma - \alpha} = \frac{y}{2(\gamma^2 + 1)}.$$

La première équation nous donne alors x et y : $\dfrac{x}{\gamma - \alpha} = \dfrac{y}{2(\gamma^2 + 1)} = \dfrac{\alpha - \gamma}{\gamma^2(\alpha + \gamma) + 2\alpha}$.

En portant ces valeurs dans la seconde équation, nous avons finalement la relation qui existe entre α et γ, le facteur $\alpha - \gamma$ supprimé,

$$-2\alpha(\alpha - \gamma) + 4(\gamma^2 + 1) + (\alpha + \gamma)[\gamma^2(\alpha + \gamma) + 2\alpha] = 0 ;$$

cette relation s'écrit encore $\gamma^2(\alpha + \gamma)^2 + 4\gamma(\alpha + \gamma) + 4 = 0$, ou $[\gamma(\alpha + \gamma) + 2]^2 = 0$.

Nous voyons que la relation qui relie α à γ est $\gamma(\alpha + \gamma) + 2 = 0$; elle donne $\alpha = -\dfrac{\gamma^2 + 2}{\gamma}$, et les valeurs de x et de y deviennent alors $x = \dfrac{\gamma^2 + 1}{\gamma}$, $y = \gamma^2 + 1$.

Ce sont justement les équations paramétriques de la cubique (G), ce qui prouve bien que le lieu du point double de la conique (C) est la cubique elle-même.

7. Soient t_1, t_2, t_3 les paramètres des points de contact de (C) et (G), et θ_1, θ_2, θ_3 les paramètres des points de rencontre des tangentes à (G) aux points t_1, t_2, t_3 avec cette courbe. Nous aurons, entre t_1 et θ_1, la relation $2t_1 + \theta_1 = t_1^2\theta_1$, puis $\theta_1 = \dfrac{2t_1}{t_1^2 - 1}$; de même, $\theta_2 = \dfrac{2t_2}{t_2^2 - 1}$, $\theta_3 = \dfrac{2t_3}{t_3^2 - 1}$.

Il s'agit de prouver que $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \theta_1\theta_2\theta_3$, quand $\Sigma t_1t_2 = 1$, ou que t_1, t_2, t_3 sont les racines de l'équation $t^3 + \alpha t^2 + t + \gamma = 0$.

Posons $\theta = \dfrac{2t}{t^2 - 1}$ et éliminons t entre les deux équations

$$t^3 - \frac{2t}{\theta} - 1 = 0, \qquad t^3 + \alpha t^2 + t + \gamma = 0,$$

nous aurons l'équation du troisième degré qui nous donne θ_1, θ_2, θ_3.

Ce calcul se fait facilement en multipliant la première par $-t$ et ajoutant à la seconde, nous

avons ainsi une nouvelle équation du second degré,

$$\left(\alpha + \frac{2}{\theta}\right)t^2 + 2t + \gamma = 0,$$

et l'élimination s'achève sans peine : le résultant est $\left(\alpha - \gamma - \frac{2}{\theta}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\theta^2} + \frac{\alpha}{\theta} - 1\right)\left(\frac{\gamma}{\theta} - 1\right) = 0.$

C'est l'équation en θ, ou en $\frac{1}{\theta}$,

$$\frac{8\gamma}{\theta} - \frac{4(\alpha\gamma - 1)}{\theta^2} + \frac{8\gamma}{\theta} - (\alpha - \gamma)^2 - 4 = 0,$$

et il est visible que l'on a la relation annoncée $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 4\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

8. Pour avoir l'équation de la droite (D) qui passe aux trois points θ, il suffit d'identifier l'équation qui précède et qui donne les trois valeurs de θ avec l'équation $t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \alpha = 0$, qui donne les paramètres des points de rencontre de la droite $y + \alpha x + \beta - 1 = 0$ avec la courbe (G). Ce calcul est immédiat et donne $\alpha = \frac{8\gamma}{(\alpha - \gamma)^2 - 4}$, $\beta = \frac{4(\alpha\gamma - 1)}{(\alpha - \gamma)^2 - 4}$; par conséquent, la droite (D) a pour équation

$$8\gamma x - [(\alpha + \gamma)^2 - 4]y - (\alpha - \gamma)^2 + 4 = 0.$$

9. Les coordonnées du centre de gravité du système des trois points t_1, t_2, t_3 sont données par

$$3x = \Sigma t_1 + \Sigma \frac{1}{t_1}, \qquad 3y = 3 + \Sigma t_1 t_2;$$

d'ailleurs les valeurs de t sont racines de l'équation $t^3 + \alpha t^2 + t + \gamma = 0$, et l'on a

$$\Sigma t_1 = -\alpha, \qquad \Sigma \frac{1}{t_1} = -\frac{1}{\gamma}, \qquad \Sigma t_1 t_2 = \alpha - 2;$$

donc les coordonnées du centre de gravité P sont fournies par les deux équations

$$3x = -\frac{\alpha\gamma + 1}{\gamma}, \qquad 3y = 1 + \alpha^2.$$

10. Si le point P décrit une parallèle à Ox, α est constant, et, dans l'équation de (D), il n'entre plus qu'un seul paramètre variable γ. Cette équation est du second degré en γ; par suite, l'enveloppe s'obtient en exprimant qu'il y a une racine double en γ, c'est-à-dire que la quantité sous le radical est nulle. L'équation en γ est

$$(4y - 1)\gamma^2 + 2\gamma(4x - \alpha y + \alpha) + \alpha^2 - 4(y - \alpha^2) = 0,$$

et l'équation de l'enveloppe,

$$[(4x - \alpha y + \alpha)^2 - (\alpha - 1)^2(y - 1) - 4y] = 0.$$

C'est l'équation d'une conique qui passe à l'origine,

$$x^2 + 2\alpha xy - 4x - 2\alpha x + (\alpha^2 - 1)y = 0.$$

et dont la nature dépend du nombre α.

A chaque parallèle à l'axe des x que le point P décrit correspondent deux valeurs de α égales et de signes contraires. Il y a donc aussi deux enveloppes de la droite (D) ; ce sont deux coniques symétriques par rapport à Oy.

Très bonnes solutions : MM. Sotialine, à Mont-de-Marsan ; L. Simon, à Fourmies.

Bonnes solutions : MM. L. Perrin, à Trévoux ; A. Lavenne, à Lyon ; G. Layet ; Rousseau, à Fourmies ; Gustaud, conducteur des Ponts et Chaussées, à Tiberguent ; G. Fouché, à Reims ; Sailerson, à Albi ; L. Naegeler.

1881. — *Une surface* (Σ), *rapportée à des axes rectangulaires, est coupée par chaque plan parallèle au plan* xOy *suivant une courbe fermée. L'aire* S *de cette courbe est une fonction déterminée* $[S = f(z)]$ *de la cote* z *de tous ses points. On suppose que la surface* (Σ) *est continue et on suppose que la fonction* $f(z)$ *admet des dérivées continues jusqu'au cinquième ordre inclusivement.*

Déterminer quelle doit être la forme la plus générale de la fonction $f(z)$ pour que le volume compris entre la surface (Σ) et les plans de cotes z_0 et z soit donné, quels que soient z_0 et z (> z_0), par la formule

$$V = \frac{z - z_0}{6}\left[f(z) + f(z_0) + 4f\left(\frac{z + z_0}{2}\right)\right].$$

Le volume V, compris entre la surface (Σ) et les deux plans parallèles au plan des xy ayant pour cotes z_0 et z_1 est donné par l'intégrale définie $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$.

On doit donc avoir, quel que soit z, $\int_{z_0}^{z} f(z)dz = \frac{z - z_0}{6}\left[f(z) + f(z_0) + 4f\left(\frac{z + z_0}{2}\right)\right]$ et, par suite, en prenant les dérivées des deux membres par rapport à z,

$$f(z) = \frac{1}{6}\left[f(z) + f(z_0) + 4f\left(\frac{z + z_0}{2}\right)\right] + \frac{z - z_0}{6}\left[f'(z) + 2f'\left(\frac{z + z_0}{2}\right)\right].$$

ou

$$5f(z) = f(z_0) + 4f\left(\frac{z + z_0}{2}\right) + (z - z_0)\left[f'(z) + 2f'\left(\frac{z + z_0}{2}\right)\right].$$

Cette identité est visiblement satisfaite pour $z = z_0$.

Dérivons une fois de plus ; nous aurons $4f'(z) = 4f'\left(\frac{z + z_0}{2}\right) + (z - z_0)\left[f''(z) + f''\left(\frac{z + z_0}{2}\right)\right]$.

Cette égalité est encore satisfaite évidemment pour $z = z_0$. Nous la dérivons aussi, et nous continuerons ce calcul jusqu'à ce que nous arrivions à une égalité qui ne soit pas évidente pour $z = z_0$; nous avons ainsi successivement

$$3f''(z) = 3f''\left(\frac{z + z_0}{2}\right) + (z - z_0)\left[f'''(z) + \frac{1}{2}f'''\left(\frac{z + z_0}{2}\right)\right],$$

$$2f'''(z) = 2f'''\left(\frac{z + z_0}{2}\right) + (z - z_0)\left[f^{\text{IV}}(z) + \frac{1}{4}f^{\text{IV}}\left(\frac{z + z_0}{2}\right)\right],$$

$$f^{\text{IV}}(z) = \frac{3}{4}f^{\text{IV}}\left(\frac{z + z_0}{2}\right) + (z - z_0)\left[f^{\text{V}}(z) + \frac{1}{8}f^{\text{V}}\left(\frac{z + z_0}{2}\right)\right].$$

Pour $z = z_0$, cette dernière égalité nous donne $f^{\text{IV}}(z_0) = \frac{3}{4}f^{\text{IV}}(z_0)$, c'est-à-dire $f^{\text{IV}}(z_0) = 0$.

Ceci doit avoir lieu quel que soit z_0 ; par conséquent, la fonction $f(z)$, si elle existe, ne peut être qu'un polynome du troisième degré. Posons alors $f(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$, et écrivons l'identité imposée ; nous aurons

$$\frac{a}{4}(z^4 - z_0^4) + \frac{b}{3}(z^3 - z_0^3) + \frac{c}{2}(z^2 - z_0^2) + d(z - z_0)$$

$$= \frac{z - z_0}{6}\left[az^3 + bz^2 + cz + d + az_0^3 + bz_0^2 + cz_0 + d + 4a\left(\frac{z + z_0}{2}\right)^3 + 4b\left(\frac{z + z_0}{2}\right)^2 + 4c\,\frac{z + z_0}{2} + 4d\right],$$

et il est visible que cette identité a lieu quels que soient a, b, c, d. Donc la fonction $f(z)$ la plus générale est un polynome général du troisième degré.

Une application intéressante de cette identité conduit à la formule de Simpson pour le calcul approché d'une intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$. Divisons en effet l'intervalle (a, b) en $2n$ parties égales ; posons $h = \frac{b - a}{2n}$ et appelons $y_1, y_2, \ldots, y_{2n+1}$ les diverses valeurs de l'ordonnée $y = f(x)$, qui correspondent à $x_1 = a$, $x_2 = a + \frac{b - a}{2n}$, $x_3 = a + 2\frac{b - a}{2n}$, $\ldots$, $x_{2n+1} = b$. La méthode des trapèzes nous donnera, pour valeur approchée de l'intégrale,

$$\frac{h}{2}(y_1 + y_2 + y_2 + y_3 + y_3 + y_4 + \ldots + y_{2n} + y_{2n+1}), \quad \text{ou} \quad \frac{h}{2}(2I + 2P - y_1 - y_{2n+1}),$$

I étant la somme des ordonnées de rangs impairs et P la somme des ordonnées de rangs pairs.

D'autre part, si nous supposons la courbe $y = f(x)$ concave vers les y négatifs, nous aurons là une limite inférieure de l'aire et l'expression $2h\mathrm{P}$ est une limite supérieure de cette même aire ; l'erreur commise est plus petite que

$$2h\mathrm{P} - \frac{h}{2}(2\mathrm{I} + 2\mathrm{P} - y_1 - y_{2n+1}), \qquad \text{ou} \qquad \frac{h}{2}(2\mathrm{P} - 2\mathrm{I} - y_1 - y_{2n+1}).$$

Ajoutons à la première expression le tiers de cette quantité, nous aurons la formule de Simpson :

$$\mathrm{A} = \frac{h}{2}(2\mathrm{I} + 2\mathrm{P} - y_1 - y_{2n+1}) + \frac{h}{6}(2\mathrm{P} - 2\mathrm{I} + y_1 + y_{2n+1}), \qquad \mathrm{A} = \frac{h}{3}(2\mathrm{I} + 4\mathrm{P} - y_1 - y_{2n+1}).$$

On peut obtenir cette expression approchée de l'aire en se servant de l'identité établie au début de cette question. En effet cette identité a lieu pour tous les polynomes du troisième degré $f(z)$; elle a donc lieu aussi pour tous ceux du second. Posons alors $f(x) = ax^2 + bx + c$, et déterminons a, b, c de façon que la parabole $y = ax^2 + bx + c$ passe aux extrémités des trois ordonnées y_1, y_2, y_3. Si nous remplaçons la courbe donnée $y = f(x)$ par cette parabole, dans l'intervalle $(a, a + 2h)$, l'aire de cette portion sera $\frac{2h}{6}(y_1 + y_3 + 4y_2)$; de même, pour les autres portions, nous aurons

$$\frac{2h}{6}(y_3 + y_5 + 4y_4), \qquad \frac{2h}{6}(y_5 + y_7 + 4y_6), \text{ etc.}$$

La valeur approchée de l'aire ainsi fournie est donc $\frac{h}{3}(2\mathrm{I} + 4\mathrm{P} - y_1 - y_{2n+1})$.

C'est justement la formule de Simpson, telle que nous l'avons établie antérieurement.

Bonnes solutions : MM. Sobralski ; Amigard, conducteur des Ponts et Chaussées à Rennes. A. Lacoagne, lycée de Lyon ; L. Perrin, à Trévoux.

1882. — *Étant donnés trois axes rectangulaires ox, oy, oz, et une fonction $f(z)$ qui admet une dérivée $f'(z)$, les équations*

$$(\mathrm{I}) \qquad x = zx_0, \qquad y = zy_0, \qquad \int \frac{dz}{f(z)} = t \qquad \left(v = \sqrt{\frac{f(z_0)}{f(z)}}\right)$$

où t désigne le temps, définissent le mouvement d'un point $\mathrm{M}(x, y, z)$, si on connaît la position $\mathrm{M}_0(x_0, y_0, z_0)$ de ce point à l'instant $t = 0$; quand on a fixé la valeur de t, les mêmes équations (I) définissent une transformation remplaçant le point M_0 par le point M.

1° *Montrer que les projections de la vitesse du point $\mathrm{M}(x, y, z)$ sur les axes ox, oy, oz peuvent s'exprimer par des fonctions de x, y, z qui ne contiennent ni le temps t, ni les coordonnées initiales x_0, y_0, z_0.*

2° *A tous les points d'un cercle (C_0) ayant pour équations*

$$(x_0 - a_0)^2 + y_0^2 = \mathrm{R}^2, \qquad z_0 = \text{constante}, \qquad (a_0, \mathrm{R}, \text{constants})$$

correspondent, à l'instant t, d'après les équations (I), des points M tous situés sur un cercle (C) dont le plan est parallèle au plan xoy. Calculer, en fonction du z de ce plan, le rayon R et l'abscisse a du centre du cercle (C).

3° *Soient (S) la surface engendrée par le cercle (C) quand t varie à partir de 0, (T) le solide limité par la surface (S) et par les plans $z = z_1$, $z = z_2$.*

Vérifier que le volume V de (T) ne dépend que de la différence des valeurs de t qui correspondent à z_2 et à z_1.

Effectuer jusqu'au bout les calculs et construire la trajectoire d'un point M dans les deux cas suivants :

Premier cas : $f(z) = \frac{k^2}{2z}$ *(k constant) ;* *deuxième cas :* $f(z) = k\frac{z^2 + k^2}{z^2}$ *(k constant).*

Calculer, dans chacun des deux cas précédents, les coordonnées $(\xi, 0, \zeta)$ du centre de gravité du solide

(T) *supposé homogène, en se servant des formules*

$$V\xi = \int_{z_0}^{z_1} a(z)\,A(z)\,dz \qquad \text{et} \qquad V\zeta = \int_{z_0}^{z_1} z\,A(z)\,dz,$$

où $A(z)$ *désigne l'aire et* $a(z)$ *l'abscisse du centre du cercle* (C) *de cote* z.

L'équation $\displaystyle\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{f(z)} = t$ donne $F(z) - F(z_0) = t$: elle définit donc z en fonction du temps, $z = g(t)$; alors ρ est une fonction du temps aussi ; x, y, z sont des fonctions bien définies du temps et le point M est animé d'un mouvement défini par les trois équations $x = \rho x_0$, $y = \rho y_0$, $z = g(t)$.

Parmi les déterminations de la fonction $z = g(t)$, il faudra prendre celle qui se réduit à z_0 pour $t = 0$, et alors les valeurs initiales de x, y, z seront bien x_0, y_0, z_0. Ceci montre encore que ρ doit désigner la valeur arithmétique du radical $\sqrt{\dfrac{f(z_0)}{f(z)}}$.

1° La vitesse du point M est donnée par

$$\frac{dx}{dt} = x_0 \frac{d\rho}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}, \quad \text{etc.} ;$$

or $\displaystyle\frac{d\rho}{dz} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{f(z_0)}{f(z)}}\,\frac{f'(z)}{f(z)}$, et $\displaystyle\frac{dz}{dt} = f(z)$; donc $\displaystyle\frac{dx}{dt} = -\frac{x_0}{2}\sqrt{\frac{f(z_0)}{f(z)}}\,f'(z) = -\frac{x}{2}f'(z)$.

Même calcul pour $\dfrac{dy}{dt}$. Les composantes de la vitesse sont donc

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{2}f'(z), \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{y}{2}f'(z), \qquad \frac{dz}{dt} = f(z).$$

Elles sont indépendantes des quatre nombres t, x_0, y_0, z_0 ; elles ne dépendent que de la position du point M et de la nature de la fonction $f(z)$.

Il est bon de remarquer que le calcul précédent suppose $f(z)$ positif, c'est-à-dire $f(z_0)$ positif. Il vaut donc mieux diriger le calcul de façon qu'il s'applique aux deux cas où $f(z_0)$ est positif ou bien négatif.

Nous écrirons ρ ainsi : $\rho = \left(\dfrac{f(z_0)}{f(z)}\right)^{\frac{1}{2}}$; alors

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{f(z_0)}{f(z)}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{-f(z_0)f'(z)}{f(z)^2}, \qquad \frac{d\rho}{dz} = -\frac{1}{2}\frac{\rho^3}{\rho}\frac{f'(z)}{f(z)},$$

et nous retombons sur les mêmes valeurs de $\dfrac{dx}{dt}$ et $\dfrac{dy}{dt}$.

2. A l'instant t, l'équation $F(z) - F(z_0) = t$ donne pour z une valeur qui dépend de t et de z_0, c'est-à-dire qui reste constante quand le point M_0 se meut sur le cercle indiqué. Le cercle (C) qui correspond à (C_0) est donc aussi dans un plan parallèle au plan des xy.

Comme on a $x_0 = \dfrac{x}{\rho}$, $y_0 = \dfrac{y}{\rho}$, ce cercle a pour équation

$$(x - a_0\rho)^2 + y^2 - \rho^2 R_0^2 = 0, \qquad \text{et l'on a} \qquad a = a_0\rho, \qquad R = R_0\rho.$$

3. Si S désigne la surface du cercle (C), le volume V du solide (T) est donné par l'intégrale définie

$$V = \int_{z_0}^{z_1} S\,dz.$$

Ici $S = \pi R^2 = \pi R_0^2\rho^2$ et $\rho^2 = \dfrac{f(z_0)}{f(z)}$; par conséquent

$$V = \pi R_0^2 f(z_0) \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{f(z)}$$

Comme nous avons $\int_{z_1}^{z} \frac{dz}{f(z)} = t$, nous voyons que $V = \pi R^2 f(z_1)(t_1 - t_0)$, puisque

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{f(z)} = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{f(z)} - \int_{z_1}^{z} \frac{dz}{f(z)}.$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $f(z) = \frac{k^2}{2z}$; nous aurons

$$\rho = \sqrt{\frac{z}{z_1}}, \qquad t = \frac{1}{k^2}\int 2z\,dz = \frac{z^2 - z_1^2}{k^2}, \qquad \text{et, par suite,} \qquad z = \sqrt{z_1^2 + k^2 t}.$$

La valeur de ρ nous montre que si z_1 est positif, z doit aussi rester positif et qu'alors

$$z = +\sqrt{z_1^2 + k^2 t};$$

au contraire, si z_1 est négatif, on doit prendre $z = -\sqrt{z_1^2 + k^2 t}$.

Les composantes de la vitesse sont $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{\rho}\frac{k^2}{z}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{\rho}\frac{k^2}{z}$, $\frac{dz}{dt} = \frac{k^2}{2z}$, dans les deux cas.

La trajectoire a alors pour équations $\frac{x}{\rho} = \frac{y}{\rho}$ et $z = \frac{\rho^2}{2}$.

Nous voyons donc que c'est une parabole située dans le plan $\frac{x}{\rho} - \frac{y}{\rho} = 0$, plan qui passe par Oz et par le point M_0.

Cette parabole est parfaitement définie par son plan et par sa projection sur le plan des zx, elle admet, dans l'espace, l'axe des z pour axe de symétrie, la trace du plan zOM_0 sur le plan des xy pour tangente au sommet, et elle passe au point M_0. Ces conditions la déterminent sans ambiguïté.

Pour avoir le volume V, il suffit de calculer $t_1 - t_0$. Nous avons déjà $t = \frac{z^2 - z_1^2}{k^2}$; donc nous avons aussi $t_1 - t_0 = \frac{z_1^2 - z_0^2}{k^2}$, et, par suite, $V = \pi R_0^2 \frac{z_1^2 - z_0^2}{2z_1}$.

Pour avoir $V\xi$ et $V\zeta$, nous aurons à calculer les intégrales $\int_{z_0}^{z_1} x\,z\,A(z)\,dz$, $\int_{z_0}^{z_1} z\,A(z)\,dz$;

or

$$A(z) = \pi R^2(z) = \pi R_0^2 \frac{z_0}{z}, \qquad R(z)\sqrt{a_0} = R_0\sqrt{\frac{z_0}{z}}.$$

par conséquent, la première intégrale est $\pi R_0^2 a_0 \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{1}{2}} dz$; sa valeur est immédiate et égale à

$$\frac{2}{3}\pi R_0^2 a_0 \left[\left(\frac{z_1}{z_0}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{z_0}{z_0}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

La deuxième intégrale est $\frac{\pi R_0^2}{z_0}\int_{z_0}^{z_1} z^2\,dz = \frac{\pi R_0^2}{3z_0}(z_1^3 - z_0^3)$.

Les coordonnées du centre de gravité ξ et ζ sont donc fournies par les égalités

$$\xi = \frac{4}{3}a_0\frac{u - v}{u^3 - v^3}, \qquad \zeta = \frac{2}{3}z_0\frac{u^3 - v^3}{u^2 - v^2},$$

en désignant par u et v les quantités essentiellement positives, $\sqrt{\frac{z_1}{z_0}}$, $\sqrt{\frac{z_0}{z_0}}$.

Passons maintenant au cas où $f(z) = k\frac{z^2 + k^2}{z^2}$, k désignant encore une certaine quantité constante. Nous aurons d'abord

$$\rho = \sqrt{\frac{z^2}{z_0^2}\frac{z_0^2 + k^2}{z^2 + k^2}}, \qquad t = \frac{1}{k}\int \frac{z^2\,dz}{z^2 + k^2} = \frac{1}{k}\int \frac{z^2 + k^2 - k^2}{z^2 + k^2}\,dz.$$

Le calcul de cette intégrale est immédiat et donne $t = \frac{z - z_0}{k} - \operatorname{arc\,tg}\frac{z}{k} + \operatorname{arc\,tg}\frac{z_0}{k}$.

La fonction $f(z)$ est toujours positive dans le cas actuel, si on suppose toutefois k positif, et les composantes de la vitesse sont

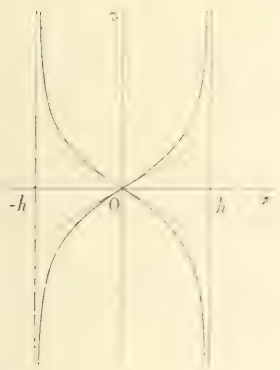
$$\frac{dx}{dt} = \frac{k^3 x}{z^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{k^3 y}{z^2}, \qquad \frac{dz}{dt} = k\frac{z^2 - k^2}{z^2}, \qquad \text{puisque} \qquad f(z) = \frac{2k^3}{z^2}.$$

La trajectoire a pour équations $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}$ et $x^2 = x_0^2 \frac{z^2}{z_0^2}\frac{z_0^2 - k^2}{z^2 - k^2}$: elle est parfaitement définie par son plan et par sa projection sur le plan des zx. Le plan de cette courbe est, comme tout à l'heure, le plan zOM_0. La projection sur le plan des zx a pour équation

$$x^2 = h^2 \frac{z^2}{z^2 - h^2} \qquad \left(h^2 = \frac{x_0^2}{z_0^2}(z_0^2 - k^2)\right).$$

Nous voyons de suite que la courbe est symétrique par rapport aux deux axes et qu'il suffit pour l'étudier de faire varier z de 0 à $-\infty$ dans la fonction

$$x = h\frac{z}{\sqrt{z^2 - h^2}}.$$



Cette fonction est toujours croissante : il suffit, pour le voir, de l'écrire ainsi $x = \frac{h}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{z^2}}}$: elle croît de 0 à h. La courbe part de l'origine et est asymptote à la droite $x = h$; la tangente à l'origine a pour coefficient angulaire $\frac{z}{x} = \frac{h}{h}$. La courbe est alors aisée à construire.

Il est à remarquer toutefois que le mobile ne peut pas passer au point O, car alors la vitesse deviendrait infinie. Le mouvement ne peut donc s'effectuer que sur l'un des quatre arcs qui partent du point O, évidemment sur celui qui contient le point initial M_0.

La même remarque s'applique aussi au cas précédent, où la vraie trajectoire est une demi-parabole, celle qui, partant de O, contient le point M_0.

Pour avoir le volume V, il suffit de calculer $t_2 - t_1$.

Nous avons déjà $t = \frac{z - z_0}{k} - \operatorname{arc\,tg}\frac{z}{k} + \operatorname{arc\,tg}\frac{z_0}{k}$; donc nous avons aussi

$$t_2 - t_1 = \frac{z_2 - z_1}{k} - \operatorname{arc\,tg}\frac{z_2}{k} + \operatorname{arc\,tg}\frac{z_1}{k}, \qquad \text{et} \qquad V = \pi R^2 k\left(\frac{z_2 - z_1}{k} - \operatorname{arc\,tg}\frac{z_2}{k} + \operatorname{arc\,tg}\frac{z_1}{k}\right).$$

Nous aurons $V\xi$ et $V\zeta$ en calculant les deux intégrales $\int_{z_1}^{z_2} a(z)A(z)dz$, $\int_{z_1}^{z_2} zA(z)dz$:

or $$A(z) = \pi R^2 z^2 = \pi R^2 \frac{z_0^2 + k^2}{z_0^2}\frac{z^2}{z^2 + k^2}, \qquad a(z) = a_0 = v_0\sqrt{\frac{(z_0^2 + k^2)^3}{z_0^2}}\frac{z^2}{(z^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}},$$

par conséquent, la première intégrale est

$$\pi R^2 a_0\left(\frac{z_0^2 + k^2}{z_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{z_1}^{z_2}\left(\frac{z^2}{z^2 + k^2}\right)^{\frac{3}{2}} dz.$$

Pour évaluer cette intégrale nous ferons le changement de variable $z = k\,\mathrm{sh}\,\varphi$ et l'intégrale indéfinie $\int\left(\frac{z^2}{z^2 + k^2}\right)^{\frac{3}{2}} dz$ deviendra $I = k\int \mathrm{th}^2\varphi\,\mathrm{sh}\,\varphi d\varphi$. Retranchons de l'intégrale $I' = k\int \mathrm{sh}\,\varphi d\varphi$, nous aurons

$$I - I' = k\int \frac{\mathrm{sh}\,\varphi d\varphi}{\mathrm{ch}^2\varphi} = \frac{-k}{\mathrm{ch}\,\varphi}, \quad \text{donc} \quad I = k\,\mathrm{ch}\,\varphi - \frac{k}{\mathrm{ch}\,\varphi} \quad \left(I = z\sqrt{z^2 + k^2} - \frac{k^2}{\sqrt{z^2 + k^2}}\right).$$

Nous voyons donc que $V\xi$ est donné par la formule

$$V\xi = \pi R^2 a_0 \alpha^2 \left(\sqrt{z_2^2 - k^2} - \sqrt{z_1^2 - k^2} - \frac{k^2}{\sqrt{z_2^2 - k^2}} - \frac{k^2}{\sqrt{z_1^2 - k^2}} \right),$$

dans laquelle $\alpha = \sqrt{\frac{z_0^2 + k^2}{z_0^2}}$; le calcul de ξ s'en déduit immédiatement.

La deuxième intégrale est $\pi R^2 \alpha^2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{z\,dz}{z^2 + k^2}$; or on a $\int \frac{z^3 dz}{z^2 + k^2} = \int \frac{z^2 + k^2 - k^2}{z^2 + k^2} z dz$

ou

$$\frac{1}{2} \int 2z dz - \frac{k^2}{2} \int \frac{2z dz}{z^2 + k^2}.$$

L'intégration est immédiate et donne $\frac{z^2}{2} - \frac{k^2}{2} L(z^2 + k^2)$.

Nous voyons donc que $V\zeta$ est donné par la formule

$$V\zeta = \frac{\pi R^2 \alpha^2}{2} \left(z_2^2 - z_1^2 - k^2 L \frac{z_2^2 + k^2}{z_1^2 + k^2} \right).$$

Le calcul de ζ en découle immédiatement.

Bonnes solutions : MM. L. Simon, à Fourmies ; A. Boussinesq, G. Lyon, Sottiaux, à Adiu, J. Sottiaux ; L. Perrin, à Tiercelieux ; Amblard, à Rumes ; L. Nacquelle ; G. Fouquet, à Reims ; H. Fleurent ; Lalanne (Orléans), A. Laurent, lycée de Lyon.

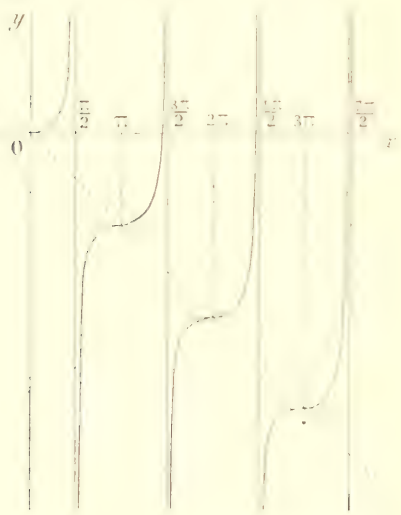
1883. — *Construire la courbe dont l'équation est* $y = \operatorname{tg} x - x$.

Trouver, avec deux décimales, la racine comprise entre 1 *et* 1,1 *de l'équation* $\operatorname{tg} x - x = \frac{\pi}{4}$.

Si l'on change x en $-x$, y se change en $-y$; donc la courbe est symétrique par rapport à l'origine, et il suffira de faire varier x par valeurs positives. La fonction y est discontinue pour les valeurs de x qui sont égales à un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$.

Nous avons $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}^2 x$, $\frac{d^2y}{dx} = 2\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)$.

Puisque $\frac{dy}{dx}$ est positif, y est une fonction croissante dans les intervalles où elle est continue. De plus, aux valeurs de x qui annulent $\operatorname{tg} x$, $x = k\pi$, correspondent des points d'inflexion, où la tangente est parallèle à Ox; tous ces points sont d'ailleurs situés sur la droite $y = 0$.



On en déduit aisément la forme de la courbe correspondant aux valeurs positives de x, et il suffit de construire la symétrique de cette courbe par rapport à l'origine.

Considérons maintenant l'équation

$$f(x) = \operatorname{tg} x - x - \frac{\pi}{4} = 0.$$

On voit immédiatement qu'elle admet une racine comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, car la droite $y = \frac{\pi}{4}$ rencontre la courbe qui vient d'être construite en un point situé entre Oy et la première asymptote $x = \frac{\pi}{2}$.

Vérifions que cette racine est comprise entre 1 et 1,1.

Nous avons $f(1) = \operatorname{tg} 1 - 1 - \frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} 1 - 1,7854$.

Pour calculer tg 1 nous remarquons que

$$1 \text{ radian} = \frac{200}{\pi} \text{ grades},$$

et comme $\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098$, nous avons $\frac{200}{\pi} = 63{,}66196$, et par suite

$$1 \text{ radian} = 63^g 66^c 19^m.$$

Au moyen des tables de logarithmes, nous obtenons

$$\log \operatorname{tg} 63^g 66^c 19^m = 0{,}19240 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg} 63^g 66^c 19^m = 1{,}5574.$$

On en déduit $$f(1) = 1{,}5574 - 1{,}7854 = -0{,}228.$$

De même $$f(1{,}1) = \operatorname{tg} 1{,}1 - 1{,}1 - \frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} 1{,}1 - 1{,}8854.$$

Or $$1^r{,}1 = 70^g 02^c 81^m.$$

$$\log \operatorname{tg} 70^g 02^c 81^m = 0{,}29321, \qquad \operatorname{tg} 70^g 02^c 81^m = 1{,}9648$$

et $$f(1{,}1) = 1{,}9648 - 1{,}8854 = +0{,}0794.$$

Comme $f(1)$ et $f(1{,}1)$ sont de signes contraires, la racine est comprise entre 1 et 1,1.

Appliquons maintenant les méthodes classiques d'approximation. La dérivée seconde $f''(x)$ étant positive dans l'intervalle, nous appliquerons la méthode des parties proportionnelles à la valeur 1, ce qui nous donnera une nouvelle valeur approchée par défaut, et la méthode de Newton à la valeur 1,1, et nous aurons une nouvelle valeur approchée par excès.

La méthode des parties proportionnelles nous donne

$$\frac{f(1{,}1) \times 1 - f(1) \times 1{,}1}{f(1{,}1) - f(1)} = \frac{0{,}0794 + 0{,}228 \times 1{,}1}{0{,}0794 + 0{,}228} = \frac{0{,}3302}{0{,}3074} = 1{,}074.$$

En appliquant la méthode de Newton on obtient

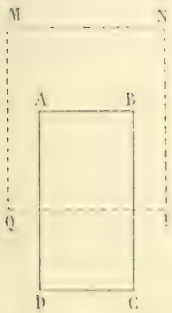
$$1{,}1 - \frac{f(1{,}1)}{f'(1{,}1)} = 1{,}1 - \frac{0{,}0794}{\operatorname{tg} 1{,}1^2} = 1{,}1 - \frac{0{,}0794}{3{,}858} = 1{,}1 - 0{,}0206 = 1{,}0794.$$

On en conclut que la racine est comprise entre 1,074 et 1,0794. Sa valeur à $\frac{1}{100}$ près par défaut est 1,07.

P. SALLERON, à Albi.

Bonnes solutions par MM. Amblard, à Ruines ; G. Fourcy, à Reims ; G. Lach, à Rodez ; A. Rousseau, à Fourmies ; L. Simon, à Fourmies ; J. Soubaigné, à Mont-de-Marsan.

1884. — *Un fil de cuivre, de 3mm de diamètre, est disposé en forme de rectangle ABCD (AB = 10cm, BC = 20cm). Une partie de ce cadre est placée entre les pièces polaires d'un électro-aimant donnant un champ magnétique perpendiculaire au plan du rectangle, ce champ magnétique a une intensité constante et égale à 10 000 gauss dans la région limitée par le contour MNPQ (qui peut représenter la projection des pièces polaires sur le plan de la figure), et il est nul en dehors de ce contour, de telle manière que AB soit dans le champ magnétique et CD en dehors. La résistance du cuivre est $1{,}6 \times 10^{-6}$ ohms par centimètre.*



1° Qu'arrive-t-il au point de vue électrique, mécanique et calorifique si l'on donne au cadre un mouvement de translation parallèle à BC, dans un sens ou dans l'autre ?

2° Ce mouvement de translation étant supposé uniforme, et la vitesse égale à 4m par seconde, calculer l'intensité du courant qui passe dans le cadre. Quelle force faut-il exercer sur le cadre pour produire ce mouvement ? Quelle est, en calories, la quantité de chaleur dégagée par seconde ? On suppose que toute la chaleur ainsi dégagée soit employée à échauffer le cuivre ; quelle sera l'élévation de température lorsqu'on aura produit un déplacement de 10 centimètres ?

La chaleur spécifique du cuivre est 0,1.

3. *Le côté* BC *étant supposé vertical, on abandonne le cadre à lui-même sous l'action de son poids. Expliquer ce qui se passe. Montrer que le mouvement devient rapidement uniforme et calculer la vitesse ainsi atteinte.*

La densité du cuivre est 9 ; *l'accélération des corps en chute libre est* $g = 981$ *unités C. G. S.*

Qu'arriverait-il si l'on modifiait le diamètre du fil de cuivre sans changer les dimensions du rectangle, ou si le cadre était fait de plusieurs spires de fil isolées les unes des autres ?

1° Si l'on donne au cadre ABCD un mouvement de translation parallèle à BC dans un sens ou dans l'autre, le flux magnétique traversant le circuit varie ; il en résulte un courant d'induction qui, d'après la loi de Lenz, tend toujours à s'opposer à la cause qui l'engendre.

Si nous supposons, par exemple, le flux magnétique dirigé d'avant en arrière de la figure, et le mouvement de translation dans le sens BC, le flux magnétique diminue ; le courant induit tend à l'augmenter et circule, par conséquent, dans le sens des aiguilles d'une montre. Un mouvement de sens inverse produirait un courant de sens inverse.

Au point de vue mécanique, le courant qui se propage suivant AB, placé dans un champ magnétique, est soumis à une action électromagnétique f ayant, dans le premier cas, le sens CB et tendant à entraver le mouvement. Les côtés BC et AD seront de même soumis à des actions électromagnétiques mais opposées l'une à l'autre.

Enfin, au point de vue calorifique, l'effet Joule produit de la chaleur par transformation en énergie calorifique du travail effectué contre la force f.

2. On sait que la force électromotrice d'induction E est égale à la vitesse de variation du flux. On a donc, en désignant le champ par A et la vitesse de translation du cadre par v, $E = H \times AB \times v$, d'où, en introduisant les valeurs numériques,

$$E = 10\,000 \times 10 \times 2 = 200\,000 \times 4 = 800\,000.$$

La résistance d'un conducteur a pour expression connue $R = \frac{l}{s}$. Faisons le calcul en unités C. G. S. en remarquant qu'un ohm vaut 10^9 ; on a

$$l = 4 \times 10 = 40 \qquad 10^9, \qquad s = 0{,}09, \qquad R = \frac{40}{0{,}09} \qquad R = \frac{128}{3^2} \times 10$$

L'intensité du courant, quotient de la force électromotrice par la résistance, sera

$$I = \frac{3^2}{64} \times 10 = \frac{100}{128} \text{ ampères},$$

ce qui fait 1^{amp}, 472 à moins de un millième par défaut.

Pour évaluer la force qu'on doit exercer sur le cadre, on peut remarquer que le travail de cette force pendant l'unité de temps est converti en énergie électrique et a pour expression EI ; on doit donc avoir, en considérant que la vitesse de translation est égale à 2, $2f = EI$, d'où, en unités C. G. S.,

$$f = \frac{1}{2} \times 200\,000 \times \frac{3}{64} = 14\,700 \text{ dynes}$$

ce qui représente un poids d'environ 15 grammes.

L'énergie électrique EI se transforme elle-même en énergie calorifique par l'effet Joule. Or, une petite calorie équivaut à $4{,}18 \times 10^7$ ergs. D'autre part un déplacement de 10^{cm} avec une vitesse égale à 2 a lieu en 5 secondes. Donc la quantité de chaleur dégagée pendant ces 5 secondes sera, en petites calories,

$$Q = 5 \frac{EI}{4{,}18 \times 10^7} = 5 \times 200\,000 \times \frac{3^2}{64} \times \frac{1}{4{,}18 \times 10^7} = 0{,}00353.$$

La capacité calorifique du conducteur est $mc = ls \times 9 \times 0{,}1$.

L'élévation de température sera, en degrés centigrades, $\Delta T = \frac{Q}{mc} = 0{,}000\,926$.

3. A mesure que la vitesse de chute augmente, la force électromagnétique augmente et tend à faire équilibre au poids du cadre ; la vitesse tend donc à devenir constante.

Pour une vitesse v, la force électromagnétique a pour valeur

$$f = \frac{EI}{v} = \frac{E^2}{Rv} = \frac{(10Hv)^2}{Rv} = \frac{100H^2}{R}v.$$

Elle produit une accélération retardatrice $\frac{f}{m}$, de sorte que l'accélération totale du mouvement du cadre dans les conditions du problème, c'est-à-dire $\frac{dv}{dt}$, a pour expression $\frac{mg}{m} - \frac{100H^2}{mR}v$,

ou, en introduisant les données numériques, $\frac{dv}{dt} = 980 - 193v$.

L'intégration, si l'on remarque que pour $t = 0$ on a $v = 0$, donne $v = 5{,}08(1 - e^{-193t})$.

Nous voyons que v croît avec le temps, mais, comme e^{-193t} devient rapidement très petit, le mouvement devient au bout de très peu de temps sensiblement uniforme avec une vitesse de $5^{cm},08$.

Si on double la section du fil, on ne change rien, pour une vitesse donnée, à la force électromotrice d'induction, mais on diminue la résistance de moitié ; l'intensité du courant $\frac{E}{R}$ devient double, l'énergie calorifique $\frac{E^2}{R}$ aussi ; la masse ayant doublé, l'échauffement ne change pas.

Pour la vitesse limite déjà calculée, la force électromagnétique est double, le poids aussi ; il y a encore mouvement uniforme.

Si le cadre est formé de n spires isolées les unes des autres, chacune d'elles, puisqu'il n'y a pas de circuit extérieur, peut être considérée séparément et se comporte comme si elle était seule ; les phénomènes sont absolument identiques à ceux qui se produiraient si le fil avait une section n fois plus forte.

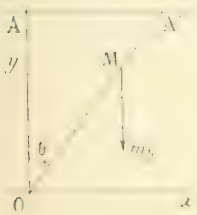
P. SALLERON, à Alby.

QUESTIONS PROPOSÉES

1934. — Dans une demi-sphère pleine et homogène, de rayon pris pour unité, on creuse une cavité demi-sphérique concentrique de rayon x. Déterminer x avec trois décimales exactes, de façon que le centre de gravité du solide restant coïncide avec le pôle de la cavité.

M. G.

1935. On considère, dans un plan vertical, l'horizontale Ox et la verticale ascendante Oy qui passent en un point O situé sur le plan horizontal qui limite le sol. Soit A un point situé sur Oy à la hauteur $OA = y = 98{,}81$. Soit OA une droite du plan Oxy qui fait l'angle θ avec Oy.



1° Un point pesant glisse sans frottement sur OA ; la vitesse tend vers l'infini avec t. Étudier les divers mouvements que peut prendre ce point.

2° On suppose que ce point M tombe sur OA' dans les mêmes conditions, sans vitesse initiale, en partant toujours d'un point A' situé à une hauteur égale à y. Trouver le lieu des positions qu'il occupe sur toutes les droites OA', au bout du temps τ qu'il met à tomber sur Ox de A en O. Construire ce lieu et ne garder que l'arc qui convient au problème.

3° A partir de chacun des points M de ce lieu, on porte sur OA' un vecteur égal à l'accélération de ce point, changée de signe, le lieu de leurs extrémités est une courbe L, que l'on demande de déterminer. Chaque élément de L a pour mesure le produit de sa longueur par l'accélération correspondante. Déterminer le centre de gravité de L.

E. K.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Cours préparatoires.*)

Concours de 1910.

1895. — *Les séries*

$$\sin^3 x + 2\sin^3\frac{x}{2} + \ldots + n\sin^3\frac{x}{n} + \ldots, \qquad \sin x^{\frac{1}{2}} + 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \ldots + n\left(\sin\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \ldots$$

où $0 < x < \frac{\pi}{2}$, *sont-elles convergentes ou divergentes ?*

Faute de mieux, on pourra traiter le cas où x est très petit.

Soient u_n et v_n les termes généraux de deux séries à termes positifs. On sait que, si le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ a une limite *différente de zéro* pour n infini, les deux séries sont de même nature, c'est-à-dire toutes deux convergentes, ou toutes deux divergentes.

Les deux séries proposées sont à termes positifs, puisque x est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; nous pouvons leur appliquer le théorème que nous venons de rappeler.

Posons, plus généralement, $u_n = n\left(\sin\frac{x}{n}\right)^{\alpha}$, α étant un exposant quelconque fixe, et $v_n = n\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}$; nous en tirons

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\left(\sin\frac{x}{n}\right)^{\alpha}}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}} = \left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^{\alpha} x^{\alpha}.$$

Quand n augmente indéfiniment $\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}$ a pour limite 1, donc $\frac{u_n}{v_n}$ a pour limite x^{α}, quantité positive et non nulle.

Donc les deux séries (u_n) et (v_n) sont de même nature.

On sait que la série (v_n) est convergente si $\alpha - 1 > 1$, ou si $\alpha > 2$, et qu'elle est divergente si $\alpha - 1 \leq 1$, ou $\alpha \leq 2$.

Il en sera de même pour la série (u_n).

On en conclut que des deux séries proposées, la première (qui correspond à $\alpha = 3$) est convergente, et que la seconde $\left(\alpha = \frac{1}{4}\right)$ est divergente.

Jean SOUBAIGNÉ, à Mont-de-Marsan.

Bonnes solutions par MM. Ambeard, à Rennes ; Ch. Guillaume ; G. Lacan, à Rodez ; Neveans ; P. Salleron, à Alby.

1896. — 1° *On considère tous les secteurs sphériques appartenant à une sphère de rayon* R *donné, et qui ont un même volume* V *donné. Quel est celui de ces secteurs dont la surface totale a la plus petite valeur possible ? On posera, pour simplifier les calculs,* $V = \frac{4}{3}\pi a^3$, *a étant une constante.*

[*On trouvera que le secteur sphérique cherché est tel que l'un des deux cônes qui le limitent se confond avec son axe.*]

2° V *conservant la même valeur, déterminer ensuite quel est, quand* R *varie, celui des secteurs obtenus dont la surface totale a la plus petite valeur possible.*

Observations. — *On pourra traiter d'abord la seconde partie du problème, en admettant le résultat indiqué entre crochets pour la première partie.*

1. Considérons dans un cercle de rayon R le secteur OAB tournant autour du diamètre $x'Ox$. Le volume V, engendré par ce secteur, est égal au produit de l'aire de la zone engendrée par l'arc AB par le tiers du rayon, soit à $2\pi R.CD.\frac{R}{3}$. On doit donc avoir $\frac{2\pi R^2.CD}{3} = \frac{4\pi a^3}{3}$ ou $CD = \frac{2a^3}{R^2}$: par suite CD a une valeur constante.

On doit avoir évidemment $\frac{2a^3}{R^2} < 2R$, ou $a < R$.

Désignons par α et β les angles des rayons OA et OB avec la demi-droite Ox, en supposant

$$0 < \alpha < \beta < \pi.$$

Etant donné le point A, le point B est bien déterminé ; il suffit de porter à partir du point C et dans le sens Ox' la longueur $CD = \frac{2a^3}{R^2}$. Par suite, on peut considérer β comme une fonction de α, définie par une relation aisée à former. En effet, en prenant Ox comme sens positif des segments, on a

$$\frac{2a^3}{R^2} = \overline{DC} = \overline{OC} - \overline{OD} = R(\cos\alpha - \cos\beta)$$

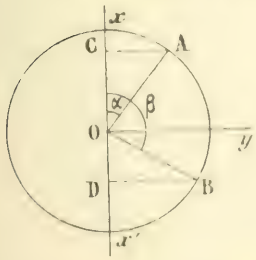
ou

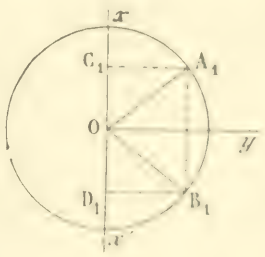
$$(1) \qquad \cos\alpha - \cos\beta = \frac{2a^3}{R^3}.$$

Nous considérerons α comme la variable indépendante et β comme une fonction de α définie par l'équation (1).

D'autre part, nous remarquons qu'à toute position du secteur OAB correspond une autre position symétrique par rapport à Oy, et que les deux secteurs symétriques engendrent en tournant autour de Ox des solides qui ont des volumes égaux et des surfaces totales égales.

Si l'on désigne alors par OA_1B_1 la position du secteur pour laquelle A_1B_1 est parallèle à Ox, on aura $OC_1 = OD_1 = \frac{a^3}{R^2}$, et il suffira de faire varier α de 0 à la valeur $\alpha_1 = \widehat{C_1OA_1}$. La valeur de β correspondant à α_1 sera visiblement égale à $\pi - \alpha_1$.





Cela posé, la surface totale S du solide engendré par le secteur OAB se compose de l'aire de la zone AB, soit $2\pi R.CD$ ou $\frac{4\pi a^3}{R}$, augmentée des surfaces latérales des cônes engendrés par les rayons OA et OB, soit $\pi OA.AC$ et $\pi OB.BD$, ou $\pi R^2 \sin\alpha$ et $\pi R^2 \sin\beta$.

On a donc
$$S = \frac{4\pi a^3}{R} + \pi R^2(\sin\alpha + \sin\beta).$$

Prenons la dérivée par rapport à α, nous avons $\frac{dS}{d\alpha} = \pi R^2\left(\cos\alpha + \cos\beta\,\frac{d\beta}{d\alpha}\right)$ et, pour avoir

$\frac{d\beta}{d\alpha}$, il suffit de dériver la relation (1) par rapport à α, ce qui donne

$$-\sin\alpha + \sin\beta\frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \qquad \text{et} \qquad \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

On en déduit
$$\frac{dS}{d\alpha} = \pi R^2\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}.$$

Quand α croît de 0 à α_1, β croît, donc $\alpha+\beta$ croît *en restant inférieur à* π, d'après ce que nous avons dit plus haut. Par suite, $\sin(\alpha+\beta)$ est toujours positif, et S va en croissant.

Il en résulte que la plus petite valeur de S correspond à $\alpha = 0$. Dans ce cas le cône engendré par OA se réduit à son axe.

2. Calculons cette valeur minimum de S. Nous avons

$$S = \frac{4\pi a^2}{R} + \pi R^2\sin\beta \qquad \text{et} \qquad \cos\beta = 1 - \frac{2a^3}{R^3};$$

alors
$$\sin^2\beta = 1 - \left(1 - \frac{2a^3}{R^3}\right)^2 = \frac{4a^3(R^3 - a^3)}{R^6}, \qquad \sin\beta = \frac{2a\sqrt{a(R^3 - a^3)}}{R^3},$$

et
$$S = \frac{2\pi a}{R}\left(2a^2 + \sqrt{a(R^3 - a^3)}\right).$$

Nous allons étudier les variations de cette fonction quand R croît à partir de a. La dérivée de S par rapport à R est

$$\frac{dS}{dR} = \pi a.\frac{aR^3 + 2a^4 - 4a^2\sqrt{a(R^3 - a^3)}}{R^2\sqrt{a(R^3 - a^3)}}, \text{ qu'on peut écrire } \frac{dS}{dR} = \pi a.\frac{a(R^3 - a^3) - 4a^2\sqrt{a(R^3 - a^3)} + 3a^4}{R^2\sqrt{a(R^3 - a^3)}}.$$

On peut considérer le numérateur comme un trinome du second degré par rapport à $\sqrt{a(R^3 - a^3)}$ et ce trinome a pour racines a^2 et $3a^2$. Il sera donc positif si $\sqrt{a(R^3 - a^3)}$ est extérieur à l'intervalle $(a^2, 3a^2)$, ou si R est extérieur à l'intervalle $(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{10})$, et négatif si R est compris dans cet intervalle.

On en déduit les variations de S

R	a		$a\sqrt[3]{2}$		$a\sqrt[3]{10}$		$+\infty$
S	$4\pi a^2$	croît	M (*max.*)	décroît	m (*min.*)	croît	$+\infty$

La valeur du minimum m est $m = \frac{2\pi a}{a\sqrt[3]{10}}(2a^2 + 3a^2) = \frac{10\pi a^2}{\sqrt[3]{10}} = \pi a^2\sqrt[3]{100}$.

Comme $\sqrt[3]{100} > 4$, on a $m > 4\pi a^2$, et l'on voit que la plus petite valeur de S est $4\pi a^2$. Elle correspond à $R = a$.

NÉVEJANS.

Bonnes solutions par MM. G. Lach, à Rodez ; A. Rousseau, à Fourmies ; P. Salleron, à Albi.

1897. — *Étant donnés une section conique et deux points fixes* A *et* B *pris sur cette courbe, on forme le triangle* AMB *en joignant les points* A *et* B *à un troisième point* M *de position variable sur la conique, et l'on demande le lieu du point de rencontre* P *des trois hauteurs de ce triangle.*

Prenons pour axe des x la droite AB et pour axe des y la perpendiculaire à AB en son milieu ; désignons par a et $-a$ les abscisses des points A et B.

Soit

$$(\gamma) \qquad x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey - a^2 = 0$$

l'équation d'une conique (γ) passant par les deux points A et B; prenons sur cette conique un point variable M, ayant pour coordonnées x_0 et y_0; nous avons

$$(1) \qquad x_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Ey_0 - a^2 = 0.$$

Le point de concours des hauteurs du triangle AMB peut être défini comme l'intersection de la perpendiculaire à Ox menée par le point M, et de la perpendiculaire à AM menée par le point B. Les équations de ces deux droites sont

$$(2) \qquad x - x_0 = 0, \qquad yy_0 + (x - a)x_0 - a = 0.$$

Nous aurons le lieu cherché en éliminant x_0, y_0 entre les équations (1) et (2). Des équations (2) nous tirons

$$(3) \qquad x_0 = x, \qquad y_0 = -\frac{x^2 - a^2}{y};$$

et, en portant ces valeurs de x_0 et y_0 dans la relation (1), nous obtenons

$$x^2 - 2B\frac{x(x^2 - a^2)}{y} + C\frac{(x^2 - a^2)^2}{y^2} - 2E\frac{x^2 - a^2}{y} - a^2 = 0,$$

ou

$$(x^2 - a^2)[y^2 - 2Bxy + Cx^2 - 2Ey - Ca^2] = 0.$$

Telle est l'équation du lieu.

Nous avons d'abord le facteur $x^2 - a^2$ qui nous donne les deux droites $x - a = 0$, $x + a = 0$; il est aisé de voir que ces droites constituent un lieu étranger, introduit par notre méthode de calcul.

En effet, prenons un point quelconque $(a, 0)$ sur la droite $x = a$; les formules (3) nous donnent pour valeurs correspondantes de x_0 et y_0, $x_0 = a$, $y_0 = 0$. Si nous remplaçons x_0, y_0 par ces valeurs dans les équations (2) qui définissent un point du lieu, la première devient $x - a = 0$, et la seconde est identiquement vérifiée.

Ces deux équations ne donnent pas un point du lieu, car lorsque le point (x_0, y_0) se rapproche indéfiniment du point A, la droite AM a pour limite la tangente AT au point A à la conique (γ), et le point de concours des hauteurs du triangle AMB a pour limite le point de rencontre de la droite $x = a$ et de la perpendiculaire abaissée de B sur AT.

On verrait de même que la droite $x + a = 0$ ne fait pas partie du lieu.

Le véritable lieu est donc la conique (γ') définie par l'équation

$$(\gamma') \qquad y^2 - 2Bxy + Cx^2 - 2Ey - Ca^2 = 0.$$

Elle passe par les deux points A et B et ses directions asymptotiques sont perpendiculaires à celles de la conique (γ). Ces deux coniques sont donc de même nature.

Ce résultat est d'ailleurs très simple à établir géométriquement. Lorsque le point M se déplace sur (γ), les droites AM et BM décrivent des faisceaux homographiques; donc, les perpendiculaires à ces droites, menées par les points B et A, décrivent aussi des faisceaux homographiques. Par suite, le lieu de leur point de rencontre H est une conique (γ') passant par les points A et B.

Si le point M est à l'infini dans une direction Δ, le point H est aussi à l'infini dans la direction perpendiculaire à Δ, à moins que Δ ne soit parallèle à Oy. Dans ce cas les droites AH et BH sont confondues suivant AB; le lieu du point H se décompose alors en la droite AB et en une autre droite. C'est ce qu'on vérifie aisément sur l'équation de (γ') quand on y fait $C = 0$.

G. LAGH, à Rodez.

Bonnes solutions par MM. E. N. Barisien, Ch. Guillerme, L. Montagu, à Oran, René Nabonnand, université de Lyon; Névejans; A. Rousseau, à Fournes; Jean Souleaux.

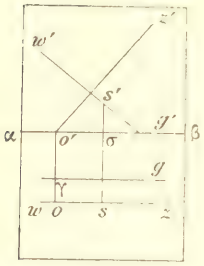
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1877. — *Titre extérieur : Hyperboloïde et cône. — Titre intérieur : Solide commun.*

Le cadre a 270mm *sur* 450mm, $\alpha\beta$ *est le petit axe du cadre. Les lignes de rappel sont perpendiculaires à* $\alpha\beta$.

$$\alpha o' = 50^{mm},\quad oo' = sz = 110^{mm},\quad o'z = os = 90^{mm},\quad s'z = [illegible]^{mm},\quad o'z' = 40^{mm}.$$

Une surface gauche de révolution a pour axe la droite de front oz, $o'z'$ *qui fait avec un plan horizontal un angle de* 45°. *Elle est engendrée par la droite* g, g' *parallèle aux deux plans de projection. Un cône de révolution a pour sommet le point* s, s' *et pour axe la droite de front* sw, $s'w'$ *qui fait avec un plan horizontal un angle de* 45°. *Une des génératrices du cône est verticale.*



On demande de représenter par ses deux projections la partie solide et opaque du cône intérieure à l'hyperboloïde et limitée à une sphère de rayon 130mm *dont le centre est le point d'intersection des axes* SW *et* OZ.

Mise à l'encre. — Le résultat seul est à l'encre noire, les lignes vues en traits pleins, les lignes cachées en points ronds. Les constructions sont faites à l'encre rouge, traits pleins.

On déterminera un point quelconque de chaque courbe et la tangente en ce point, les points et tangentes remarquables.

Nota. — *Les tangentes seront tracées en traits rouges pleins, un peu plus visibles aux environs du point de contact.*

(*École Centrale, concours de 1910.*)

Contours apparents. — Le contour apparent vertical du cône se compose des deux génératrices $s_1s'_1$, l'une de front, l'autre verticale. Son contour apparent horizontal n'existe pas à proprement parler puisqu'il a une génératrice verticale ; en réalité il se réduit à la trace horizontale oz du plan tangent de profil qui sépare les projections de tous les points de la nappe supérieure de celles des points de la nappe inférieure du cône.

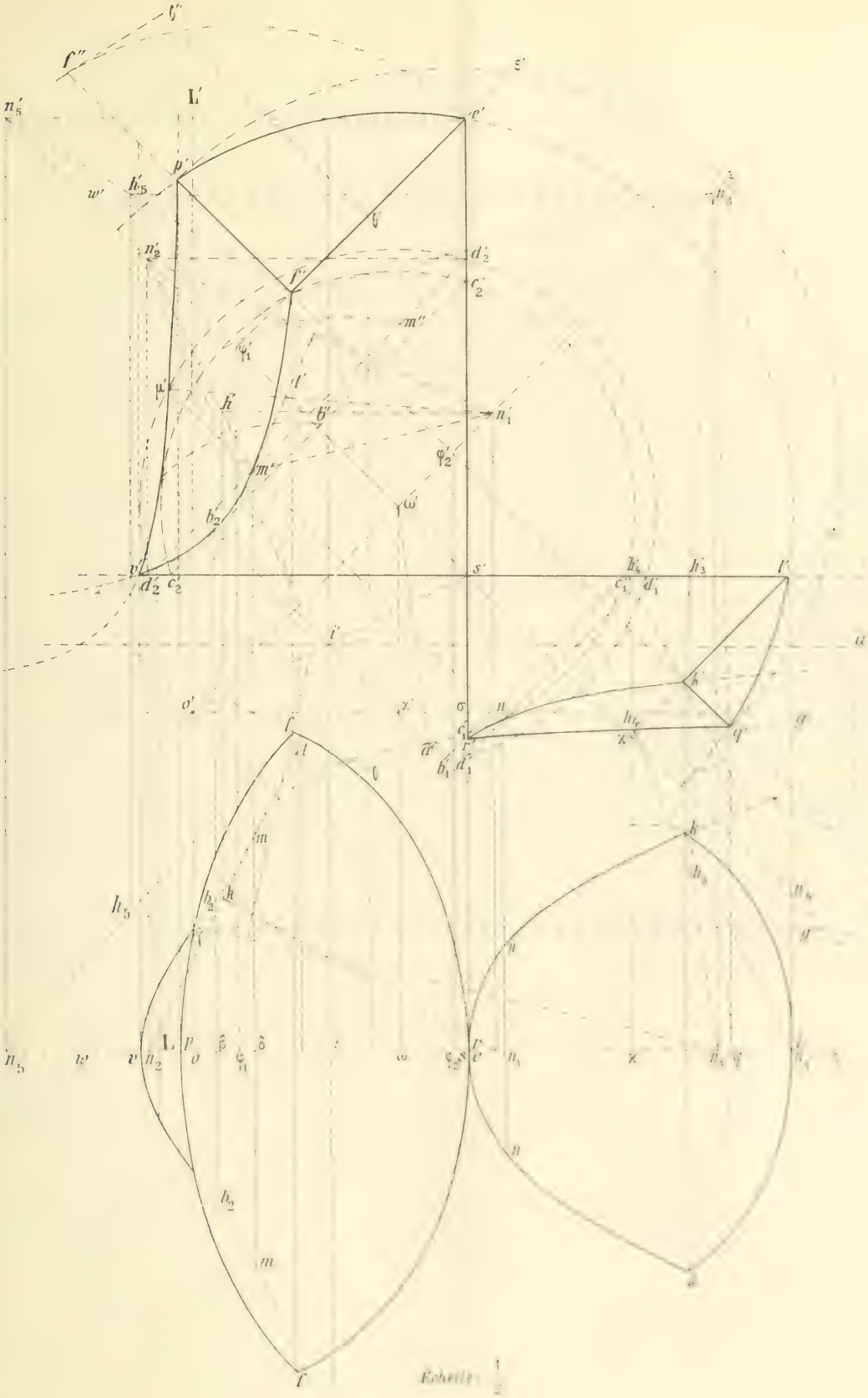
L'axe de l'hyperboloïde étant de front et incliné à 45° sur la génératrice de front donnée, son cône asymptote est égal au cône donné que l'on aurait fait tourner de 90° autour d'un axe de bout passant par son sommet, le sommet de ce cône asymptote étant au point o, o'. Le contour apparent de l'hyperboloïde sur le plan vertical est donc une hyperbole équilatère dont l'axe non transverse est $o'z'$, le demi-axe transverse étant égal à la distance des deux parallèles os et γg. L'hyperbole est donc bien déterminée, ses asymptotes sont $o'g'$ et $o'L'$ et on peut la construire par points exactement.

La surface n'a pas de contour apparent horizontal si ce n'est le pied de chaque génératrice verticale tel que γ.

Intersection des deux surfaces. — Remarquons d'abord que les deux surfaces étant de révolution autour d'axes situés dans le même plan de front oz, sont symétriques par rapport à ce plan de front. Comme elles sont du second degré, leur intersection, qui est une courbe du quatrième degré, se projette sur le plan de symétrie, et par suite sur le plan vertical, suivant une conique. Cette conique a des points à l'infini dans les deux directions γg, $o'g'$ et oL, $o'L'$ puisque les deux surfaces ont des génératrices parallèles à ces deux directions ; c'est donc une hyperbole équilatère ayant ces deux directions pour directions asymptotiques. Remarquons maintenant que le plan de profil qui passe par le milieu de $o's'$ coupe les deux cônes o' et s' suivant des paraboles égales puisque ces deux cônes sont égaux, et que ce plan coupe la génératrice qui contient le sommet de la parabole à la même distance du sommet de chacun de ces cônes. Donc ce plan coupe le cône S et l'hyperboloïde suivant des paraboles égales et il nous donne en projection verticale une asymptote de l'intersection. Le sommet de l'hyperbole équilatère est donc au milieu i' de $o's'$ et permet de tracer aussitôt la seconde asymptote $i'u'$.

La projection horizontale de l'intersection sera une quartique symétrique par rapport à oz dont une asymptote sera la trace du plan de profil iu' qui donne l'asymptote verticale de la projection verticale, la seconde direction asymptotique oz ne donnant qu'une branche parabolique asymptote aux deux paraboles égales données sur chaque surface par le plan horizontal qui passe en i'.

Point courant et tangente. — Pour obtenir un point courant de l'intersection nous couperons les deux surfaces par des sphères ayant leurs centres au point ω, ω', intersection des axes. Avant tout nous chercherons s'il y a des sphères limites et pour cela nous devons mener par ω' les normales aux méridiennes des deux surfaces. Nous voyons immédiatement que les normales aux génératrices du cône ne donnent rien, et que la seule sphère limite correspond aux deux normales égales menées à l'hyperbole méridienne. On sait que les pieds de ces normales sont sur la perpendiculaire à l'axe menée par le pied α' de la perpendiculaire à l'asymptote


Echelle

menée par ω. Or le point d'intersection de l'hyperbole avec cette droite parallèle à son axe transverse peut être construit simplement à la règle et au compas. On obtient ainsi le rayon $\omega' a'$ de la sphère limite qui donne sur le cône les deux parallèles de bout projetés en c_1, c_1 et c_2, c_2 et les deux points correspondants de l'intersection b'_1 et b'_2, le second seul étant réel.

En ce point nous savons que la courbe d'intersection est tangente aux projections c'_1, c'_1 et c'_2, c'_2 des parallèles du cône, et par suite puisque ces droites sont perpendiculaires à l'axe transverse de l'hyperbole intersection, les points de contact b'_1 et b'_2 sont les sommets de cette hyperbole. On pourrait donc maintenant achever sa construction.

Nous avons néanmoins construit un point courant m' en nous servant d'une sphère auxiliaire de rayon arbitraire supérieur à $\omega' a'$ qui a donné sur l'hyperboloïde deux parallèles dont l'un est $\mu' m'$ et sur le cône deux autres parallèles dont l'un $d'_2 m'$ coupe le précédent en m'. Cette construction donne manifestement quatre points de l'intersection chaque fois, mais quelques-uns peuvent être virtuels.

La tangente en m' est la perpendiculaire au plan des normales menées par ce point à chaque surface. Pour obtenir ces normales nous avons pris le point de la méridienne situé sur le même parallèle et nous avons mené la normale en ce point à la méridienne, puis nous avons joint le point m' au point où cette normale coupe l'axe de la surface. On a ainsi les deux normales $m'n'_1$ pour l'hyperboloïde et $m'n'_2$ pour le cône ; la tangente $m'l'$ est perpendiculaire à $n'_1 n'_2$ qui est une ligne de front du plan des normales.

En projection horizontale nous obtenons deux points correspondant à chaque point de la projection verticale et symétriquement placés par rapport à os ; leur distance commune à cette droite s'obtient en rabattant le parallèle de la sphère auxiliaire qui les a fournis sur le plan de front du centre ω. Nous avons ainsi reporté les longueurs βb_2 et δm respectivement égales à $b'b''$ et $\lambda\, m'm''$.

Il reste à limiter l'intersection par la sphère de rayon 13 centimètres et de centre Ω. Cette sphère donne comme toutes les sphères auxiliaires deux parallèles sur le cône ; ils sont projetés verticalement suivant les droites $e'f'$ et $l'k'$ et horizontalement suivant deux ellipses dont on a immédiatement les axes. Le demi-grand axe de la première est de profil ; il est égal au rayon $\varphi'_1 e'$ du parallèle de la sphère, son demi-petit axe étant la projection horizontale $\varphi_1 e$ du rayon de front de ce parallèle ; la seconde a son demi-grand axe de profil égal au rayon $\varkappa' l'$ du second parallèle et pour demi-petit axe la projection $\varkappa l$ de ce rayon de front. On doit d'ailleurs limiter ces ellipses aux points f et k où elles coupent le parallèle donné par la même sphère sur l'hyperboloïde et qui appartiennent à la troisième ellipse projection horizontale de ce parallèle. Cette ellipse a son centre en φ_2, son grand axe de profil étant le double du rayon $\varphi'_2 v'$ du parallèle et son petit axe le double de la projection $\varphi_2 p$ de ce rayon. On conserve seulement les arcs fpf et kqk de cette ellipse. Il est d'ailleurs facile de construire par points chacun de ces arcs en reportant sur chacune des lignes de rappel des points de $p'f'$ par exemple et, à partir de ow et de part et d'autre, des longueurs égales aux ordonnées de ces points sur le parallèle rabattu en $p's'$ dans le plan de front de son centre. Cette construction donnerait en même temps la tangente en chaque point de l'ellipse par le relèvement de la tangente au point correspondant du parallèle.

Points remarquables. — Ce sont d'abord les points γ et γ' à l'intersection des génératrices du cône S et de l'hyperbole méridienne de la seconde surface. On les obtient en appliquant une des constructions classiques du point d'intersection d'une hyperbole par une parallèle à une asymptote ; puis les points où la sphère de 13cm de rayon coupe les contours apparents et la courbe d'intersection des deux surfaces.

Ce sont les points p', q', e', l' où la circonférence contour apparent de la sphère coupe l'hyperbole méridienne et les génératrices de front du cône.

Les projections horizontales de tous ces points s'obtiennent immédiatement par des lignes de rappel. Nous avons construit les tangentes à la projection horizontale de l'intersection au point f et aussi à l'arc d'ellipse pf en ce même point. Enfin il est aisé de voir que cette ellipse pf ainsi que la courbe d'intersection passent nécessairement par le point γ et son symétrique par rapport à ωs puisque ces points sont les projections horizontales des deux génératrices verticales qui dans l'espace rencontrent ces deux courbes.

Solide. — La limitation du solide n'offre aucune difficulté. En projection verticale il est projeté à l'intérieur du contour $s'l'q'r'$ et $s'e'p'v'$. Toutes les lignes d'intersection sont vues. En projection horizontale l'arc $f\gamma$ de la courbe d'intersection et son symétrique sont cachés par la surface sphérique comprise entre les deux ellipses ; de même l'arc d'ellipse kqk est caché par la surface conique $snklk$, tout le reste est vu.

Bonne épure de M. A. Boussiac, à Fourmies.

ÉCOLE CENTRALE (1910)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Fin.*)

5419. — Dans le plan horizontal de projection on donne une ellipse, méridienne d'un ellipsoïde de révolution. Mener par une horizontale du plan de projection, un plan tangent à l'ellipsoïde.

5420. — Soit un ellipsoïde de révolution à axe vertical. Courbe de contact du cylindre circonscrit à la surface et parallèle à une direction donnée. Trace du cylindre sur le plan horizontal de projection.

5421. — Courbe de contact d'un cône de sommet donné circonscrit à un ellipsoïde de révolution à axe vertical.

5422. — On donne un cylindre de front dont la base est un cercle du plan horizontal de centre ω, ω' et une sphère de rayon donné, dont le centre est sur la parallèle aux génératrices du cylindre mené par ω, ω'. Intersection du cylindre et de la sphère

5423. — Intersection d'une sphère de centre et de rayon donnés et d'un cylindre de révolution d'axe de front et de rayon donnés.

5424. — On donne un hyperboloïde de révolution d'axe vertical et un cône de révolution dont l'axe est la parallèle à la ligne de terre menée par le centre de l'hyperboloïde, dont le sommet est le centre de cet hyperboloïde, et dont le contour apparent vertical se compose des deux asymptotes de l'hyperbole méridienne. Intersection de ces surfaces.

5425. — On donne un paraboloïde défini par un plan directeur horizontal et deux génératrices. Dans le plan horizontal on trace un cercle base d'un cône dont le sommet est sur l'une des génératrices. Intersection du cône et du paraboloïde.

5426. — Même problème dans le cas où le cercle est remplacé par une conique et le cône par un cylindre parallèle à l'une des génératrices.

5427. — Dans le plan horizontal de projection on donne une ellipse et deux tangentes sm, sp, qui sont les génératrices d'un cône de révolution dont l'axe est la bissectrice de $\widehat{msp}$. Intersection de ce cône et de l'ellipsoïde engendré par la rotation de l'ellipse autour de son axe.

5428. — Intersection de l'hyperboloïde de révolution engendré par une horizontale α de cote 2 tournant autour de l'horizontale A de cote 0 avec l'hyperboloïde de révolution engendré par l'horizontale β de cote 2 tournant autour de l'horizontale B de cote 0.

5429. — Soit un hyperboloïde de révolution déterminé par son axe vertical et une génératrice de front, et un deuxième hyperboloïde de même plan de cercle de gorge. Intersection des deux hyperboloïdes.

5430. — On donne un axe vertical et une droite de front Δ, Δ' ; dans le plan de front de l'axe on donne une parallèle à la ligne de terre. Cette parallèle et l'axe vertical sont les axes de deux hyperboloïdes de révolution de génératrice Δ, Δ'. Intersection des deux surfaces.

5431. — Intersection d'un paraboloïde hyperbolique défini par deux génératrices et un plan directeur vertical, qui est le plan vertical de projection, avec un paraboloïde de révolution à axe vertical.

5432. — Intersection de deux paraboloïdes hyperboliques qui ont même plan directeur, horizontal, et qui sont en outre définis chacun par deux génératrices, A, A', B, B' pour le premier ; A, A', C, C' pour le second.

5433. — Intersection de deux paraboloïdes hyperboliques qui ont même plan directeur, horizontal, et dont on connaît pour chacun d'eux une génératrice verticale et une droite quelconque.

5434. — Intersection d'un ellipsoïde à axe vertical et d'un paraboloïde à plan directeur horizontal qui a pour axe l'axe pour génératrice et dont on connaît une autre génératrice.

5435. — On donne un tore à axe vertical. Tracer un plan de bout bitangent au tore.

5436. — Soit un axe de front et un cercle dans le plan horizontal. On fait tourner ce cercle autour de l'axe. Il engendre une surface dont on demande la section par un plan vertical donné.

5437. — Soit un tore à axe vertical. Projections horizontales des points du tore dont on donne la projection verticale. Plan tangent en un point. Intersection du tore et de ce plan.

5438. — Contours apparents d'un tore engendré par un cercle tournant autour d'un axe de front et situé dans le plan de front de cet axe.

5439. — On donne un tore à axe vertical et un cône qui a pour sommet un point de son axe et dont la base située dans un plan de bout P'xQ se projette suivant un cercle. Intersection du tore et du cône

5440. — Dans le plan horizontal de cote 0 on donne une droite Δ et un cercle ; tracer quelques génératrices d'un cône de révolution. Intersection de ce cône et du tore engendré par le cercle tournant autour de Δ.

5441. — On donne un tore à axe vertical et un paraboloïde qui a pour plan directeur le plan horizontal de projection et dont deux génératrices sont l'une l'axe du tore, l'autre une droite donnée. Intersection des deux surfaces.

5442. — On donne un tore à axe vertical. Tracer une sphère bitangente au tore et dont le centre soit dans le plan de front de l'axe du tore. Intersection des deux surfaces.

5443. — Ombre propre et ombre portée sur le plan horizontal d'une sphère de centre O, O', la direction des rayons lumineux étant de front.

5444. — On donne un cylindre horizontal dont la base est un cercle du plan vertical, et un cône de révolution ayant pour base un cercle du plan horizontal. Ombres propres des deux surfaces ; ombres portées sur le plan horizontal, les rayons lumineux étant de front.

5445. — On donne un hyperboloïde de révolution à axe vertical, limité à deux plans horizontaux. Ombre propre et ombres portées sur les plans de projection, la lumière ayant une direction donnée.

CONCOURS DE 1910

ÉCOLE SUPÉRIEURE D'AÉRONAUTIQUE ET DE CONSTRUCTION MÉCANIQUE

PREMIÈRE SESSION

Mathématiques.

I. — En supposant arc sin x compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, calculer la dérivée de la fonction

$$y = \mathrm{L}\,\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arcsin x}{x}.$$

II. — Intégrer l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2+y^2}$.

III. — **1936.** Étant donné un parallélogramme OACB, on prend, sur OA et OB, deux points, P et Q, tels que l'on ait $OP \times OQ = AP \times QB$:

1° Trouver le lieu de l'intersection M des droites PB, QA ;

2° Démontrer que le cercle circonscrit au triangle OPQ passe par un point fixe ;

3° On mène par le point P la parallèle PD à OC ; par le point A la parallèle AD à PQ, et, par le point D la parallèle DE à OA, qui coupe PQ en un point E dont on demande le lieu ;

4° Trouver le lieu du centre du premier lieu, lorsque AB pivote autour d'un point H, ou se déplace parallèlement à une direction donnée ;

5° Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées au premier lieu, par le point H ;

6° Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées à ce même lieu parallèlement à l'une des droites OA, OB, AB.

Calcul logarithmique.

Résoudre un triangle connaissant les trois côtés.

QUESTION PROPOSÉE

1937. — Le lieu des milieux des cordes interceptées sur une cissoïde droite par une sécante de direction fixe est une cubique. 1° Si la direction fixe est perpendiculaire à l'asymptote, la cubique est du genre cissoïde, et l'aire comprise entre cette cubique et son asymptote est la moitié de l'aire analogue de la cissoïde donnée. 2° Construire la cubique lorsque la direction fixe est inclinée à 45° sur l'asymptote.

E.-N. BARISIEN.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

21e Année. Mai 1911. N° 8.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

CONDITIONS POUR QU'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE AIT TOUTES SES RACINES NÉGATIVES OU A PARTIE RÉELLE NÉGATIVE (*Fin.*)

par M. **A. Liénard**, professeur à l'Ecole des Mines de Paris.

E. *Calcul de la fonction $\varphi(\alpha)$ pour les équations de tout degré. Importance prépondérante du terme* $\varphi(0)$. *Simplifications possibles.* — Je poserai, pour simplifier l'écriture,

$$\varphi(\alpha) = A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \cdots + \alpha^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Voyons d'abord comment on peut calculer le coefficient $A_0 = \varphi(0)$, puis déduire de la connaissance de A_0 celle du polynome complet $\varphi(\alpha)$.

Groupons dans $f(x)$ les termes impairs d'une part et les termes pairs d'une autre part. Mettant x en facteur dans les termes impairs, on peut écrire

$$f(x) = xf_1(x^2) + f_2(x^2).$$

Je dis que A_0 est égal au résultant R, pris avec un signe convenable, des deux équations

$$(5) \qquad f_1(z) = 0, \qquad f_2(z) = 0.$$

Pour l'établir, je vais démontrer que si les polynomes f_1 et f_2 ont une racine commune, A_0 est nul, et réciproquement [1].

Soit z_0 une racine qui soit commune aux équations (5). Les polynomes $f_1(x^2)$ et $f_2(x^2)$ sont divisibles l'un et l'autre par $x^2 - z_0$, et $f(x)$ également. $f(x)$ admet alors les deux racines $\pm\sqrt{z_0}$ dont la somme est nulle et $\varphi(\alpha)$ a une racine nulle, ce qui exige $A_0 = 0$.

Réciproquement, si $A_0 = 0$, $\varphi(\alpha)$ a une racine nulle et $f(x)$ admet deux racines égales et de signes contraires. Soient x_0 et $-x_0$ leurs valeurs. On a

$$0 = f(x_0) = x_0 f_1(x_0^2) + f_2(x_0^2), \qquad 0 = f(-x_0) = -x_0 f_1(x_0^2) + f_2(x_0^2),$$

d'où, en supposant $x_0 = 0$, $\qquad f_1(x_0^2) = 0, \qquad f_2(x_0^2) = 0,$

et x_0^2 est racine commune de $f_1(z)$ et de $f_2(z)$. Si x_0 était nul, $f(x)$ admettrait zéro comme racine double, a_{n-1} et a_n seraient nuls et les polynomes f_1 et f_2 n'ayant pas de termes constants auraient encore en commun la racine 0.

Or la condition nécessaire et suffisante pour que deux polynomes f_1 et f_2 aient une racine commune est que leur résultant soit nul. On voit donc que R et le coefficient A_0, qui sont des polynomes en a_1, a_2, ..., a_n qui s'annulent ou diffèrent de zéro pour les mêmes systèmes de valeurs de $a_1, a_2, \ldots$, ne peuvent différer que par un facteur numérique.

---

[1] D'une manière plus générale, si les polynomes f_1 et f_2 ont p racines communes, les p coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$ sont nuls, mais la réciproque n'est plus obligée dès que $p > 1$.

Le résultant R pris sous la forme de Sylvester est représenté par le déterminant à $n-1$ lignes et $n-1$ colonnes

$$\begin{vmatrix}
a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & & & & & \\
 & a_1 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-3} & & & & & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
 & & & & & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} \\
1 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot & a_{n-2} & a_{n-4} & & & & & \\
 & 1 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
 & & & & 1 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-2}
\end{vmatrix}$$

(J'ai supposé n pair, pour fixer les idées.)

Mais pour éviter d'avoir un rapport $\frac{R}{A}$ qui soit tantôt positif, tantôt négatif, suivant la valeur de n, il est préférable de modifier l'ordre des lignes en mettant alternativement une ligne commençant par a_1 et une ligne commençant par 1.

Je poserai donc (et cela d'une façon générale sans avoir à me préoccuper de la parité de n)

$$(6) \qquad R = \begin{vmatrix}
a_1 & a_3 & \cdot & \cdot & & & & & \\
1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
 & a_1 & a_3 & \cdot & \cdot & & & & \\
 & 1 & a_2 & a_4 & \cdot & & & & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
 & & & & & a_1 & & & \\
 & & & & & \cdot & a_{n-3} & & \\
 & & & & & & a_1 & a_3 & \\
 & & & & & & \cdot & \cdot & a_{n-1}
\end{vmatrix}$$

On remarque que la diagonale principale est égale à $a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1}$. C'est le seul terme de cette forme.

Si on fait $a_n = 0$, la dernière colonne ne contient plus que le terme a_{n-1}, et R se réduit au produit de a_{n-1} par le mineur correspondant R′ (R′ est ce que devient le mineur après remplacement de a_n par zéro). On peut donc écrire

$$(7) \qquad R = a_{n-1} R' + a_n \cdot \text{Fonct.}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$$

R′ n'est autre que le résultant correspondant à R pour l'équation

$$(8) \qquad x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2} = 0,$$

obtenue en remplaçant a_n par zéro dans l'équation $f(x) = 0$ et supprimant le facteur x.

Or, si on appelle A'_0 la quantité correspondant à A_0 pour l'équation (8), je dis que l'on peut écrire de même

$$(9) \qquad A_0 = a_{n-1} A'_0 + a_n \cdot \text{Fonct.}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}).$$

Pour justifier l'equation (9) il suffit de montrer qu'en faisant tendre a_n vers zéro et passant à la

limite, on a

$$\lim A_n = a_{n-1} A'_0.$$

Soit x_n la racine de $f(x)$ qui tend vers zéro avec a_n. En mettant x_n en évidence on peut écrire

$$A_0 = \prod_1^{n-1} (-x_i - x_n) \times \prod_1^{n-1} (-x_i - x_n),$$

$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ étant les racines de $f(x)$ autres que x_n.

La limite du premier produit est a_{n-1}, car à la limite x_n est nul et $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sont racines de (8). De même la limite du second produit est A'_0. L'équation (9) est établie.

La comparaison des équations (7) et (9) montre que le rapport $\frac{A_0}{R}$, que nous savions déjà indépendant des valeurs particulières de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pour une valeur donnée du degré de l'équation, est aussi indépendant de ce degré n. Or on vérifie immédiatement pour $n = 2$ ou 3 que ce rapport est égal à 1. Il lui est donc toujours égal et la formule (6) donne la valeur de A_0 aussi bien que de R.

Une fois A_0 obtenu en fonction des coefficients a, voyons comment on pourra en déduire $\varphi(\alpha)$. Quand on change dans $f(x)$ x en $x + \varepsilon$, on obtient une équation de même degré pour laquelle on déterminera exactement comme pour f le A_0 correspondant. La valeur obtenue est fonction de ε et je dis qu'elle est précisément égale à $\varphi(2\varepsilon)$, de telle sorte qu'il suffira de changer dans le résultat ε en $\frac{\alpha}{2}$ pour avoir $\varphi(\alpha)$.

En effet, changer dans f x en $x + \varepsilon$ revient à diminuer de ε toutes les racines de $f(x)$. Les sommes deux à deux de ces racines sont diminuées de 2ε et par suite la nouvelle équation aux sommes deux à deux des racines diffère de l'ancienne par le changement de α en $\alpha + 2\varepsilon$. La nouvelle équation est donc $\varphi(\alpha + 2\varepsilon) = 0$ dont le terme indépendant de α, c'est-à-dire le nouvel A_0, est $\varphi(2\varepsilon)$.

Les méthodes exposées permettent dans tous les cas le calcul de la fonction $\varphi(\alpha)$; mais les calculs pour passer de A_0 à $\varphi(\alpha)$ sont fort pénibles et il y aurait tout intérêt à les éviter et à faire la discussion du signe des racines de $f(x)$ sur A_0 seul. Je ne suis pas parvenu à des résultats complets à cet égard. Aussi me bornerai-je à quelques indications sur la voie où il conviendrait d'engager les recherches.

Considérons, pour la commodité du langage, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ comme les coordonnées d'un point M dans un espace à n dimensions. Lorsqu'on déplace le point M d'une façon continue, les racines de $f(x)$ varient d'une façon continue. Il pourra se faire que des racines réelles deviennent imaginaires ou réciproquement ; mais ce passage ne produit pas de changement de signe de la partie réelle. Il n'y aura un tel changement de signe que si une racine réelle change de signe en passant par zéro, auquel cas a_n s'annulera, ou encore si le même fait se produit pour une partie réelle d'une racine imaginaire. Au passage par zéro de la partie réelle, l'équation admettra une racine purement imaginaire βi, et on aura

$$0 = f(\beta i) = \beta i f_1(-\beta^2) + f_2(-\beta^2),$$

et, en annulant séparément les parties réelle et imaginaire,

$$f_1(-\beta^2) = 0, \qquad f_2(-\beta^2) = 0.$$

Les polynomes $f_1(z)$ et $f_2(z)$ ont alors une racine commune et leur résultant R, égal à A_0, est nul.

On ne peut donc quitter la région de l'espace à n dimensions où toutes les racines sont négatives ou à parties réelles négatives sans traverser une des deux surfaces

$$(10) \qquad a_n = 0, \qquad A_0 = 0.$$

La région de l'espace où doit se trouver le point M pour répondre au problème posé au début de cette étude est donc limitée uniquement par ces deux surfaces (10), et toute la question revient à discuter comment ces deux surfaces divisent l'espace en régions. On se rend ainsi compte que l'étude de A_0 seul doit permettre de résoudre le problème posé sans avoir besoin d'effectuer le calcul des coefficients

A_1, A_2, etc. C'est ainsi que j'ai pu obtenir les conditions données plus haut pour l'équation du sixième degré.

En étudiant les propriétés des déterminants R pour les cinq premiers degrés, j'ai reconnu que les conditions trouvées impliquaient que, non seulement ces déterminants eux-mêmes, mais leurs mineurs de tous ordres soient positifs et réciproquement. Il serait intéressant de savoir si la propriété est générale. Dans l'affirmative, le calcul de $\varphi(x)$ serait rendu complètement inutile.

SUR L'EMPLOI DE LA RÈGLE A CALCUL AUX EXAMENS

par **M. A. Sainte-Lagüe**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Douai.

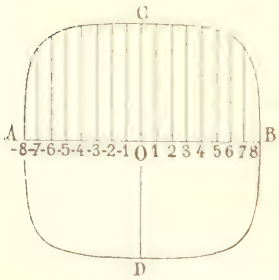
Il est important, pour l'épreuve de calcul de l'examen d'entrée à l'Ecole polytechnique, de disposer avec soin les calculs faits avec la règle, non pas seulement pour l'aspect général de la composition, mais surtout parce que des calculs bien disposés sont plus vite faits, le travail s'effectuant de façon méthodique. Dans l'exemple que l'on trouvera ci-dessous, le tableau numérique a été rédigé non par lignes horizontales, mais bien par colonnes verticales. Le lecteur apercevra aisément les avantages de cette méthode. On a, en effet, beaucoup plus vite achevé de calculer deux racines quatrièmes à la suite l'une de l'autre, puis d'effectuer deux multiplications, que d'extraire une racine quatrième, puis de faire une multiplication, pour revenir à une racine quatrième, et terminer par une multiplication. Est-il besoin d'ajouter que les erreurs de calcul peuvent être moins nombreuses, les calculs étant plus rapides ?

Je tiens à donner encore un conseil pratique qui me semble important. Il n'est pas prudent pour un candidat, qui n'est pas toujours bien familiarisé avec le maniement de la règle, de vouloir retrouver la technique d'une opération (racine cubique, logarithme, cologarithme, sinus, cosinus, tangente,...) par des considérations théoriques. Ce sont des choses que l'on ne retrouve guère un jour d'examen. Il vaut mieux appliquer le procédé suivant. Pour une racine cubique, par exemple, on cherche, à l'aide de ses souvenirs, quelle est la position la plus commode de la réglette qui permet de former le cube de 2, soit 8, puis de 3, soit 27 et enfin de 5, soit 125. Il y a en effet trois cas à distinguer, et il serait insuffisant de se borner à considérer les chiffres significatifs indépendamment de la place de la virgule ($\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{80} = 4{,}31$; $\sqrt[3]{800} = 9{,}28$). Si maintenant on veut la racine cubique de 178, on cherchera celle de 125 qui est 5, et un faible déplacement de la réglette donnera la racine de 178, que l'on ne confondra pas ainsi avec celle de 17,8 ou de 1,78. On procéderait de façon analogue pour la recherche directe d'une racine quatrième, celle d'un cologarithme, etc.

Il est donc bon de savoir par cœur quelques résultats simples tels que les suivants :

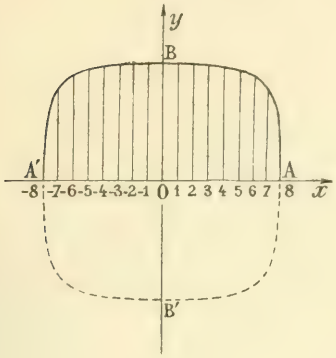
$$2^2 = 4, \quad 4^2 = 16, \quad 2^3 = 8, \quad 3^3 = 27, \quad 5^3 = 125, \quad 1{,}414^4 = 4,$$
$$2^4 = 16, \quad 5^4 = 625, \quad 8^4 = 4096,$$

$$\log 2 = 0{,}301, \quad \sin 30^\circ = 0{,}5, \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577, \text{ etc.}$$



Comme exemple de calcul à la règle nous allons chercher l'aire de la courbe fermée $x^4 + y^4 = 2$, courbe représentée ci-contre. Pour cela, nous emploierons successivement les méthodes des trapèzes et de Simpson, en divisant chaque fois l'intervalle AB en 16 parties égales. Nous appliquerons également la méthode de Tchebitcheff [1] à cette aire, puis nous comparerons les résultats obtenus par ces trois méthodes.

[1] La méthode de Tchebitcheff, bien supérieure pour un même nombre d'ordonnées à toutes les autres, consiste à tracer de part et d'autre de OC (que cette droite soit ou non axe de symétrie) des abscisses égales à 0,267 a, 0,422 a, 0,866 a, en désignant par a : OA = OB. L'aire de la courbe située au-dessus de AB est donnée par le produit par $2a$ de la moyenne des six ordonnées.



Aire de la courbe $x^4 + y^4 = 2$:

Méthode des trapèzes. — Méthode de Simpson.

Calcul des abscisses : $OA = OA' = OB = OB' = \sqrt[4]{2} = a.$

$$x_0 = 0, \qquad a = 1{,}189.$$

$$x_1 = x_{-1} = \frac{a}{8} = 0{,}148, \qquad x_5 = x_{-5} = \frac{5a}{8} = 0{,}742,$$

$$x_2 = x_{-2} = \frac{2a}{8} = 0{,}297, \qquad x_6 = x_{-6} = \frac{6a}{8} = 0{,}891,$$

$$x_3 = x_{-3} = \frac{3a}{8} = 0{,}445, \qquad x_7 = x_{-7} = \frac{7a}{8} = 1{,}040,$$

$$x_4 = x_{-4} = \frac{4a}{8} = 0{,}594, \qquad x_8 = x_{-8} = a = 1{,}189.$$

Calcul des ordonnées : $y = \sqrt[4]{2 - x^4}$.

Rang	Abscisses x	x^4	$2 - x^4$	Ordonnées y	Ordonnées de rangs impairs
0	0	0	2	1,189	
1 et — 1	0,148	0,000	2	1,189	1,189
2 et — 2	0,297	0,008	1,992	1,189	
3 et — 3	0,445	0,039	1,961	1,188	1,188
4 et — 4	0,594	0,124	1,876	1,170	
5 et — 5	0,742	0,304	1,696	1,141	1,141
6 et — 6	0,891	0,631	1,369	1,082	
7 et — 7	1,040	1,170	0,830	0,955	0,955
8 et — 8	1,189	2	0	0	
		Totaux		9,103	4,473

Formule des trapèzes, où A désigne l'aire totale :

$$A = \frac{2a}{16}(y_{-8} + 2y_{-7} + \cdots + 2y_0 + \cdots + 2y_7 + y_8),$$

$$A = \frac{a}{4}(y_{-8} + y_{-7} + \cdots + y_0 + \cdots + y_7 + y_8) \qquad (y_8 = y_{-8} = 0),$$

$$A = \frac{a}{2}\left(y_0 + y_1 + \cdots + y_7 + y_8 - \frac{y_8}{2}\right) = 0{,}594\,(9{,}103 - 0{,}594),$$

$$A = 0{,}594 \times 8{,}509 = 5{,}07.$$

Formule de Simpson :

$$A = \frac{2a}{8}(P + I) + \frac{2a}{3 \times 8}(I - P), \quad \text{puisque } y_8 = y_{-8} = 0.$$

$$A = \frac{a}{12}(4I + 2P) = \frac{a}{3}\left(\frac{I + P}{2} + \frac{I}{2}\right) = 0{,}396\,(9{,}103 + 4{,}473 - 0{,}594),$$

$$A = 0{,}396 \times 12{,}982 = 5{,}13.$$

Voici les calculs relatifs à la méthode de Tchebitcheff :

$$x_1 = x_{-1} = 0{,}267a = 0{,}316,$$
$$x_2 = x_{-2} = 0{,}422a = 0{,}502,$$
$$x_3 = x_{-3} = 0{,}866a = 1{,}03$$

$$y_1 + y_{-1} = 1{,}189$$
$$y_2 + y_{-2} = 1{,}180$$
$$y_3 + y_{-3} = 0{,}967$$
$$\text{Total.} \quad 3{,}336$$

$$A = \frac{4a}{6}(y_{-3} + y_{-2} + y_{-1} + y_1 + y_2 + y_3) = \frac{4a}{3}(y_1 + y_2 + y_3),$$

$$A = \frac{4 \times 1{,}189 \times 3{,}336}{3} = 5{,}28.$$

Voici, pour terminer, quelques exercices que l'on pourra faire avec la règle à calcul. Ils sont d'ailleurs de longueurs inégales :

1. — Résoudre l'équation : $t - \sin t = 2$.

2. — Résoudre l'équation $2^x = 3x$.

3. — Calculer $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}$.

4. — Calculer les premiers termes de la série à termes positifs définie par la formule de récurrence :

$$9u^2 - 6u_{n+1} - u_{n+2} = 0,$$

qui donne u_n en fonction des deux termes précédents. On a de plus $u_0 = u_1 = 1$.

5. — On considère la ligne polygonale dont les sommets ont pour abscisses $\frac{p}{23}$, p étant un entier qui va de 0 à 23 (y compris les valeurs extrêmes) ; les ordonnées sont les nombres de combinaisons C_{23}^p multipliés par un facteur q de proportionnalité, tel que l'ordonnée maximum soit égale à 1. Calculer les coordonnées de chaque sommet, et en déduire le rang du côté dont la pente est maximum.

SUR LE RAYON DE COURBURE DE LA LEMNISCATE

par **M. O.**

La construction du rayon de courbure de la lemniscate donnée p. 130 est manifestement fausse, puisqu'elle tendrait à placer le centre de courbure répondant à l'un ou à l'autre des sommets A et A′ au centre O.

En suivant la marche proposée par l'auteur, il suffisait d'appliquer la formule bien connue liant les rayons de courbure R et R′ qui correspondent aux points inverses M et M′, savoir

$$\frac{N}{R} + \frac{N}{R'} = 2.$$

où N et N′ représentent les normales polaires (limitées à la perpendiculaire élevée en O au vecteur OM). Or on sait que dans l'hyperbole équilatère, $\frac{N}{R'} = -1$. Il vient donc

$$\frac{N}{R} = 3$$

formule qui montre que *le rayon de courbure en* M *est le tiers de la normale polaire en ce point*. On en déduit que *la projection orthogonale du centre de courbure répondant au point* M *sur le rayon vecteur* OM *est au tiers de ce rayon vecteur à partir du point* M, résultat connu.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Concours de 1910 (*Suite*).

Groupe II.

1886. — *On donne deux axes coordonnés rectangulaires* Ox, Oy *et une droite* (D) *parallèle à l'axe* Oy.

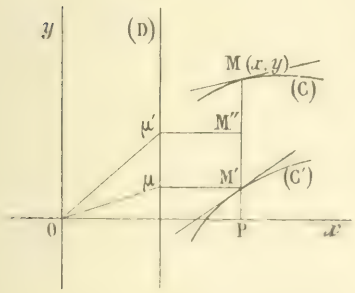
A chaque point M *d'une courbe* (C), *située dans le plan des deux axes, on fait correspondre un point* M′, *de même abscisse que le point* M, *par la condition que la parallèle menée par l'origine à la tangente en* M *à la courbe* (C) *et la parallèle à l'axe* Ox *menée par le point* M′ *se rencontrent sur la droite* (D). *Soit* (C′) *le lieu décrit par le point* M′ *quand le point* M *décrit la courbe* (C). *Soit* M″ *le point qui se déduit du point* M′ *comme le point* M′ *se déduit du point* M, *en remplaçant toutefois la courbe* (C) *par la courbe* (C′).

Déterminer la courbe (C) :

1° *De manière qu'elle passe par l'origine et que la longueur* MM′ *soit égale à une ligne donnée ;*

2° *De manière qu'elle passe par l'origine, qu'elle y soit tangente à la bissectrice de l'angle* xOy *et que la longueur* MM″ *soit égale à une ligne donnée.*

La pente de la courbe (C) en $M(x, y)$ étant y', la parallèle menée de O à la tangente, $y = y'x$, coupe la droite (D), $x - d = 0$, au point $\mu(d, dy')$. Les coordonnées du point M′ sont alors $X = x$, $Y = dy'$.



Si on suppose que M′ décrive une courbe (C′), la pente de cette courbe en M′ est $\frac{dY}{dX} = dy''$; on trouve alors comme précédemment que les coordonnées de M″ sont $X = x$, $Y = d^2y''$.

1° Comme $\overline{MM'} = \overline{MP} + \overline{PM'}$, on a

$$dy'' - y = l. \tag{1}$$

L'équation différentielle de la courbe (C) est du premier ordre, linéaire et à coefficients constants ; l'équation sans second membre, dont l'équation caractéristique est $r - \frac{1}{d} = 0$, admet pour intégrale générale la fonction $y_1 = Ce^{\frac{x}{d}}$ comme l'équation complète (1) admet l'intégrale particulière $y = -l$, l'intégrale générale est

$$y = Ce^{\frac{x}{d}} - l. \tag{α}$$

La courbe (C) considérée devant passer par l'origine, on a $C = l$ et son équation est finalement

$$y = l(e^{\frac{x}{d}} - 1).$$

2° Dans ce cas, l'équation différentielle de la courbe (C) est

$$d^2y'' - y = l. \tag{2}$$

Cette équation admet l'intégrale particulière $y = -l$ et l'équation sans second membre admet pour intégrale générale $y_1 = Ae^{\frac{x}{d}} + Be^{-\frac{x}{d}}$.

Par suite, l'intégrale générale de l'équation (2) est

$$y = Ae^{\frac{x}{d}} + Be^{-\frac{x}{d}} - l. \tag{3}$$

La courbe (C) passant à l'origine, on a $A + B = l$; de plus, la pente en ce point étant 1, on a, comme $y' = \frac{1}{d}(Ae^{\frac{x}{d}} - Be^{-\frac{x}{d}})$, $A - B = d$.

Par suite, $A = \frac{l+d}{2}$, $B = \frac{l-d}{2}$ et la courbe cherchée est

$$y = \frac{l+d}{2} e^{\frac{x}{d}} + \frac{l-d}{2} e^{-\frac{x}{d}} - l.$$

Remarques. — Les courbes de la famille (α) sont comprises dans les courbes de la famille (β). La logarithmique d'Huygens, $y = de^{\frac{x}{d}} - l$, fait partie de la famille (α) ; d'ailleurs, l'équation générale des courbes de cette famille peut s'écrire $y = \lambda . de^{\frac{x}{d}} - l$, ce qui montre que les courbes (α) peuvent se déduire de la logarithmique $y = de^{\frac{x}{d}}$ par une affinité d'axe Ox et de puissance arbitraire λ, suivie d'une translation $-l$ parallèle à Oy. On peut ajouter enfin que la chainette fait partie de la famille (β).

J. SOUBAIGNÉ, à Mont-de-Marsan.

Bonnes solutions : MM. P. Salleron, à Albi ; A. Rousseau, à Fournes ; Michel Félicien, à Lainage ; G. Lach, à Rodez ; Amblard, à Ruines ; L. Simon, à Fourmies ; Nevejans ; L. Perrin, à Trévoux ; A. Laugagne, à Lyon ; G. Fougry, à Roanne.

1887. — *On considère le mouvement défini par les équations*

$$x = 3a\cos t - a\cos 3t, \qquad y = 3a\sin t + a\sin 3t, \qquad z = 3a^2\cos 2t,$$

où t désigne le temps et a un paramètre constant. Déterminer la vitesse et l'accélération.

La trajectoire est une courbe fermée ; quelle est sa longueur ? Déterminer a de façon que cette longueur soit égale à 3π. (On se bornera à calculer deux décimales.)

Les projections de la vitesse V et de l'accélération J sur les axes sont

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 3a(a^2\sin 3t - \sin t), \qquad J_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 3a(3a^2\cos 3t - \cos t),$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = 3a(a^2\cos 3t + \cos t), \qquad J_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -3a(3a^2\sin 3t + \sin t),$$

$$V_z = \frac{dz}{dt} = -6a^2\sin 2t, \qquad J_z = \frac{d^2z}{dt^2} = -12a^2\cos 2t.$$

Par suite, comme $V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$, nous avons

$$V^2 = 9a^2[(a^2\sin 3t - \sin t)^2 + (a^2\cos 3t + \cos t)^2 + 4a^2\sin^2 2t], \qquad \text{puis} \qquad V = 3a(a^2+1).$$

De même,

$$J^2 = 9a^2[(3a^2\cos 3t - \cos t)^2 + (3a^2\sin 3t + \sin t)^2 + 16a^2\cos^2 2t], \qquad J = 3a\sqrt{(3a^2+1)^2 + 4a^2\cos^2 2t}.$$

Les expressions des coordonnées en fonction du temps sont périodiques, la période commune étant 2π ; par suite, la trajectoire est une courbe fermée ; elle est décrite en entier pendant une période.

D'autre part, ds désignant la différentielle de l'arc, on a $V = \frac{ds}{dt}$ ou $s = \int V dt + s_0$.

Dans le cas actuel, le périmètre de la courbe est $l = 3a(a^2+1)\int_0^{2\pi} dt = 6\pi a(a^2+1)$.

Dans l'hypothèse $l = 3\pi$, on a l'équation $f(a) = a^3 + a - 0,5 = 0$.

On reconnaît sans peine que cette équation admet une seule racine réelle, comprise entre 0 et 1 ; en effet,

$$f(0) = -0,5, \qquad f(1) = 1,5.$$

Cette racine semble plus près de 0 que de 1 ; formons $f(0,4)$:

$$f(0,4) = 0,064 + 0,4 - 0,5 = -0,036.$$

La racine est supérieure à 0,4 ; formons $f(0,5)$: $f(0,5) = 0,125 + 0,5 - 0,5 = 0,125$.

La racine est donc comprise entre 0,4 et 0,5. Nous appliquons maintenant les méthodes d'approximations. On a $f''(a) = 6a$; ce nombre est du signe de $f(0,5)$ dans l'intervalle ; nous appliquons donc la méthode de Newton à 0,5 et celle des parties proportionnelles à 0,4 ; on remplace 0,5 par

$$0,5 - \frac{f(0,5)}{f'(0,5)} = 0,5 - \frac{0,125}{3 \times 0,25 + 1} = 0,5 - \frac{1}{14} = 0,42857\ldots$$

et on remplace aussi 0,4 par

$$\frac{0,4 \times f(0,5) - 0,5 \times f(0,4)}{f(0,5) - f(0,4)} = \frac{0,4 \times 0,125 + 0,5 \times 0,036}{0,125 + 0,036} = 0,422\ldots$$

Par suite,

$$a = 0,42 \quad \text{à} \quad \frac{1}{100} \quad \text{par défaut.}$$

J. SOUBAIGNÉ.

Bonnes solutions : MM. P. Salleron, à Albi ; Nevejans ; Ambiard, à Ruines ; G. Lach, à Rodez ; A. Rousseau, à Fourmies ; L. Simon, à Fourmies ; A. Laucagne, à Lyon ; Michel Felicien, à Lainage.

Groupe I (1).

1888. — *Un appareil, destiné à servir d'électromètre, est constitué par deux plateaux circulaires, verticaux et parallèles, l'un* A *fixe, l'autre* B *suspendu par deux fils égaux et parallèles* MN, M'N' *(voir la figure ci-jointe). Le plateau* B *a un rayon de* 10 *centimètres ;* A *est notablement plus grand. Les fils de suspension ont* 1 *mètre de long ; l'ensemble du système qu'ils supportent pèse* 200 *grammes. La distance des deux plateaux est de* 1 *centimètre lorsqu'ils sont au même potentiel,* B *étant au repos. L'accélération des corps en chute libre est*

$$g = 980 \text{ unités C.G.S.}$$

1. *On établit entre les deux plateaux une différence de potentiel de* V *volts. Les deux plateaux se rapprochent et, lorsque l'équilibre est établi, leur distance devient* x. *Trouver la relation qui lie* V *et* x. *Représenter cette relation par une courbe.*

2. *Quelle différence de potentiel faut-il établir entre les deux plateaux pour que le déplacement de* B *atteigne* 1 *millimètre ?*

3. *Montrer qu'à chaque valeur de* V *correspondent deux positions d'équilibre, mais qu'une seule est stable. Montrer que, si la différence de potentiel dépasse une certaine limite, il n'y a plus de position d'équilibre ; trouver cette limite et la position d'équilibre correspondante. Qu'arrive-t-il si la différence de potentiel dépasse la limite qu'on vient de trouver ?*

4. *Ayant établi une différence de potentiel* V *assez faible pour qu'il y ait une position d'équilibre stable, définie par une distance* x *des deux plateaux, on fait osciller* B, *comme un pendule, de quantités infiniment petites de part et d'autre de cette position. Calculer la période de ce mouvement. Indiquer comment elle varie lorsque l'on donne diverses valeurs à* V.

On traitera cette quatrième partie en faisant successivement les deux hypothèses suivantes :

1° *La différence de potentiel* V *est maintenue invariable pendant les oscillations ;*

2° *Ayant établi la différence de potentiel* V, *on laisse le plateau* B *prendre sa position d'équilibre, puis on isole complètement les deux plateaux et, alors seulement, on fait osciller* B.

Nota. — *On raisonnera comme si le champ électrique était uniforme jusqu'au bord de* B.

D'après la construction de l'appareil, les fils de suspension ne peuvent faire qu'un très petit angle avec la verticale. On fera, dès le début des calculs, les simplifications qui résultent de ce fait.

1. Soit σ la densité électrique superficielle qui résulte, sur chaque plateau, de la différence de potentiel V. La force qui sollicite le plateau mobile horizontalement est $f = 2\pi\sigma^2 a$. D'autre part on a

(1) La solution du problème de physique du groupe II a paru antérieurement (t. I, p. 195).

pour la distance x, $4\pi\sigma x = V$, d'où, en éliminant σ et remplaçant s par $\pi \times \overline{10}^2$,

$$f = \frac{100}{8}\,\frac{V^2}{x^2}.$$

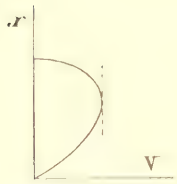
Décomposons le poids mg en une force ayant la direction des fils et une autre f' horizontale. En raison de la faible inclinaison des fils, on peut écrire

$$\frac{f'}{mg} = \frac{1-x}{100}, \qquad f' = 1960\,(1-x) = 2g\,(1-x).$$

Il y a équilibre si $f = f'$, ce qui conduit à

$$V = \frac{2}{5}\sqrt{g}\,x\sqrt{1-x},$$

relation représentée par la courbe ci-contre, dont les points remarquables correspondent aux valeurs particulières suivantes :



$$x = 0, \qquad V = 0, \qquad \frac{dV}{dx} = \frac{2}{5}\sqrt{g};$$

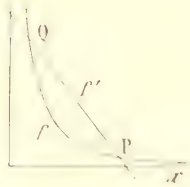
$$x = \frac{2}{3}, \qquad V = \text{max}., \qquad \frac{dV}{dx} = 0;$$

$$x = 1, \qquad V = 0, \qquad \frac{dV}{dx} = -\infty.$$

2. Quelle différence de potentiel correspond à un déplacement de $0^{cm},1$? Faisons $x = 0{,}9$, $1 - x = 0{,}1$. Il vient

$$V = 3{,}564\,\text{C.G.S.} = 1069 \text{ volts}.$$

3. La forme de la courbe qui représente la relation entre x et V montre que, pour une valeur de V, il y a deux valeurs de x, donc deux positions d'équilibre. Représentons d'autre part les fonctions $f = \frac{100}{8}\frac{V^2}{x^2}$ et $f' = 2g(1-x)$, la première par une courbe, la seconde par une droite. Les points d'intersection P et Q correspondent aux positions d'équilibre. Or, seule la position correspondant à P, c'est-à-dire à la plus grande valeur de x, est stable : en effet, si on diminue x à partir de P, f' l'emporte sur f ; en Q ce serait le contraire.



La valeur maximum de V, fournissant une position d'équilibre, correspond à $x = \frac{2}{3}$, ce qui donne

$$V = \frac{2}{5}\sqrt{g}\,\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = 4{,}82\,\text{C.G.S.} = 1446 \text{ volts}.$$

Si V dépasse cette limite, le plateau B vient au contact de A.

4. Supposons d'abord la différence de potentiel V invariable. Déplaçons le plateau B infiniment peu de sa position d'équilibre en diminuant x d'une quantité ε. Les forces f et f' prennent respectivement les valeurs

$$f = \frac{100}{8}\,\frac{V^2}{(x-\varepsilon)^2} = \frac{100}{8}\,\frac{V^2}{x^2}\left(1 + 2\frac{\varepsilon}{x}\right), \qquad f' = 2g\,(1 - x + \varepsilon).$$

La force f' devient prépondérante, et la résultante, qui produit l'oscillation, a pour valeur

$$f - f' = 2g(1 - x + \varepsilon) - \frac{100}{8}\,\frac{V^2}{x^2}\left(1 + 2\frac{\varepsilon}{x}\right) = \varepsilon\left(2g - 25\,\frac{V^2}{x^3}\right).$$

Remplaçons V en fonction de x, ce qui est plus simple que de faire l'inverse,

$$f - f' = \varepsilon\,.\,2g\,\frac{3x-2}{x}.$$

La masse mobile étant égale à 200, son accélération tangentielle est

$$\gamma = \varepsilon \cdot \frac{g}{100} \frac{3x - 2}{x}$$

et la durée d'une oscillation simple est

$$t = \pi \sqrt{\frac{100}{g}} \sqrt{\frac{x}{3x - 2}},$$

avec la condition

$$x > \frac{2}{3}.$$

Le facteur $\pi\sqrt{\frac{100}{g}}$ serait la durée d'oscillation sous la seule action de la pesanteur. Quand le potentiel varie de 0 à sa valeur maximum, x varie de 1 à $\frac{2}{3}$ et la fonction qui est sous le second radical varie de 1 à l'infini.

Dans le second cas, σ est constant, puisque la charge est isolée, et la force $f = 2\pi\sigma^2 s$ est constante ; la différence $f' - f$ se réduit à $2g\varepsilon$ et la durée d'oscillation est $t = \pi\sqrt{\frac{100}{g}}$ comme si les plateaux n'étaient pas électrisés. Bien entendu, si l'écart du pendule pouvait ne pas être très petit, il faudrait en tenir compte dans l'expression de l'accélération tangentielle et le résultat serait différent.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

Concours de 1910.

1891. — 1° *Trouver l'équation des courbes C qui admettent l'axe des y comme axe de symétrie et qui satisfont à l'équation différentielle*

$$100\frac{d^6y}{dx^6} - 100\frac{d^2y}{dx^2} + y + 6 = 0.$$

2° *Déterminer les constantes arbitraires* k *par la condition que l'une des courbes,* Γ, *ait avec la courbe un contact du cinquième ordre avec la parabole* $y = \frac{x^2}{6}$, *c'est-à-dire que la différence des ordonnées au voisinage du point de contact soit du sixième ordre par rapport aux abscisses.*

Les constantes arbitraires k *devront être calculées avec trois décimales exactes, c'est-à-dire que l'approximation devra être supérieure à* $\frac{5}{10\,000}$.

1° Écrivons l'équation sous la forme

$$(1) \qquad 100\frac{d^6y}{dx^6} - 100\frac{d^2y}{dx^2} + y = -6,$$

et envisageons l'équation privée de second membre

$$(2) \qquad 100\frac{d^6y}{dx^6} - 100\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

On sait que l'intégrale générale de l'équation (1) s'obtient en ajoutant à l'intégrale générale de l'équation (2) une intégrale particulière de l'équation (1).

On reconnaît immédiatement que $y = -6$ est intégrale de l'équation (1). Tout revient donc à former l'intégrale générale de l'équation (2). Pour cela, nous y remplaçons y par e^{rx}, r étant une con-

stante, et nous obtenons

$$e^{rx}(100r^6 - 100r^2 + 1) = 0.$$

Considérons l'équation caractéristique

$$(3) \qquad 100r^6 - 100r^2 + 1 = 0,$$

et dans cette équation posons $r^2 = u$; nous obtenons

$$(4) \qquad 100u^3 - 100u + 1 = 0.$$

On vérifie aisément que cette équation a ses trois racines réelles et distinctes; l'une est négative, comprise entre -2 et -1, les deux autres positives et comprises dans les intervalles $\left(0, \frac{1}{10}\right)$ et $\left(\frac{1}{10}, 1\right)$. Ces racines sont d'ailleurs incommensurables.

Si nous désignons par α^2, β^2, γ^2 (¹) les trois racines de l'équation (4), les racines de l'équation (3) sont $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\pm\gamma$; elles sont toutes distinctes. On sait que dans ce cas, l'intégrale générale de l'équation (2) est

$$K_1e^{\alpha x} + K_2e^{-\alpha x} + K_2e^{\beta x} + K_2'e^{-\beta x} + K_3e^{\gamma x} + K_3'e^{-\gamma x}.$$

K_1, K_1', ..., K_3' désignant des constantes arbitraires.

On en conclut que l'intégrale générale de l'équation donnée est

$$y = -6 + K_1e^{\alpha x} + K_1'e^{-\alpha x} + K_2e^{\beta x} + K_2'e^{-\beta x} + K_3e^{\gamma x} + K_3'e^{-\gamma x}.$$

Pour que la courbe représentée par cette équation soit symétrique par rapport à Oy, il faut que y ne change pas quand on change x en $-x$; il faut qu'on ait pour cela $K_1' = K_1$, $K_2' = K_2$, $K_3' = K_3$; la valeur de y peut alors s'écrire

$$y = -6 + 2K_1 \operatorname{ch} \alpha x + 2K_2 \operatorname{ch} \beta x + 2K_3 \operatorname{ch} \gamma x.$$

2° Développons y en série entière, nous avons

$$y = -6 + 2K_1\left(1 + \frac{\alpha^2x^2}{2!} + \frac{\alpha^4x^4}{4!} + \frac{\alpha^6x^6}{6!} + \cdots\right) + 2K_2\left(1 + \frac{\beta^2x^2}{2!} + \cdots\right) + \cdots$$

Pour que la courbe correspondante ait à l'origine un contact du cinquième ordre avec la parabole $y_1 = \frac{x^6}{6}$, il faut que dans le développement de y (qui ne contient que des puissances paires de x), le terme indépendant et le coefficient de x^2 soient nuls, et que le coefficient de x^4 soit égal à $\frac{1}{6}$.

On aura donc

$$-6 + 2K_1 + 2K_2 + 2K_3 = 0,$$

$$K_1\alpha^2 + K_2\beta^2 + K_3\gamma^2 = 0,$$

$$\frac{2K_1}{4!}\alpha^4 + \frac{2K_2}{4!}\beta^4 + \frac{2K_3}{4!}\gamma^4 = \frac{1}{6}.$$

$$K_1 + K_2 + K_3 = 3, \qquad K_1\alpha^2 + K_2\beta^2 + K_3\gamma^2 = 0, \qquad K_1\alpha^4 + K_2\beta^4 + K_3\gamma^4 = 2.$$

Résolvons ces équations par rapport à K_1, K_2, K_3. La règle de Cramer nous donne

$$K_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & \beta^2 & \gamma^2 \\ 2 & \beta^4 & \gamma^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha^4 & \beta^4 & \gamma^4 \end{vmatrix}} = \frac{\gamma^2 - \beta^2(3\beta^2\gamma^2 + 2)}{(\gamma^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)} = \frac{3\beta^2\gamma^2 + 2}{\alpha^4 - \alpha^2(\beta^2 + \gamma^2) + \beta^2\gamma^2}.$$

Or α^2, β^2, γ^2 étant les racines de l'équation (4), on a

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0, \qquad \alpha^2\beta^2\gamma^2 = -\frac{1}{100};$$

(¹) L'une des racines est négative, mais cela ne s'oppose pas à l'emploi de la notation choisie.

on en tire $$\beta^2 + \gamma^2 = -\alpha^2, \qquad \beta^2\gamma^2 = -\frac{1}{100\alpha^2}.$$

La valeur de K_1 peut alors s'écrire

$$K_1 = \frac{-\dfrac{3}{100\alpha^2} + 2}{2\alpha^4 - \dfrac{1}{100\alpha^2}} = \frac{200\alpha^2 - 3}{200\alpha^6 - 1}.$$

Mais $100\alpha^6 = 100\alpha^2 - 1$, donc $K_1 = \dfrac{200\alpha^2 - 3}{200\alpha^2 - 3} = 1.$

On aurait de même $K_2 = 1, \qquad K_3 = 1.$

L'équation demandée est donc

$$y = -6 + 2\,\mathrm{ch}\,\alpha x + 2\,\mathrm{ch}\,\beta x + 2\,\mathrm{ch}\,\gamma x.$$

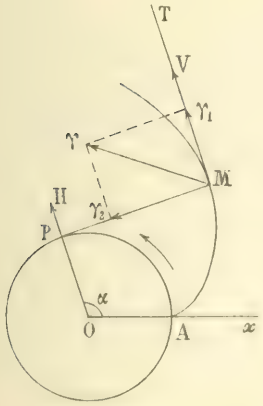
NEVEJANS.

Solutions satisfaisantes par MM. G. Foucry ; Ch. Guillerme ; G. Lach, à Rodez ; André Nicole, à Bordeaux ; J. Sauvage.

1892. — *Un point parcourt une développante de cercle avec une vitesse qui croît proportionnellement au temps. A l'instant initial, il se trouve, sans vitesse, au point de rebroussement de la développante.*

Trouver, à un instant quelconque, l'accélération totale du mouvement. Construire l'hodographe.

Considérons un cercle de centre O et de rayon R, et prenons sur ce cercle une origine A et un sens positif des arcs. Soit P un point quelconque du cercle, défini par l'angle α que fait le rayon OP avec le rayon OA ; sur la tangente au point P et dans le sens négatif nous prenons une longueur PM égale à l'arc AP ou à $R\alpha$.



Le point M décrit une développante du cercle ; la tangente en M à cette courbe est perpendiculaire à MP et le rayon de courbure au point M est égal à MP ou à $R\alpha$.

Cela posé, supposons que le point M décrive la développante avec une vitesse v qui croît proportionnellement au temps. Comme au temps $t = 0$ la vitesse est nulle, on a $v = at$, a étant une constante qu'on peut supposer positive.

L'accélération tangentielle γ_1 est portée sur la tangente MT et est égale à

$$\frac{dv}{dt} = a.$$

L'accélération normale γ_2 est portée sur la normale MP et sa grandeur est égale à

$$\frac{v^2}{MP} \quad \text{ou} \quad \frac{a^2t^2}{R\alpha},$$

puisque MP est le rayon de courbure de la trajectoire au point M.

L'accélération totale γ est la somme géométrique des deux vecteurs γ_1 et γ_2 et comme ces deux sont rectangulaires, on a

$$(1) \qquad \gamma^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = a^2 + \frac{a^2t^2}{R^2\alpha^2}.$$

Il nous reste à calculer α en fonction de t. Remarquons que α est l'angle de la tangente MT avec OA ; si nous désignons par s l'arc de la développante, le rayon de courbure $R\alpha$ est égal à $\dfrac{ds}{d\alpha}$; on a donc

$$ds = R\alpha\,d\alpha.$$

et comme $\frac{ds}{dt} = v = at$, on en déduit $ds = atdt$, et par suite

$$R\alpha d\alpha = atdt.$$

Intégrons, en remarquant que pour $t = 0$, nous avons $\alpha = 0$: nous obtenons

$$R\alpha^2 = at^2 \qquad \text{et} \qquad \alpha = t\sqrt{\frac{a}{R}}.$$

Remplaçons α par cette valeur dans la relation (1), nous avons

$$v^2 = a^2 + \frac{a^2t^2}{R}$$

ou

$$v = a\sqrt{1 + \frac{a}{R}t^2}$$

Si par le point O on mène un vecteur OH équipollent à la vitesse MV, les coordonnées polaires du point H sont

$$r = at, \qquad \theta = \alpha = t\sqrt{\frac{a}{R}}.$$

On en déduit pour équation polaire de l'hodographe

$$r = \theta\sqrt{aR},$$

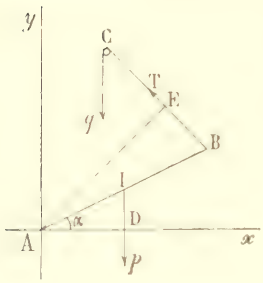
ce qui montre que cette courbe est une spirale d'Archimède.

P. SALLERON, à Albi.

Bonnes solutions par MM. A. Ambrard ; G. Fouché ; Ch. Guillerme ; G. Lach ; Pierre Martin, à Grenoble ; L. Montaut, à Oran ; Névejans ; Louis Perrin, à Trévoux ; A. Rousseau, à Fournes ; Jean Sommaigné, à Mont-de-Marsan.

1893. — *Une tige homogène* AB, *de poids donné* p *et de longueur donnée* l, *est mobile autour de son extrémité* A. *A l'autre extrémité est attaché un fil de masse négligeable, qui passe sur une très petite poulie* C *et supporte un poids* q. *On donne les distances* h *et* k *du point* C *à l'horizontale et à la verticale de* A. *Quel doit être le poids* q *pour que la tige se tienne en équilibre avec une inclinaison donnée ?*

La barre AB a un point fixe A et est soumise à l'action de deux forces : 1° son poids p, appliqué au milieu I de AB, 2° la tension BT du fil, appliquée au point B, et qui est égale au poids q.



Pour que la barre soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des moments de ces forces par rapport au point fixe A soit nulle ; et pour cela on doit avoir d'abord

$$AD \times p = AE \times q,$$

et ensuite les deux forces doivent être dirigées de telle façon qu'elles tendent à faire tourner leurs points d'application en sens contraires autour du point A.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'angle α que fait AB avec l'horizontale Ax soit inférieur à l'angle que fait AC avec Ax ; or celui-ci a pour tangente $\frac{h}{k}$; on doit donc avoir $\operatorname{tg}\alpha < \frac{h}{k}$.

Il nous reste à calculer AD et AE. On a

$$AD = AI\cos\alpha = \frac{l}{2}\cos\alpha.$$

D'autre part AE est la distance du point A à la droite BC. Si l'on prend comme axes de coordonnées l'horizontale Ax et la verticale Ay, les coordonnées du point C sont k et h, celles du point B,

$l\cos\alpha$ et $l\sin\alpha$; donc l'équation de BC s'écrit

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ k & h & 1 \\ l\cos\alpha & l\sin\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou
$$x(h - l\sin\alpha) - y(k - l\cos\alpha) - l(h\cos\alpha - k\sin\alpha) = 0.$$

La distance de l'origine à cette droite est

$$AE = \frac{l(h\cos\alpha - k\sin\alpha)}{\sqrt{(h - l\sin\alpha)^2 + (k - l\cos\alpha)^2}};$$

(on remarquera que $h\cos\alpha - k\sin\alpha$ est positif puisque $\operatorname{tg}\alpha$ est plus petit que $\frac{h}{k}$).

La condition d'équilibre $AD \times p = AE \times q$ s'écrit alors

$$p\,\frac{l}{2}\cos\alpha = \frac{ql(h\cos\alpha - k\sin\alpha)}{\sqrt{(h - l\sin\alpha)^2 + (k - l\cos\alpha)^2}}.$$

On en déduit la valeur de q,

$$q = \frac{p\cos\alpha\sqrt{(h - l\sin\alpha)^2 + (k - l\cos\alpha)^2}}{2(h\cos\alpha - k\sin\alpha)}.$$

G. LACH, à Rodez.

Bonnes solutions par MM. Amblard, conducteur des ponts et chaussées, à Ruines (Cantal) ; Ch. Guillerme ; R. Manen, à Albi ; Marlscalchi ; Pierre Martin, à Grenoble ; L. Montaut, à Oran ; André Negre, à Bordeaux ; Nénetzes ; Louis Perrin, à Trévoux ; A. Rousseau, à Fournes ; J. Soubaigne, à Mont-de-Marsan ; G. Folcby.

1894. — *On considère un appareil de Dulong et Petit pour la mesure du coefficient de dilatation du mercure. Les branches* A *et* B *sont des tubes de verre de* 1^{cm2} *de section à la température ambiante de* 20° *; elles contiennent chacune à cette température une hauteur de mercure de* 1 *mètre. On chauffe la branche* B *à* 200°, *en maintenant la branche* A *ainsi que le tube de communication à* 20°. *On demande :*

1° *Le rapport des hauteurs* h *et* h' *du mercure dans les branches* A *et* B.

2° *La masse de mercure (en grammes et à* $\frac{1}{100}$ *près) qui s'écoule d'une des branches vers l'autre par le tube de communication pendant le chauffage et le sens dans lequel cet écoulement a lieu.*

3° *Les expressions du coefficient* l *de dilatation linéaire du verre et du coefficient* m *de dilatation absolue du mercure en fonction des variations* a *et* b *du niveau dans les branches* A *et* B *pendant l'expérience. Indiquer quelles erreurs relatives résulteraient pour* l *et* m *d'une erreur de* $\frac{1^{mm}}{10}$ *commise dans la mesure de* a *et de* 1^{mm} *dans la mesure de* b, *si l'expérience était faite pour évaluer ces coefficients de dilatation.*

4° *Est-il nécessaire que le tube de communication entre les branches soit fin et qu'il soit horizontal ?*

Coefficient moyen de dilatation absolue du mercure : $m = 0{,}00018$.

Coefficient moyen de dilatation linéaire du verre : $l = 0{,}00004$.

Les dilatations, qui n'auront besoin d'être évaluées qu'avec deux chiffres exacts, seront traitées dans les calculs comme des quantités très petites dont on négligera le carré et les puissances supérieures, sans se préoccuper des erreurs ainsi commises.

1° Les hauteurs sont dans un rapport inverse de celui des densités et, par suite, dans le même rapport que les binomes de dilatation :

$$\frac{h}{h'} = \frac{1 + 200m}{1 + 20m}.$$

ou bien, en tenant compte des approximations permises,

$$(1) \qquad h' = h(1 + 180m).$$

2° Pour reconnaître *a priori* le sens de l'écoulement du mercure, imaginons qu'on ait d'abord établi une différence de température entre les deux tubes en empêchant cet écoulement; des poids égaux de mercure se trouveront presser sur des surfaces inégales et produire une pression plus grande du côté de la section la plus petite, c'est-à-dire du côté du tube froid. L'écoulement aura donc lieu de A vers B.

Écrivons que le poids de mercure contenu dans l'appareil n'a pas changé. En désignant respectivement par s, d, s', d' les sections des tubes et les densités du mercure à 20° et à 200°, on a, avec le centimètre pour unité,

$$2 \times 100sd = hsd + hs'd'.$$

Mais $$s' = s(1 + 180 \times 2l) \qquad \text{et} \qquad d = \frac{d}{1 + 180m}.$$

d'où $$200 = h + h'\frac{1 + 180 \times 2l}{1 + 180m}.$$

ou bien, en tenant compte de l'égalité (1),

$$200 = h + h(1 + 180 \times 2l), \qquad h = \frac{100}{1 + 180l} \quad \text{ou simplement} \quad h = 100(1 - 180l).$$

Comme il était prévu, h est plus petit que 100, hauteur initiale.

Le poids du mercure écoule de A vers B, différence entre les poids de mercure contenus successivement en A, est égal à

$$(100 - h)sd = 100 \times 180l \times 13{,}6 = 2^{k},45.$$

3° L'*abaissement* a du niveau en A est égale à $100 - h = 18\,000l$.

D'après la valeur numérique de l, on a $a = 0^{cm},18$.

Si, au contraire, on se sert de a pour calculer l, on écrira $l = \frac{a}{18\,000}$.

L'*élévation* b du niveau en B est égale à $h' - 100 = h(1 + 180m) - 100$.

En remplaçant h par sa valeur et négligeant toujours les termes du second ordre, on a

$$b = 100\frac{180(m - l)}{1 + 180l} = 18\,000(m - l) = 18\,000m - a$$

D'après la valeur numérique de m, on a $b = 3^{cm},06$.

Si, au contraire, on se sert de b pour calculer m, on écrira $m = \frac{a + b}{18\,000}$.

Pour calculer les erreurs possibles, assimilons-les à des différentielles. L'expression de l donne

$$\frac{dl}{l} = \frac{da}{a} = \frac{da}{18\,000l} = \frac{da}{0{,}18}.$$

Pour $da = \frac{1}{100}$, $$\frac{dl}{l} = \frac{1}{18}.$$

L'expression de m donne de même

$$\frac{dm}{m} = \frac{da + db}{a + b} = \frac{da + db}{18\,000m} = \frac{da + db}{3{,}24}.$$

Pour $da = \frac{1}{100}$ et $db = \frac{1}{10}$, $\frac{dm}{m} = \frac{0{,}11}{3{,}24} = \frac{1}{30}$ environ.

4° Si le tube de communication n'est pas fin, il s'y produit des courants de convection qui ne permettent pas de définir avec précision l'origine des hauteurs h et h'.

Si le tube de communication n'est pas horizontal, les hauteurs doivent être comptées à partir du niveau où la température passe de 200° à 20°; mais ce niveau est, dans ce cas, moins bien défini.

CH. GUILLERME.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1854. — *Étudier le complexe des droites* D *dont les conjuguées* Δ *et* Δ' *par rapport à deux quadriques données* Q *et* Q′ *concourent ; soit* M *le point commun à* Δ *et* Δ'.

Lieu des droites D *passant par un point donné.*

Enveloppe des droites D *situées dans un plan donné* P.

Lieux correspondants pour le point M.

Examiner le cas où Q′ *est une sphère de rayon nul ; et dans ce cas, celui où* P *est le plan de l'infini.*

Une droite D quelconque est conjuguée du point M qui lui correspond, par rapport à l'une et l'autre quadrique. Réciproquement d'ailleurs, si une droite est conjuguée d'un même point par rapport aux deux quadriques, cette droite est une droite du complexe, car ses deux conjuguées passeront au point dont on est parti. Nous obtiendrons donc toutes les droites du complexe, et celles-là seulement, en prenant, pour tout point de l'espace, l'intersection de ses deux plans polaires par rapport aux deux quadriques envisagées. C'est ainsi que nous opérerons.

Il semble assez naturel de prendre pour tétraèdre de référence le tétraèdre autopolaire commun aux deux quadriques Q et Q′.

Soient donc les équations de ces quadriques

(1) $$Q \quad ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0, \qquad Q' \quad a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d't^2 = 0$$

et α, β, γ, δ les coordonnées tétraédriques d'un point M. Nous avons de suite les équations de la droite D correspondante

(2) $$\alpha ax + \beta by + \gamma cz + \delta dt = 0, \qquad \alpha a'x + \beta b'y + \gamma c'z + \delta d't = 0,$$

et nous obtiendrons toutes les droites du complexe en donnant à α, β, γ, δ toutes les valeurs possibles.

Nous voulons que la droite D passe en un point A, de coordonnées x_1, y_1, z_1, t_1. Nous aurons alors les deux relations

(3) $$\alpha ax_1 + \beta by_1 + \gamma cz_1 + \delta dt_1 = 0, \qquad \alpha a'x_1 + \beta b'y_1 + \gamma c'z_1 + \delta d't_1 = 0.$$

Si nous regardons dans ces équations (3) les nombres α, β, γ, δ comme les variables, nous voyons que le lieu des points M, correspondant aux droites D qui passent par un point fixe A, est une droite, qui d'ailleurs est la droite du complexe étudié, de qui le point M correspondant est précisément confondu avec le point A.

Pour avoir l'équation du cône engendré par les droites D qui passent au point A, nous devons éliminer α, β, γ, δ entre les quatre équations (2) et (3). Nous obtenons l'équation de ce cône sous forme d'un déterminant

(4) $$\begin{vmatrix} ax_1 & by_1 & cz_1 & dt_1 \\ a'x_1 & b'y_1 & c'z_1 & d't_1 \\ ax & by & cz & dt \\ a'x & b'y & c'z & d't \end{vmatrix} = 0,$$

où x, y, z, t sont les variables.

C'est un cône du second degré. D'ailleurs dans cette équation ne figurent que des termes rectangles à l'exclusion de tout terme carré. Ceci nous montre que le cône en question passe par les quatre sommets du tétraèdre de référence, tétraèdre autopolaire commun aux deux quadriques Q et Q′. Un cône du second degré n'est complètement défini que lorsque l'on en donne cinq génératrices, et nous n'en avons indiqué que quatre. On pourrait vérifier qu'il contient encore les trois arêtes du trièdre autopolaire par rapport aux deux cônes de sommet A et circonscrits respectivement à Q et à Q′. Il contient aussi les deux droites conjuguées, par rapport à Q et Q′ respectivement, de la droite lieu du point M. Nous établirons ces deux points dans l'étude géométrique que nous ferons de la question.

On sait qu'une courbe, dans l'espace, n'a qu'une équation en coordonnées tangentielles. Nous allons

chercher l'équation tangentielle de la courbe enveloppe des droites D contenues dans le plan P,

$$(5) \qquad P \quad Ax + By + Cz + Dt = 0.$$

Soit

$$(6) \qquad ux + vy + wz + rt = 0$$

l'équation du plan courant de l'espace. Pour qu'il soit tangent à la courbe envisagée, il faut et il suffit que chacune des équations (2) soit une combinaison linéaire des équations (5) et (6). Nous aurons donc

$$(7) \qquad \begin{cases} \lambda(Ax + By + Cz + Dt) + \mu(ux + vy + wz + rt) = \alpha a x + \beta b y + \gamma c z + \delta d t, \\ \lambda'(Ax + By + Cz + Dt) + \mu'(ux + vy + wz + rt) = \alpha a' x + \beta b' y + \gamma' c' z + \delta d' t \end{cases}$$

De là résultent les huit relations

$$(8) \qquad \begin{cases} \lambda A + \mu u = \alpha a, & \lambda B + \mu v = \beta b, & \lambda C + \mu w = \gamma c, & \lambda D + \mu r = \delta d, \\ \lambda' A + \mu' u = \alpha a', & \lambda' B + \mu' v = \beta b', & \lambda' C + \mu' w = \gamma' c', & \lambda' D + \mu' r = \delta d'. \end{cases}$$

Il nous faut éliminer $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \lambda', \mu'$.

Pour éliminer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, nous multiplierons les deux membres de chacune des quatre équations (8) de la première ligne par a', b', c', d' respectivement; les deux membres de chacune des quatre équations de la seconde ligne par a, b, c, d respectivement. Nous retrancherons alors chaque équation de la seconde ligne de l'équation de la première ligne écrite au-dessus d'elle. Nous aurons ainsi les quatre équations :

$$(9) \qquad \begin{cases} \lambda A a' + \mu u a' - \lambda' A a - \mu' u a = 0, & \lambda B b' + \mu v b' - \lambda' B b - \mu' v b = 0, \\ \lambda C c' + \mu w c' - \lambda' C c - \mu' w c = 0, & \lambda D d' + \mu r d' - \lambda' D d - \mu' r d = 0. \end{cases}$$

entre lesquelles il nous faut éliminer λ, μ, $-\lambda'$, $-\mu'$. Le résultat de cette élimination nous donne l'équation tangentielle cherchée :

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} Aa' & ua & Aa & ua \\ Bb' & vb & Bb & vb \\ Cc' & wc' & Cc & wc \\ Dd' & rd' & Dd & rd \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est du second degre en u, v, w, r. Par conséquent l'enveloppe est une quadrique dégénérée, une conique du plan P (*). Il était évident d'ailleurs que la courbe du complexe devait être de seconde classe, puisque le cône du complexe était du second ordre.

Dans l'équation (10) n'entrent que des termes rectangles à l'exclusion de tout terme carré. Ceci nous indique que la courbe admet pour plans tangents les quatre faces du tétraèdre de référence, tétraèdre autopolaire commun des deux quadriques Q et Q'. C'est donc une conique du plan P tangente aux quatre traces sur ce plan des faces de ce tétraèdre. Pour définir complètement une conique, il faut cinq tangentes. On pourrait s'assurer qu'elle admet encore pour tangentes les trois côtés du triangle autopolaire des deux coniques sections de Q et Q' par P. Elle admet aussi pour tangentes les droites conjuguées par rapport à Q et Q' respectivement de la droite qui joint les pôles de P par rapport à chacune des deux quadriques. Nous verrons ces divers points dans l'étude géométrique que nous ferons de la question.

(*) De même que l'on pouvait voir sur l'équation (4) elle-même que la surface représentée par cette équation était un cône, de même ici nous pouvons voir que la quadrique tangentielle représentée par l'équation (10) est dégénérée en courbe plane, de la seconde classe. En effet, on peut écrire cette équation (10) sous la forme

$$\begin{vmatrix} Aa & (u - Au) & Aa & (u - Au) \\ Bb & (v - Bv) & Bb & (v - Bv) \\ Cc & (w - Cw) & Cc & (w - Cw) \\ Dd & (r - Dr) & Dd & (r - Dr) \end{vmatrix} = 0.$$

Du moment que les coordonnées u, v, w, r n'entrent que par l'intermédiaire des binomes $u - A$, $v - B$, $w - C$, $r - D$, on a affaire à une courbe plane du plan de coordonnées A, B, C, D. C'est par un calcul tout analogue que l'on aurait vu que l'équation (4) représente un cône dont le sommet est au point de coordonnées x_1, y_1, z_1, t_1.

Remarquons encore que cette conique enveloppe de D dans le plan P et le cône lieu de D quand cette droite passe par A, sont pleinement corrélatifs. En effet, les équations tangentielles de Q et Q' sont

Nous voulons trouver maintenant le lieu du point M quand la droite D reste dans le plan P. Pour cela il nous faut, entre les équations (8), éliminer u, v, w, r, λ, μ, λ', μ'. A cet effet multiplions les deux membres des quatre équations supérieures par μ', les deux membres des quatre équations inférieures par μ, et soustrayons chaque équation inférieure de l'équation supérieure correspondante. Nous obtenons de la sorte les quatre équations

$$(11)\qquad \begin{cases} (\lambda\mu' - \mu\lambda')A = \alpha(a\mu' - \mu a'), & (\lambda\mu' - \mu\lambda')B = \beta(b\mu' - \mu b'), \\ (\lambda\mu' - \mu\lambda')C = \gamma(c\mu' - \mu c'), & (\lambda\mu' - \mu\lambda')D = \delta(d\mu' - \mu d') \end{cases}$$

et, en posant

$$\rho = \frac{\mu}{\lambda\mu' - \mu\lambda'}, \quad \rho' = \frac{\mu}{\lambda\mu' - \mu\lambda'}.$$

$$(12)\qquad \alpha = \frac{A}{a\rho' - \rho a'}, \qquad \beta = \frac{B}{b\rho' - \rho b'}, \qquad \gamma = \frac{C}{c\rho' - \rho c'}, \qquad \delta = \frac{D}{d\rho' - \rho d'}$$

Telles sont les équations paramétriques du lieu du point M. C'est une courbe unicursale, une cubique gauche. Le point M passe aux quatre sommets du tétraèdre de référence, autopolaire commun de Q et Q', lorsque le rapport $\frac{\rho}{\rho'}$ prend respectivement les valeurs $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$, $\frac{d}{d'}$. Si l'on fait $\rho = 0$, on voit que le point M vient au pôle du plan P par rapport à la quadrique Q ; si l'on fait $\rho' = 0$ il vient au pôle de ce même plan P par rapport à Q'. Une cubique gauche étant définie par six points, celle-ci est complètement déterminée.

C'est à ces positions du point M, pôles de P par rapport à Q et Q' respectivement, que correspondent les deux tangentes que nous avons indiquées en dernier lieu à la conique enveloppe des droites D du plan P.

Si la quadrique Q' est une sphère de rayon nul, c'est-à-dire un cône isotrope, l'un des sommets du tétraèdre autopolaire commun sera au centre de cette sphère. En définitive, on doit, dans toutes les équations, faire $d' = 0$. Le plan de l'infini ne joue aucun rôle spécial, et nous ne pouvons rien dire de particulier relativement à son équation. Tous les résultats que nous avons énoncés subsistent sans modification. Toutefois ils peuvent être énoncés dans un langage nouveau.

Toutes les droites D qui passent en un même point A forment un cône du second degré qui passe au centre O de la sphère de rayon nul et aux trois autres sommets du tétraèdre autopolaire commun, lesquels sont vus de O dans trois directions perpendiculaires deux à deux. Le lieu correspondant du point M est la droite intersection du plan polaire de A dans Q et du plan mené par O perpendiculairement à OA. Si la droite D est contenue dans le plan de l'infini, elle y enveloppe une conique directrice d'un cône, capable d'un trièdre trirectangle circonscrit, admettant pour plans tangents les plans, menés par O, faces du trièdre trirectangle des axes du cône des directions asymptotiques de Q ; le plan mené par O parallèle au plan conjugué dans Q de la direction NO, en désignant par N le centre de Q :

$$\frac{1}{a}u^2 + \frac{1}{b}v^2 + \frac{1}{c}w^2 + \frac{1}{d}r^2 = 0, \qquad \frac{1}{a}u' + \frac{1}{b}v' + \frac{1}{c}w' + \frac{1}{d}r' = 0.$$

Cela étant, si dans l'équation (4) du cône de sommet $A(x, y, z, t)$ nous remplaçons les coordonnées des équations ponctuelles par les coefficients des équations tangentielles ; si nous remplaçons encore les coordonnées ponctuelles de A par les coordonnées tangentielles de P, nous obtenons l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a}A & \frac{1}{b}B & \frac{1}{c}C & \frac{1}{d}D \\ \frac{1}{a'}A & \frac{1}{b'}B & \frac{1}{c'}C & \frac{1}{d'}D \\ \frac{1}{a}u & \frac{1}{b}v & \frac{1}{c}w & \frac{1}{d}r \\ \frac{1}{a'}u & \frac{1}{b'}v & \frac{1}{c'}w & \frac{1}{d'}r \end{vmatrix} = 0,$$

qui ne diffère de l'équation (10) que par le facteur constant $-2\sqrt{abcd\,a'b'c'd'}$.

le plan mené par O perpendiculairement à ON ; et aussi les trois faces du trièdre trirectangle de sommet O autopolaire par rapport à Q'.

La cubique gauche lieu du point M passe en O, en N, aux trois sommets du tétraèdre autopolaire autres que O, ce qui nous montre qu'elle est située sur un cône de sommet O capable d'un trièdre trirectangle inscrit. Les directions asymptotiques sont d'ailleurs deux à deux rectangulaires.

Nous établirons tous ces résultats dans l'étude géométrique que nous allons maintenant faire de la question.

Etude géométrique. — Nous supposerons que les deux quadriques Q et Q' sont telles que le tétraèdre autopolaire commun soit unique et bien défini : il en sera en particulier ainsi dans le cas où la quadrique Q' devient une sphère de rayon nul, si la quadrique Q reste générale.

Si une droite D est telle que ses conjuguées Δ et Δ' soient deux droites d'un même plan P, concourant en un point M, la droite D envisagée sera l'intersection des deux plans polaires de M (car tout point de D sera conjugué de M par rapport à l'une et l'autre quadrique), et, corrélativement, sera aussi la droite qui joint les deux pôles du plan P par rapport à Q et Q' respectivement. On verra d'ailleurs que la droite intersection des deux plans polaires de tout point M, aussi bien que la droite qui joint les deux pôles de tout plan P, sera telle que ses deux conjuguées Δ et Δ' soient concourantes ; il y a donc identité entre le complexe proposé à notre étude, celui des droites intersection des plans polaires de tout point M de l'espace, et celui des droites qui joignent les pôles de tout plan P de l'espace. Sans y insister davantage, signalons que du complexe proposé feront partie les quatre congruences des droites qui passent par l'un des sommets du tétraèdre autopolaire commun et les quatre congruences des droites contenues dans l'un des plans, faces de ce même tétraèdre.

Considérons toutes les droites D qui passent par un point fixe A. Le point M correspondant devra toujours être conjugué de ce point A par rapport à l'une et à l'autre quadrique. Par conséquent, le point M devra toujours, pour que la droite D qui lui correspond passe par A, être situé sur la droite D_A intersection des deux plans polaires de A, sur la droite du complexe, en définitive, qui correspond au point A envisagé comme point M. Si d'ailleurs le point M se trouve sur cette droite D_A, la droite D correspondante passera bien par A ; si bien que cette droite D_A est le lieu des points M qui correspondent aux droites D qui passent par le point A.

Voyons maintenant quel est le cône engendré par toutes les droites D qui passent au point A. Lorsque le point M décrit la droite D_A, les plans polaires de M par rapport à chacune des quadriques forment deux faisceaux homographiques admettant pour arêtes, respectivement, les conjuguées Δ_A et Δ'_A de D_A, lesquelles se coupent en A. En général, le plan P_A des deux droites $\Delta_A\Delta'_A$ ne se correspond pas à lui-même dans les deux faisceaux homographiques. En général, par conséquent, le cône des droites D passant en A est un cône du second degré non dégénéré et qui contient les deux droites Δ_A et Δ'_A conjuguées par rapport à Q et Q' respectivement de la droite D_A, intersection des plans polaires de A par rapport à Q et Q' respectivement.

Ce cône contient aussi les trois arêtes du trièdre autopolaire commun aux deux cônes de sommet A et circonscrits à Q et Q' respectivement. En effet, les deux conjuguées d'une quelconque de ses arêtes seront l'une et l'autre situées dans la face opposée, seront par conséquent des droites concourantes. Les quatre droites joignant le point A aux quatre sommets du tétraèdre autopolaire commun à Q et Q' sont encore quatre génératrices du cône, car toute droite passant par l'un des sommets de ce tétraèdre est une droite du complexe.

Nous venons d'indiquer neuf génératrices particulières de ce cône : elles sont en général distinctes, et nous pouvons en donner cette raison bien simple : c'est qu'il y en a d'abord un groupe de deux, puis un groupe de trois, enfin un groupe de quatre ; si deux de ces génératrices étaient confondues, il y aurait une dissymétrie impossible en général. Nous allons indiquer encore deux autres génératrices de ce cône, mais ici il nous faudra aller avec quelque précaution, car, *a priori*, on peut craindre que le couple nouveau ne soit identique au couple des droites Δ_A, Δ'_A, ce qui serait possible sans aucune dissymétrie, à première vue du moins. Si une droite D a tous ses points conjugués d'un même point M par rapport à Q et à Q', elle aura de même tous ses points conjugués de ce même point M par rapport à toutes les quadriques du faisceau ponctuel déterminé par Q et Q'. Considérons les deux quadriques Q_1 et Q'_1 du faisceau, tangentes à la droite D. Pour que les conjuguées Δ et Δ' de D par rapport à Q et à Q' soient concourantes, il faut et il suffit que ses conjuguées Δ_1 et Δ'_1 par rapport à Q_1 et Q'_1 le soient également (et ces quatre droites Δ, Δ', Δ_1, Δ'_1 seront concourantes au même point M) ; c'est-à-dire que les plans tangents à Q_1 et à Q'_1 aux points de contact respectifs de ces deux quadriques avec la droite D soient confondus. Cette droite D sera alors, dans ce plan tangent commun, l'un des côtés du triangle ayant pour sommets les points de contact des trois quadriques du faisceau ponctuel Q, Q' tangentes à ce plan, autrement dit l'un des côtés du triangle autopolaire commun des deux sections par ce plan de Q et Q' respectivement. En même temps, la droite D est une génératrice de la développable circonscrite à Q_1 et à Q'_1. Nous voyons en passant que le complexe que nous étudions pouvait être défini comme étant celui des droites qui, dans un plan quelconque de l'espace, sont l'un des côtés du triangle autopolaire des sections de Q et Q' par ledit plan, ou encore celui des génératrices de la congruence des surfaces développables circonscrites à deux quelconques des quadriques du faisceau ponctuel défini par Q et Q' ; et, corrélativement, celui des arêtes de tout trièdre de sommet quelconque autopolaire par rapport aux deux cônes circonscrits respectivement à Q et à Q' et ayant l'un et l'autre même sommet que ce trièdre, ou encore, celui des tangentes de la congruence des biquadratiques intersections de deux quelconques des quadriques du faisceau tangentiel défini par Q et Q'.

Revenons au cône des droites D passant par un point A. Considérons le plan P'_A tangent en A à la quadrique du faisceau ponctuel Q et Q' qui passe en A. Nous connaissons encore les deux génératrices suivant lesquelles ce plan coupe le cône. Ce sont les droites joignant le point A aux deux points de contact des deux autres quadriques du faisceau ponctuel qui touchent ce plan. Il nous faut montrer que ces deux dernières droites ne sont pas en général confondues avec Δ_A et Δ'_A. A cet effet nous allons montrer que leur plan P'_A n'est pas en général confondu avec le plan P_A de Δ_A et Δ'_A. En effet, dans ce plan P'_A, le point A étant un des sommets du triangle autopolaire aux sections de Q et Q', le côté

de ce triangle opposé à A a tous ses points conjugués de A par rapport à l'une et l'autre quadrique. Donc c'est la droite D_A elle-même. Le plan P'_A est donc le plan mené par A et par la droite D_A, lieu de M, et il est bien différent du plan P_A, car en général, la droite D_A n'étant pas tangente à la fois à Q et à Q', ne rencontre pas ses conjuguées Δ_A et Δ'_A qui déterminent le plan P_A. Nous voyons au passage que les deux quadriques du faisceau ponctuel Q et Q', tangentes à une droite quelconque du complexe, D, admettent, en leurs points de contact respectifs, même plan tangent ; que ce plan passe par le point M qui correspond à D ; que les deux droites du complexe qui passent par M et s'appuient sur D touchent D respectivement aux deux points de contact des quadriques du faisceau ponctuel tangentes à D.

En définitive nous avons signalé onze génératrices, en général distinctes, du cône des droites D passant en A : deux groupes de deux, un groupe de trois, un groupe de quatre. Il suffisait d'en donner cinq pour que le cône soit complètement défini. On pourrait penser encore à envisager les trois quadriques du faisceau tangentiel déterminé par Q et Q' et qui passent au point A, et donner encore comme génératrices les trois tangentes en A des trois biquadratiques intersections de ces trois quadriques prises deux à deux. Mais le groupe de trois génératrices qu'on obtiendrait ainsi ne serait pas différent de celui déjà donné, arêtes du trièdre autopolaire aux deux cônes de sommet A et circonscrits à Q et Q' respectivement.

Le cône des droites D passant en A est engendré par l'intersection des plans qui se correspondent dans deux faisceaux homographiques d'arêtes Δ_A et Δ'_A. Il peut arriver que le plan P_A des droites Δ_A et Δ'_A se corresponde à lui-même. Alors le cône se décomposera en deux plans. Pour qu'il en soit ainsi, on verra qu'il est nécessaire et suffisant que la droite D_A passe par l'un des sommets du tétraèdre autopolaire à Q et Q', et que le point A soit un point d'une des faces du tétraèdre. S'il en est ainsi, le cône dégénèrera en l'ensemble du plan face de ce tétraèdre qui contient le point A, et d'un plan mené par A et le sommet du tétraèdre opposé à la face qui contient A.

Lorsque le point A est situé non seulement sur une face, mais même sur une arête du tétraèdre, le cône est formé des deux faces du tétraèdre qui se coupent suivant l'arête sur laquelle est le point A.

Dans ce cas la droite D_A est l'arête opposée du tétraèdre ; les deux droites Δ_A et Δ'_A sont toutes deux confondues avec la première arête, et les deux plans qui constituent le cône sont les deux plans doubles des deux faisceaux homographiques de même arête. Enfin si le point A est sur trois faces du tétraèdre, c'est-à-dire est confondu avec l'un des sommets, le cône n'existe plus : toute droite passant en A est une droite du complexe.

Dans ce cas D_A est totalement indéterminée dans la face du tétraèdre opposée à A. Il n'est plus possible de parler de Δ_A, Δ'_A, des faisceaux homographiques qui engendrent le cône.

Lorsque tout à l'heure nous chercherons le lieu du point M qui correspond à toutes les droites D d'un même plan, nous verrons que ce lieu est une cubique gauche passant par les quatre sommets du tétraèdre autopolaire, par les pôles du plan envisagé par rapport à Q et Q' respectivement ; que c'est même le lieu des pôles de ce plan par rapport à toutes les quadriques du faisceau ponctuel déterminé par Q et Q'. La proposition corrélative s'applique au cas qui nous occupe pour l'instant. Les plans P qui contiennent chacun les conjuguées Δ et Δ' de chacune des droites D passant par A enveloppent une surface développable de troisième classe, qui admet comme plans tangents particuliers les quatre faces du tétraèdre autopolaire, les deux plans polaires de A par rapport à Q et Q' respectivement; qui est, au reste, la surface enveloppe des plans polaires de A par rapport aux quadriques du faisceau tangentiel déterminé par Q et Q'.

Considérons toutes les droites D d'un même plan Π. Nous allons énoncer toute une série de propositions corrélatives de toutes celles que nous avons énoncées plus haut, et qu'il nous sera par conséquent inutile de démontrer. L'enveloppe des plans P correspondant à ces droites D est la droite D_π qui joint les pôles de Π par rapport à Q et Q' respectivement. Cette droite D_π est une droite du complexe qui admet pour plan P le plan Π lui-même. L'enveloppe des droites D est une conique du plan Π. Elle admet comme tangentes les deux droites Δ_π, Δ'_π conjuguées de D_π par rapport à Q et Q' respectivement. Ces droites Δ_π et Δ'_π se coupent en un point M_π dont les deux plans polaires se coupent suivant D_π. Cette conique admet encore pour tangentes les trois côtés du triangle autopolaire des deux sections de Q et Q' par Π. Elle admet aussi pour tangentes les quatre traces sur le plan Π des quatres faces du tétraèdre autopolaire. Enfin, considérons la quadrique du faisceau tangentiel déterminé par Q et Q', tangente à Π. Au point de contact passent encore deux autres quadriques du faisceau tangentiel, et les traces sur Π de leurs plans tangents respectifs en ce point sont encore deux tangentes à la conique. Le point de contact est d'ailleurs la trace sur Π de la droite D_π. Les deux quadriques du faisceau tangentiel tangentes à une droite D sont tangentes au même point ; ce point est situé sur le plan P qui correspond à D ; les droites du complexe situées dans ce plan P et qui s'appuient sur D sont respectivement situées dans les plans tangents aux quadriques qui touchent D au point de contact et passent elles-mêmes par le point de contact.

Les onze tangentes de la conique que nous avons signalées sont en général distinctes.

Si le plan Π passe par l'un des sommets du tétraèdre autopolaire, la conique se décompose en deux points, dont l'un sera ce sommet du tétraèdre, dont l'autre sera sur l'intersection de Π et de la face opposée du tétraèdre.

Si Π passe par une arête du tétraèdre, la conique se décompose en deux points qui sont les deux sommets situés sur cette arête. Enfin si Π est une face du tétraèdre, les droites du plan Π sont toutes droites du complexe.

Cherchons le lieu du point M qui correspond aux droites D du plan Π dans le cas général. Le lieu des droites Δ correspondant aux droites D est le corrélatif par rapport à Q de la conique enveloppe des droites Δ : c'est un cône de second degré ayant pour sommet le pôle de Π par rapport à Q. De même le lieu des droites Δ' est un cône du second degré ayant pour sommet le pôle de Π par rapport à Q'. D'ailleurs ils ont pour génératrice l'un et l'autre la droite D_π qui joint leurs sommets, et qui peut être considérée comme la droite Δ qui correspond à Δ_π ou la droite Δ' qui correspond à Δ'_π.

Ces deux cônes, ayant une génératrice commune, se coupent donc suivant une cubique gauche, sans qu'il y ait en général dégénérescence plus complète de l'intersection des deux cônes. Cette cubique gauche est bien le lieu cherché, car ce lieu doit être sur l'un et l'autre cône, et n'est d'ailleurs pas leur génératrice commune, qui correspond à toutes les droites D passant par le point M_π. Je dis d'ailleurs que la cubique ne se décomposera pas en une conique et une droite ; car, comme nous allons voir, le lieu doit passer aux quatre sommets du tétraèdre, et si l'on avait deux cônes tangents le long de leur génératrice commune D_π et se coupant en outre suivant une conique, leur intersection en général ne pourrait passer par quatre points non situés dans un même plan. Il faudrait que la droite D_π passât par l'un autre sommet, ce qui est également par un des sommets du tétraèdre autopolaire.

Cette cubique passe aux sommets des deux cônes, autrement dit aux pôles de Π par rapport à Q et à Q'. Elle passe aussi aux quatre sommets du tétraèdre autopolaire, qui correspondent aux faces du tétraèdre autopolaire Π. Nous en avons six points, ce qui la détermine complètement. Le lieu des pôles de Π par rapport à toutes les quadriques du

faisceau ponctuel déterminé par Q et Q′ est également une cubique gauche qui passe par les six mêmes points que la précédente. Elles sont donc confondues et le lieu des points M correspondant aux droites D du plan Π est aussi le lieu des pôles de D par rapport aux quadriques du faisceau ponctuel Q, Q′. Cette cubique passe donc encore aux trois points de contact avec H des trois quadriques de ce faisceau ponctuel qui touchent le plan Π.

Si le plan Π passe par l'un des sommets du tétraèdre, la conique se décompose en deux points, ce sommet lui-même et un point de la face opposée. Les points M qui correspondent aux droites D passant par le sommet du tétraèdre sont situés sur une conique de la face opposée du tétraèdre qui passe par les trois autres sommets et par les deux pôles du plan Π par rapport à Q et Q′, qui sont l'un et l'autre dans cette face opposée du tétraèdre. Cette conique est complètement déterminée par ces cinq points. Le lieu des points M qui correspondent aux autres droites D du plan Π, droites qui passent toutes par un même point de l'intersection de Π avec la face du tétraèdre opposée au sommet que contient H, est une droite, conformément à ce que nous avons vu dans notre étude des droites D qui passent par un même point, et cette droite passe au sommet du tétraèdre situé dans le plan H, si bien que le lieu total de M passe encore par les quatre sommets du tétraèdre.

Si le plan H contient une arête du tétraèdre, indiquons seulement que le lieu de M se compose de l'arête opposée, lieu exceptionnel, sur lequel est indéterminé le point M correspondant à la première arête, et de deux droites, passant chacune par l'un des sommets extrémités de la première arête, et situées respectivement dans les deux faces de ce tétraèdre qui se coupent suivant la seconde. Chacune d'elles correspond aux droites qui passent par le sommet opposé à la face qui la contient. Si enfin le plan H est confondu avec l'une des faces du tétraèdre, toutes les droites de ce plan sont droites du complexe, et le lieu du point M se compose des trois arêtes qui aboutissent au sommet opposé, lieux exceptionnels, et du sommet opposé, qui à lui seul représente le vrai lieu ; pour toutes ces droites le point M est le même.

Il serait facile d'énoncer les propositions corrélatives de toutes celles que nous venons d'exposer en étudiant les cas de dégénérescence, et qui donneraient des cas de dégénérescence de la surface enveloppe des plans P qui correspondent aux droites D passant par un même point A. Nous ne le ferons pas.

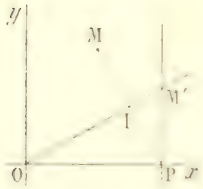
Si l'une des quadriques se réduit à un cône, même à un cône isotrope, aucun résultat ne se trouve modifié. Il arrive seulement qu'on peut énoncer les diverses propositions dans un langage nouveau. Nous l'avons fait à la fin de notre solution analytique. Nous n'y reviendrons pas.

Enfin il resterait à étudier le cas où les deux quadriques Q et Q′ sont telles que le tétraèdre autopolaire commun soit partiellement ou totalement indéterminé. Nous ne le ferons pas.

GUADET.

QUESTIONS PROPOSÉES

1938. On considère deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy et un point M′ ayant pour coordonnées x' et y' : soient P la projection du point M sur Ox et M le symétrique de P par rapport à OM′.



1° On demande d'exprimer l'affixe du point M en fonction de celle du point M′ et de celle du point symétrique de M′ par rapport à Ox ; de calculer les coordonnées x et y de M en fonction de celles de M′ ; de montrer qu'à tout point M′ correspond un point M unique et qu'à tout point M correspondent deux points M′. Placer ces points quand le point M est donné.

2° Trouver le lieu du point M′ quand le point M décrit une parallèle à Ox ou à Oy, un cercle ayant son centre au point O, un cercle tangent à Oy ou à Ox au point O.

3° Lieu du point M quand le point M′ décrit une parallèle à l'un des axes, ou un cercle ayant pour centre le point O.

4° On suppose le point M′ sollicité par une force représentée par le vecteur M′M. Trouver les lignes de force et les lignes de niveau du champ ainsi créé. Évaluer le travail total de la force du champ, quand le point M′ parcourt une ligne de force tout entière ou une partie seulement de cette ligne de force.

E. H.

1939. — Montrer qu'il existe une infinité de cubiques circulaires passant par les sommets d'un triangle, l'orthocentre et les pieds des hauteurs.

Trouver le lieu du foyer singulier de chacune de ces cubiques, l'enveloppe de l'asymptote réelle et le lieu du point de rencontre de cette droite avec la cubique correspondante.

Montrer que, pour chacune de ces cubiques, les tangentes aux sommets du triangle sont parallèles, celles aux pieds des hauteurs concourantes et trouver le lieu du point de concours de ces dernières.

A. DARMON.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Cours préparatoires.*)

Concours de 1910, *fin.*

1898. — *Calculer approximativement, à* $\frac{1}{100}$ *près autant que possible, la racine positive de l'équation* $\frac{e^x - e^{-x}}{x} = \frac{21}{10}$ (*e est la base des logarithmes népériens*).

En développant e^x et e^{-x} en série, on a

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

d'où, en retranchant et divisant par x, $\frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2 + \frac{2x^2}{3!} + \frac{2x^4}{5!} + \cdots$, et l'équation à résoudre devient

$$\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^6}{840} + \cdots = 0,05.$$

En première approximation, négligeons les termes à partir de $\frac{x^2}{6}$. Nous aurons

$$x = \sqrt{6 \times 0,05} = 0,548.$$

D'autre part, $f(0,54) = e^{0,54} - e^{-0,54} - 2,1 \times 0,54 = 1,7158 - 0,5828 - 1,1340 = -0,001 < 0$, donc 0,54 est inférieur à la racine. Comme 0,548 est nécessairement supérieur d'après sa formation, nous pourrons prendre très approximativement 0,545.

A. ROUSSEAU, à Fournes-en-Weppes ; G. LACH, à Rodez.

Autres solutions exactes de MM. NÉVÉJANS, 27e d'artillerie ; P. SALLERON, à Albi ; L. MONTAGE, à Oran.

1899. — *Une tige pesante* AB, *mobile autour de son extrémité* A *dans un plan vertical, est maintenue par une corde flexible attachée à son centre de gravité* G *et qui, passant sur une poulie* p *située sur la verticale du point* A, *porte un contre-poids* P.

La distance Ap *qui est égale à* AG *est connue, ainsi que le poids* Q *de la tige* AB *et la longueur* l *de la corde* GpP *dont on néglige le poids.*

On demande de déterminer les positions d'équilibre que pourra prendre le système et de distinguer les positions d'équilibre stable des positions d'équilibre instable.

La force P appliquée le long du cordon GpP se transmet tout le long de ce cordon et est appliquée ainsi à la barre AB, au point G, dans la direction Gp.

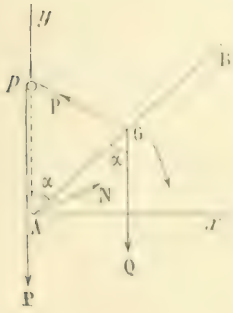


Fig. 1

Cette barre est donc soumise à l'action de trois forces, les forces P et Q appliquées au point G, et la réaction N du point fixe A. Pour qu'elle soit en équilibre, il faut et il suffit que l'une des forces soit égale et directement opposée à la résultante des deux autres. Nous exprimerons que la force N est égale et opposée à la résultante des forces Q et P, et, comme la grandeur de cette force est indéterminée, il nous suffira d'exprimer que la somme algébrique des moments des deux forces P et Q, par rapport au point A, est nulle.

La barre AB peut se mouvoir depuis la position verticale ascendante, Ap, jusqu'à la position verticale descendante, sans que les conditions physiques du problème soient altérées. Nous n'envisagerons que ce champ de déplacement.

Quand la barre est verticale et ascendante, elle vient buter contre la poulie p, et reste en équilibre, mais cette position d'équilibre ne sera pas fournie par nos calculs, parce qu'une nouvelle force intervient alors, la réaction de la poulie sur la barre, qui n'est pas appliquée dans une autre position. Quand la barre est verticale et descendante, elle est encore en équilibre sous l'action de son poids Q, de la force directement opposée P et d'une réaction complémentaire du point A sur cette barre. Cette position-là sera évidemment fournie par nos calculs, et sera acceptable, si la longueur l du fil est assez grande, plus grande que AB.

Nous supposerons d'abord cette condition réalisée. Nous appellerons a la longueur AG, α l'angle de AB avec la verticale, et nous prendrons pour sens positif le sens des aiguilles d'une montre, le sens de la flèche. Le moment de Q est alors $aQ \sin\alpha$; celui de P, $-aP\cos\frac{\alpha}{2}$. La somme algébrique des moments est $a\left(Q\sin\alpha - P\cos\frac{\alpha}{2}\right)$ ou $a\cos\frac{\alpha}{2}\left(2Q\sin\frac{\alpha}{2} - P\right)$; elle est nulle pour

$$\cos\frac{\alpha}{2} = 0, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{P}{2Q}.$$

La première solution est $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \pi$; la base est alors verticale et descendante; cette position d'équilibre a été signalée *a priori*.

La deuxième position d'équilibre est fournie par $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{P}{2Q}$; elle ne peut exister que si $P < 2Q$. L'équation $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{P}{2Q}$ donne alors deux valeurs pour $\frac{\alpha}{2}$; l'une, plus petite que $\frac{\pi}{2}$ et acceptable; l'autre, plus grande que $\frac{\pi}{2}$ et inacceptable. Appelons φ cette valeur de α; nous aurons

$$\varphi = 2 \arcsin\frac{P}{2Q}.$$

Premier cas. — Supposons $l > 2a$ et $P < 2Q$. Nous avons alors deux positions d'équilibre à étudier.

La première position correspond à $\alpha = \pi$. La barre est verticale et descendante (*fig.* 2). Écartons alors un peu la barre de la position verticale, prenons $\alpha = \pi - \varepsilon$. La somme des moments deviendra

$$a\sin\frac{\varepsilon}{2}\left(2Q\cos\frac{\varepsilon}{2} - P\right);$$

elle sera positive; donc la barre retombera vers sa position d'équilibre; celui-ci est stable.

La deuxième position correspond à $\alpha = \varphi$ (*fig.* 3). Si nous changeons alors α en $\varphi + \varepsilon$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ diminue et reste positif, $\sin\frac{\alpha}{2}$ augmente, et la quantité

$$a\cos\frac{\alpha}{2}\left(2Q\sin\frac{\alpha}{2} - P\right),$$

nulle pour $\alpha = Q$, devient positive. La barre s'éloigne de sa position d'équilibre, l'équilibre est instable.

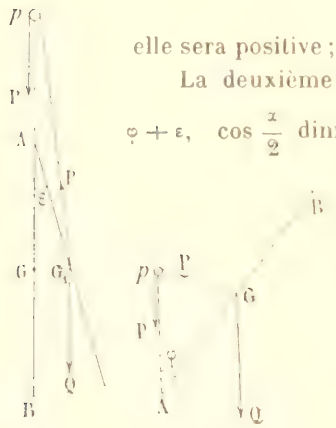


Fig. 2 Fig. 3

Deuxième cas : $l > 2a$, $P > 2Q$. Alors il n'y a plus qu'une position d'équilibre, la première, et elle est alors instable, car la somme des moments $a\sin\frac{\varepsilon}{2}\left(2Q\cos\frac{\varepsilon}{2} - P\right)$ est négative pour ε petit et positif, et la barre, écartée un peu de sa position d'équilibre, s'en éloigne; elle remonte jusqu'à la position verticale ascendante.

Enfin si $l > 2a$ et $P = 2Q$, la deuxième position d'équilibre vient coincider avec la première, et l'équilibre est encore instable. La position d'équilibre, qui correspond à $\alpha = \varphi = 2 \arcsin \frac{P}{2Q}$, est donc toujours instable.

Troisième cas. — Supposons $l < 2a$. Alors la solution $\alpha = \pi$ ne convient plus, le poids P ne pouvant pas s'élever plus haut que la poulie. Pour que la deuxième solution, $\alpha = \varphi$, convienne il faut que $Gp = 2a \sin \frac{\alpha}{2} = 2a \sin \frac{\varphi}{2}$ soit plus petite que l, ce qui donne $\frac{aP}{Q} < l$, $\frac{P}{Q} < \frac{l}{a}$.

Si cette condition est remplie, il y a une position d'équilibre instable, sinon, il n'y en a pas.

On peut traiter facilement le problème actuel en appliquant le principe des vitesses virtuelles. On trouve ainsi $-Qda \cos \alpha - 2Pda \sin \frac{\alpha}{2} = 0$, le symbole d désignant une différentielle.

Cette équation s'écrit $a\left(Q \sin \alpha - P \cos \frac{\alpha}{2}\right) d\alpha = 0$, et elle exprime que le travail élémentaire des deux forces extérieures, P et Q, correspondant au déplacement angulaire $d\alpha$, est nul. C'est l'équation déjà trouvée.

On peut enfin calculer les composantes des deux forces P et Q par rapport aux deux axes Ax et Ay, former l'équation de la droite de support de leur résultante et écrire qu'elle passe à l'origine des coordonnées, A. On retrouve ainsi la même condition d'équilibre. En calculant l'x du point de rencontre de cette droite avec Ax pour une position voisine de la position d'équilibre, on verra suivant le signe de x si cette position est une position d'équilibre stable ou instable.

Enfin on peut calculer l'y du centre de gravité des deux poids P et Q et écrire que cet y est maximum ou minimum. S'il est maximum, l'équilibre est instable ; s'il est minimum, l'équilibre est stable. On trouve ainsi

$$y(P + Q) = aQ \cos \alpha + \left(a - l + 2a \sin \frac{\alpha}{2}\right) P \qquad \text{et} \qquad (P + Q) \frac{dy}{d\alpha} = a\left(P \cos \frac{\alpha}{2} - Q \sin \alpha\right).$$

L'équation $\frac{dy}{d\alpha} = 0$ redonne encore l'équation déjà trouvée, et l'on voit facilement qu'il y a un maximum pour $\alpha = \varphi$ et un minimum pour $\alpha = \pi$ (si $P < 2Q$). Tous les résultats trouvés par la première méthode se retrouvent immédiatement.

Bonnes solutions : MM. P. Salleron, à Albi ; Marescalchi ; P. Martin, à Grenoble : A. Rousseau ; J. Soubaigné ; R. Manen, à Albi ; Névéjans ; L. Montaut ; G. Lach, à Rodez.

1900. — *Toutes les fois que cinq forces se font équilibre sur un même solide, leurs lignes d'action rencontrent deux mêmes droites.*

Soient A, B, C, D, E les lignes d'actions des cinq forces ; je dis qu'il existe deux droites et deux seulement qui s'appuient sur les quatre droites A, B, C, D. En effet, toute droite assujettie à rencontrer les trois droites A, B, C engendre une quadrique passant par ces droites (si les trois droites ne sont pas parallèles à un même plan, c'est un hyperboloïde à une nappe ; si elles sont parallèles à un même plan, c'est un paraboloïde hyperbolique). Par tout point de la quadrique Q, il passe une droite et une seule rencontrant les génératrices A, B, C ; mais la droite D rencontre Q en deux points L_1, L_2 ; par chacun de ces points, il passe donc une droite Δ_1 ou Δ_2 rencontrant les quatre droites A, B, C, D. Je dis maintenant que la droite E rencontre les deux droites Δ_1 et Δ_2 : en effet, prenons les moments des cinq forces A, B, C, D, E par rapport aux axes Δ_1, Δ_2 : la somme des moments, pour chaque axe, est nulle, puisque le système est en équilibre, mais les moments de A, B, C, D sont nuls, puisque ces droi-

tes rencontrent les axes ; la force E a donc un moment nul par rapport aux axes Δ_1, Δ_2 ; elle s'appuie par suite sur ces droites.

J. SOUBAIGNÉ, à Mont-de-Marsan ; L. MONTAUT, à Oran.

Bonnes solutions : MM. A. Rousseau, à Fournes-en-Weppe ; Amblard, à Ruines ; A. Nègre, à Bordeaux ; A. Marescalchi ; Névéjans.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1916. — *Une droite de longueur constante k est mobile et s'appuie à la fois sur une ellipse* E *et sur son grand axe.*

1° *Le lieu du milieu de cette droite est une quartique. La construire dans les trois cas suivants : k supérieur, inférieur ou égal au demi-petit axe.*

2° *Que devient la quartique lorsque l'ellipse devient un cercle et que k est égal à son rayon ?*

3° *Trouver dans le cas général l'aire de la quartique.*

1. Soient $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes, $P(x_0, y_0)$ un point de cette courbe, $Q(\lambda, 0)$ un point de l'axe des x. En écrivant que le point P est sur l'ellipse et que la longueur PQ est égale à k, nous avons

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1=0, \qquad (\lambda-x_0)^2+y_0^2=k^2.$$

Les coordonnées x, y du point M, milieu de PQ, étant

$$x=\frac{x_0+\lambda}{2}, \qquad y=\frac{y_0}{2},$$

nous obtiendrons le lieu du point M en éliminant x_0, y_0, λ entre ces quatre équations.

Remplaçons dans les deux premières y_0 et λ respectivement par les valeurs $2y$ et $2x-x_0$, tirées des deux dernières, nous avons

$$(1)\qquad \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{4y^2}{b^2}-1=0, \qquad (2x-x_0)^2+4y^2=k^2.$$

Il n'y a plus qu'à éliminer x_0 entre ces deux équations.

La première nous donne $x_0^2=\frac{a^2(b^2-4y^2)}{b^2}$, et la deuxième s'écrit $4x^2+4y^2+x_0^2-k^2=8xx_0$, ou, en élevant au carré, $(4x^2+4y^2+x_0^2-k^2)^2=64x^2x_0^2$.

Remplaçons-y x_0^2 par $\frac{a^2(b^2-4y^2)}{b^2}$, nous obtenons l'équation du lieu demandé :

$$\left[4x^2+4y^2+\frac{4a^2(b^2-4y^2)}{b^2}-k^2\right]^2-\frac{64a^2(b^2-4y^2)x^2}{b^2}=0,$$

ou encore

$$\left[4x^2-\frac{4(4a^2-b^2)}{b^2}y^2+4a^2-k^2\right]^2-\frac{64a^2(b^2-4y^2)x^2}{b^2}=0,$$

ou enfin, en ordonnant,

$$16x^4+\frac{16(4a^2-b^2)^2}{b^4}y^4+\frac{32(4a^2+b^2)}{b^2}x^2y^2-8(4a^2+k^2)x^2-\frac{8(4a^2-b^2)(4a^2-k^2)}{b^2}y^2+(4a^2-k^2)^2=0.$$

Cette équation représente une quartique symétrique par rapport aux deux axes.

Pour la construire aisément, revenons aux équations (1) qui peuvent se mettre sous les formes suivantes $x_0 = +\frac{a}{b}\sqrt{b^2-4y^2}$, $x - x_0 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{k^2-4y^2}$, et, en éliminant x_0, nous avons

$$x = +\frac{1}{2}\sqrt{k^2-4y^2} \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2-4y^2}.$$

Nous obtenons ainsi l'expression de x en fonction de y.

A chaque valeur de y correspondent quatre valeurs de x, car on peut prendre des signes quelconques devant les radicaux. Ces valeurs de x sont deux à deux égales et de signes contraires, ce qui montre que la courbe est symétrique par rapport à Oy.

Il suffira donc d'envisager les deux valeurs de x,

$$x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{k^2-4y^2} + \frac{a}{b}\sqrt{b^2-4y^2}, \qquad x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{k^2-4y^2} - \frac{a}{b}\sqrt{b^2-4y^2}.$$

De plus, si l'on change y en $-y$, ces deux valeurs ne changent pas, donc la courbe est symétrique par rapport à Ox.

En résumé, pour avoir toute la courbe, nous discuterons les variations de x_1 et x_2 en donnant à y des valeurs positives, nous construirons les branches de courbes correspondantes, puis les symétriques de ces branches par rapport aux deux axes.

Calculons les dérivées de x_1 et x_2 par rapport à y ; nous avons

$$\frac{dx_1}{dy} = -4y\left[\frac{1}{2\sqrt{k^2-4y^2}} + \frac{a}{b\sqrt{b^2-4y^2}}\right], \qquad \frac{dx_2}{dy} = -4y\left[\frac{1}{2\sqrt{k^2-4y^2}} - \frac{a}{b\sqrt{b^2-4y^2}}\right]$$

On voit ainsi que $\frac{dx_1}{dy}$ est toujours négatif (puisque nous supposons que y est positif) ; donc x_1 décroît.

D'autre part $\frac{dx_2}{dy}$ a le signe de $2a\sqrt{k^2-4y^2} - b\sqrt{b^2-4y^2}$ ou de $4a^2(k^2-4y^2) - b^2(b^2-4y^2)$, ou encore de

$$4a^2k^2 - b^4 - 4y^2(4a^2-b^2).$$

Cette quantité s'annule pour $y^2 = \frac{4a^2k^2-b^4}{4(4a^2-b^2)}$, et cette équation n'admet une racine positive que si k^2 est supérieur à $\frac{b^4}{4a^2}$, ou si k est plus grand que $\frac{b^2}{2a}$. Nous désignerons cette racine par y_1

$$y_1 = \sqrt{\frac{4a^2k^2-b^4}{4(4a^2-b^2)}}.$$

Si k est plus petit que $\frac{b^2}{2a}$, $\frac{dx_2}{dy}$ est constamment négatif, et x_2 décroît.

Nous remarquerons enfin que les fonctions x_1 et x_2 ne sont définies que si y est plus petit que les nombres $\frac{b}{2}$ et $\frac{k}{2}$. Nous sommes donc conduits à comparer le nombre k aux valeurs $\frac{b^2}{2a}$ et b et comme $\frac{b^2}{2a} < b$, nous avons trois cas à distinguer

1° $0 < k < \frac{b^2}{2a}$; 2° $\frac{b^2}{2a} < k < b$; 3° $k > b$.

Premier cas. $0 < k < \frac{b^2}{2a}$. Nous faisons varier y de 0 à $\frac{k}{2}$. x_1 et x_2 vont en décroissant.

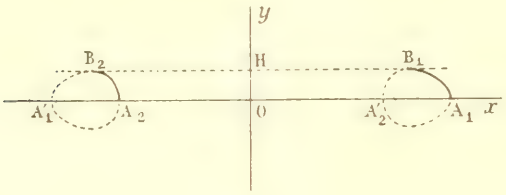


Fig. 1.

y	0	croît	$\frac{k}{2}$
x_1	$\frac{k}{2} - a$	décroît	$\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - k^2}$
x_2	$\frac{k}{2} - a$	décroît	$-\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - k^2}$

On voit que x_1 est toujours positif et x_2 négatif.

On en déduit les deux branches de courbes A_1B_1 et A_2B_2, figurées en trait plein (*fig.* 1). Aux points A_1 et A_2 correspondant à $y = 0$, les tangentes sont parallèles à Oy, puisque $\frac{dx_1}{dy}$ et $\frac{dx_2}{dy}$ sont nulles ; aux points B_1 et B_2 la tangente est parallèle à Ox.

En achevant par symétrie par rapport aux deux axes, on obtient la courbe complète, qui se compose de deux ovales.

Deuxième cas. $\frac{b^2}{2a} < k < b$. — Nous faisons toujours varier y de 0 à $\frac{k}{2}$. x_1 décroît. Mais $\frac{dx_2}{dy}$ s'annule en changeant de signe pour $y = y_1$, et nous avons le tableau suivant :

y	0	croît	y_1	croît	$\frac{k}{2}$
x_1	$\frac{k}{2} - a$	décroît		décroît	$\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - k^2}$
x_2	$\frac{k}{2} - a$	croît	*max.*	décroît	$-\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - k^2}$

et on obtient aisément la forme de la courbe (*fig.* 2).

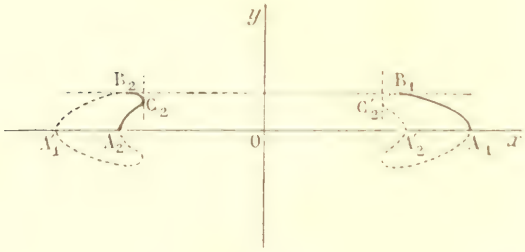


Fig. 2.

On peut remarquer que x_2 reste constamment négatif ; car, les valeurs de y qui annulent x_2 sont racines de l'équation

$$b^2(k^2 - 4y^2) = 4a^2(b^2 - 4y^2),$$

ou

$$y^2 = \frac{b^2(4a^2 - k^2)}{4(4a^2 - b^2)},$$

et on vérifie aisément que la racine positive de cette équation est supérieure à $\frac{k}{2}$.

Troisième cas. $k > b$. — Cette fois nous faisons varier y de 0 à $\frac{b}{2}$; la valeur y_1 qui annule $\frac{dx_2}{dy}$

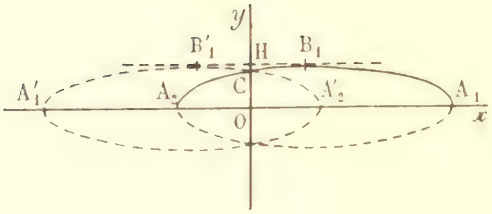


Fig. 3.

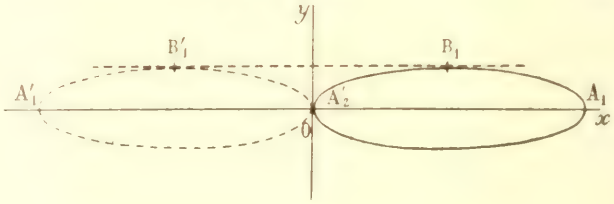


Fig. 4.

est supérieure à $\frac{b}{2}$. Par suite $\frac{dx_2}{dy}$ ne s'annule pas, et reste constamment positif. On a le tableau

suivant :

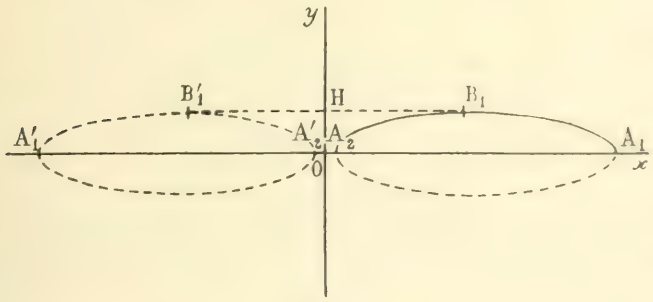


Fig. 5.

y	0	croit	$\frac{b}{2}$
x_1	$\frac{k}{2} - a$	décroit	$\frac{1}{2}\sqrt{k^2 - b^2}$
x_2	$\frac{k}{2} - a$	croit	$\frac{1}{2}\sqrt{k^2 - b^2}$

qui nous donne les branches de courbes A_1B_1 et A_2B_1.

Suivant que k est inférieur, égal ou supérieur à $2a$, on a les figures 3, 4 ou 5.

Cas particulier. $k = b$. — L'équation de la courbe s'écrit

$$x = \pm\left(\frac{1}{2} \pm \frac{a}{b}\right)\sqrt{b^2 - 4y^2}, \qquad \text{ou} \qquad x = \pm\left(a \pm \frac{b}{2}\right)\sqrt{1 - \frac{4y^2}{b^2}},$$

ou enfin

$$\frac{x^2}{\left(a \pm \frac{b}{2}\right)^2} + \frac{y}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} - 1 = 0.$$

Le lieu se compose de deux ellipses, ayant mêmes axes que l'ellipse donnée.

2. Dans le cas plus particulier encore où l'on a $a = b = R = k$, l'équation devient

$$\frac{x^2}{\left(R \pm \frac{R}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} - 1 = 0;$$

elle représente un cercle, $x^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$, et une ellipse, $\frac{x^2}{\left(\frac{3R}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} = 1$.

Ce résultat peut s'établir géométriquement. Considérons en effet le cercle (C) de centre O et de rayon R, et soit P un point quelconque de ce cercle. De ce point comme centre avec un rayon égal à R, traçons une circonférence qui rencontre Ox au point O et en un autre point Q. Les milieux M et M′ de OP et PQ sont des points du lieu.

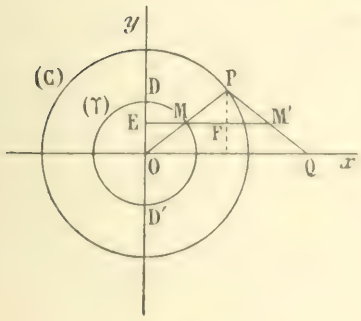


Fig. 6.

Le lieu de M est évidemment le cercle (γ) de centre O et de rayon $\frac{R}{2}$. Pour avoir celui de M′, menons MM′, qui est parallèle à Ox et qui rencontre en E l'axe des y et en F la perpendiculaire menée du point P à Ox. On a visiblement $EM = MF = FM'$, donc $EM' = 3EM$.

Ce qui montre que le lieu de M′ est une ellipse dont le petit axe est le diamètre DD′ du cercle (γ) et dont le grand axe est égal à 3DD′, ou à $\frac{3R}{2}$.

3. Considérons la figure **1**. Nous avons

$$\text{Aire } OA_1B_1H = \int_0^{\frac{k}{2}} x_1 dy, \qquad \text{et} \qquad \text{Aire } OA_2B_1H = \int_0^{\frac{k}{2}} (-x_2) dy,$$

puisque x_2 est négatif ; et par suite Aire OA$_1$B$_1$H $= -\int_0^{\frac{b}{2}} x_2 dy$.

En retranchant, on voit que l'aire du demi-ovale est $\int_0^{\frac{b}{2}} (x_1 + x_2) dy$, et celle de l'ovale

$$2\int_0^{\frac{b}{2}} (x_1 - x_2) dy = 2\int_0^{\frac{b}{2}} \sqrt{b^2 - 4y^2}\, dy = 4\int_0^{\frac{b}{2}} \sqrt{\frac{b^2}{4} - y^2}\, dy.$$

Or on sait que l'intégrale $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$ est égale au quart de l'aire du cercle de rayon R, soit à $\frac{\pi R^2}{4}$. On en conclut que l'aire de l'ovale est $4\pi \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{4}$ ou $\frac{\pi b^2}{4}$.

Même calcul et même résultat pour les ovales de la figure 2.

Envisageons maintenant la figure 3. On a

$$\text{Aire OA}_1\text{B}_1\text{H} = \int_0^{\frac{b}{2}} x_1 dy, \qquad \text{Aire OA}_2\text{B}_2\text{H} = \int_0^{\frac{b}{2}} x_2 dy,$$

et, en retranchant, on voit que l'aire du demi-ovale est $\int_0^{\frac{b}{2}} (x_1 - x_2) dy$, et celle de l'ovale entier

$$2\int_0^{\frac{b}{2}} (x_1 - x_2) dy = \frac{4a}{b}\int_0^{\frac{b}{2}} \sqrt{b^2 - 4y^2}\, dy = \frac{8a}{b}\int_0^{\frac{b}{2}} \sqrt{\frac{b^2}{4} - y^2}\, dy = \frac{8a}{b}\,\frac{\frac{\pi b^2}{4}}{4} = \frac{\pi ab}{2}.$$

Le résultat est le même pour l'ovale de la figure 3. En effet, désignons par y' l'ordonnée du point C où la courbe rencontre l'axe Oy ; nous avons, pour l'aire du demi-ovale,

$$\text{Aire OA}_1\text{B}_1\text{H} = \text{aire OA}_1\text{C} - \text{aire CB}_1\text{H},$$

$$\int_0^{\frac{b}{2}} x_1 dy = \int_0^{y'} (x_1 - x_2) dy - \int_{y'}^{\frac{b}{2}} x_2 dy \quad \text{ou encore} \quad \int_0^{\frac{b}{2}} x_1 dy - \int_0^{\frac{b}{2}} x_2 dy = \int_0^{\frac{b}{2}} (x_1 - x_2) dy,$$

et le calcul s'achève comme précédemment.

Jean SOUBAGNE, à Mont-de-Marsan.

Bonnes solutions par MM. André Courtois, à Sedan ; Jaquet, à Saint-Etienne ; G. Lyon, à Rodez ; André Nizan, à Bordeaux ; Jean Ottenheimer, à Nancy ; Louis Perrin, à Troyes ; A. Rousseau, à Fourmies ; Wagner, à Sens ; L. Sauvy, à Fourmies.

CONCOURS DE 1910 (*Suite.*)

ÉCOLE SUPÉRIEURE D'AÉRONAUTIQUE ET DE CONSTRUCTION MÉCANIQUE

(DEUXIÈME SESSION.)

I. — Calculer les dérivées partielles du premier et du second ordre de la fonction

$$z = \text{L}\,\frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}}.$$

II. — Intégrer l'équation $xy' - y + \text{L}x = 0$.

III. — **1940.** Étant donné un triangle AOB, dont les côtés de l'angle droit sont $OA = a$ et $OB = b$, on

considère toutes les droites Δ qui coupent OA, OB et AB ou leurs prolongements en des points M, N et P tels que le point P, situé sur AB, soit le milieu du segment MN.

1° Former l'équation générale des droites Δ, en prenant pour axes des coordonnées les côtés de l'angle droit du triangle donné.

2° Par un point R, donné dans le plan AOB, passent deux droites Δ du système considéré ; former l'équation qui représente l'ensemble de ces deux droites et déterminer la région du plan dans laquelle doit être R, pour qu'elles soient réelles ;

3° Les deux droites Δ, qui passent par le point R et les deux qui passent par un autre point R′ se coupent mutuellement en quatre points, autres que R et R′ ; trouver la condition pour que ces quatre points soient sur une même circonférence : il faut et il suffit que la droite RR′ passe par un point fixe F, que l'on déterminera.

4° Trouver le lieu du centre de la circonférence précédente, quand R et R′ décrivent une droite fixe, passant par F. Montrer que, par un choix particulier de la droite fixe, toutes les circonférences correspondantes sont concentriques.

Calcul logarithmique.

Résoudre un triangle, connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux :

$$a = 120{,}21, \qquad b = 158{,}75, \qquad A = 37^\circ\, 42'\, 52''.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

1941. — On considère un diamètre fixe AB d'un cercle et un point M variable sur ce cercle. Sur le prolongement de AM on prend une longueur $MC = m.MB$ et sur le prolongement de BM une longueur $MD = n.MA$, m, n étant des constantes.

1° Lieux des centres et enveloppes des cercles circonscrits aux triangles AMD, BMC, ACD, BCD.

2° Lieu du point de rencontre des droites AD, BC.

3° Enveloppe de la droite CD.

Louis Sist, à Lyon.

1942. — De l'air circule successivement dans une conduite horizontale AB et dans une cheminée verticale BC séparées par une grille B couverte de charbon incandescent qui transforme complètement l'oxygène, à son passage, en oxyde de carbone. La conduite et la cheminée ont même section. La cheminée a 10^m de haut. L'air extérieur ou circulant dans la conduite est à 0°. La cheminée a des parois imperméables à la chaleur. On demande :

1° La température des gaz de la cheminée.

2° Le rapport des vitesses V et W du courant gazeux en AB et en BC.

3° Si on ferme, à un moment donné, la conduite par une plaque de 25 décimètres carrés, quelle sera, à un centième près, la différence des forces pressantes sur les deux faces de cette plaque ?

Chaleur de formation de l'oxyde de carbone : 26^{cal}.

Chaleur spécifique de l'air : 0,237.

Poids atomiques : C = 12, O = 16, Az = 14.

On pourra supposer l'air formé de 1 volume d'oxygène pour 4 volumes d'azote.

Coefficient de dilatation des gaz : $\frac{1}{273}$.

Poids spécifique de l'air normal : 0,001293.

Pression atmosphérique à l'orifice supérieur de la cheminée : 760^{mm}.

BIBLIOGRAPHIE

Introduction à la théorie des nombres algébriques, par le docteur J. Sommer, professeur à la « Technische Hochschule » de Dantzig. Edition française revue et augmentée, traduit de l'allemand par A. Lévy, professeur au lycée Saint-Louis. — Paris, librairie scientifique A. Hermann et fils. — Prix : 15 fr.

Les beaux travaux de Gauss et de Galois ont ouvert un vaste champ de recherches aux Mathématiciens, en adjoignant aux nombres naturels ceux qui proviennent de la résolution des équations algébriques entières à coefficients entiers, les nombres qu'on appelle aujourd'hui les *nombres algébriques*. Cette branche nouvelle de l'Arithmétique supérieure a été particulièrement cultivée en Allemagne : de nombreux résultats ont été obtenus par Kummer, Dirichlet, Dedekind, Kronecker.

Un mémoire remarquable de M. Hilbert, publié dans les « Berichte » de la Société des Mathématiciens allemands, offre un admirable résumé de toutes ces recherches. Mais c'est une œuvre concise, difficile à saisir par ceux qui ne sont pas initiés. Aussi faut-il savoir gré à M. Sommer d'avoir entrepris la tâche ardue de vulgariser cette belle théorie et de la mettre à la portée de tous ceux qui ont étudié simplement les premiers principes de l'Arithmétique supérieure.

Tel est l'objet du beau livre que M. Lévy a traduit avec élégance et clarté et qu'il présente aujourd'hui aux lecteurs français.

Cet ouvrage est précédé d'une belle préface de M. Hadamard, que je regrette de ne pouvoir reproduire ici et qui eût constitué le meilleur compte rendu que l'on en puisse faire.

Il débute par une introduction destinée à rappeler les principaux théorèmes de l'Arithmétique supérieure. Il est divisé en quatre chapitres.

Le premier est consacré au corps quadratique, domaine de nombres constitué en adjoignant aux nombres rationnels les racines des équations du second degré à coefficients rationnels. C'est l'ensemble formé par tous les nombres qu'on obtient en résolvant toutes les équations de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dans lesquelles a, b, c désignent des nombres entiers, positifs ou négatifs. La lecture de ce chapitre est aisée ; de nombreux exemples numériques illustrent la théorie et préparent le lecteur à la conception des résultats généraux.

Le second chapitre expose les principales applications qui découlent de la théorie précédente. On y voit d'abord quelques cas particuliers du théorème de Fermat ; puis des rapports intéressants entre les *idéaux* et les formes du second degré ; la multiplication des idéaux et celle des formes. Il se termine par des considérations intéressantes sur la géométrie des nombres.

Le troisième chapitre traite du corps cubique. Les démonstrations relatives à ce sujet diffèrent peu des démonstrations générales, de sorte que le lecteur, familiarisé avec les notions de nombres, d'idéaux et de formes, peut ensuite entreprendre sur ce point l'étude de tous les résultats acquis par les savants modernes.

Le quatrième chapitre est employé à montrer par des exemples bien choisis les propriétés des corps relatifs, car de même que l'on superpose au domaine des nombres rationnels le domaine formé par les racines des équations algébriques à coefficients rationnels, de même on peut superposer au corps algébrique un nouveau corps, dit *corps relatif*, par l'adjonction au premier domaine que l'on a créé de toutes les racines des équations algébriques dont les coefficients sont des nombres de ce premier domaine.

E. H.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT

21e Année. Juin 1911. N° 8.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

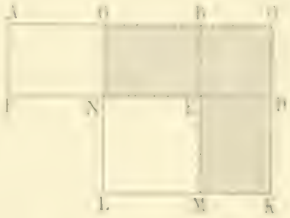
PREMIÈRE PARTIE

LA MATHÉMATIQUE D'AUTREFOIS

par M. **G. Milhaud**, professeur à la Faculté des lettres de Paris.

Si quelque géomètre grec revenait parmi nous et qu'il assistât seulement aux examens d'entrée de l'Ecole polytechnique ou de l'Ecole normale, je ne doute pas des surprises que lui réserveraient nos jeunes taupins, résolvant en deux lignes de calcul bien des problèmes que les Anciens ne pouvaient que difficilement aborder. Mais en revanche la lecture de leurs ouvrages étonnerait beaucoup de nos contemporains par la profondeur de leurs vues, et souvent par leur initiation déjà ancienne, — à l'aide de méthodes plus ou moins ingénieuses, et abstraction faite de la différence des langages, — aux idées essentielles de notre mathématique moderne. J'en veux donner quelques exemples :

1° *Résolution de l'équation du second degré.* — Pour un Grec du ve siècle avant J.-C., le problème se serait posé ainsi : Appliquer sur une droite un rectangle équivalent à un carré donné, en excès ou en défaut d'un certain carré. En d'autres termes (et pour prendre, par exemple, le cas de l'excès), étant donnée une longueur AB, construire le rectangle ACDF équivalent à un carré donné et surpassant du carré BCDE le rectangle ABEF.



Et voici quelle était la solution :

Supposons le problème résolu. G étant le milieu de AB et GCKL le carré construit sur GC, prolongeons BE jusqu'en M. L'aire du rectangle ACDF se trouve transportée le long du *gnomon* GCKMEN (1). Ce gnomon représente d'ailleurs la différence des deux carrés GCKL et NEML, le second ayant pour côté la moitié de AB. Si α est le côté du carré équivalent au rectangle ACDF, ou au gnomon, on est ramené à construire le côté d'un carré qui soit la somme de deux autres carrés de côtés $\frac{AB}{2}$ et α, ce qui se fait en utilisant la propriété du triangle rectangle. AC étant ainsi déterminé, le problème est évidemment résolu.

On a fait remarquer il y a longtemps l'identité au fond de ce procédé qui met en évidence la différence $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}$ p étant la longueur de AB et x la longueur inconnue de BC) avec celui que nous employons nous-mêmes pour résoudre l'équation $x^2+px+q=0$. Ajoutons que l'idée d'utiliser le *gnomon* est très ancienne et se trouve jusque dans des livres indous certainement antérieurs à la conquête d'Alexandre (2).

(1) Le gnomon, tel qu'il a été indiqué par les premiers géomètres, est la figure située à angle droit que reste d'un carré quand on enlève un carré plus petit, les deux carrés ayant un angle commun. Cette forme indique suffisamment que le mot a été primitivement emprunté à l'Astronomie. Plus tard, plus flexible, par exemple, le gnomon est ce qui, reste plus généralement d'un parallélogramme quand on en a supprimé un parallélogramme semblable.

(2) Cf. Mes *Nouvelles Études sur l'histoire de la pensée scientifique*, I. Alexandrie, p. 143-144.

Le problème : appliquer sur une droite un rectangle de surface donnée, s'appelait problème de la « parabole » simple, du mot grec qui signifie appliquer. — Quand il s'agissait d'appliquer un rectangle « en défaut » ou « en excès » d'un carré, c'était le problème de la parabole « en ellipse » ou « en hyperbole » des mots grecs correspondants. De là sont sortis les noms des trois sections coniques fournissant respectivement entre certaines lignes [1] des relations analogues à celles qui se trouvent posées dans les problèmes précédents.

2° *La résolution d'une équation cubique.* — Quand les Grecs se trouvaient en présence d'une relation posant le cube d'une longueur comme égal à un volume donné, ils considéraient toute difficulté comme résolue. « Il n'y a plus, disaient-ils, qu'à construire les deux moyennes proportionnelles entre telles longueurs. » Si, par exemple, on avait (comme nous écririons aujourd'hui) $x^3 = a^2b$, il n'y avait plus qu'à construire deux longueurs x et y telles que l'on eût : $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. On ne saurait dire le nombre et la variété des solutions que l'ingéniosité des Grecs apporta à la construction de ces deux moyennes, — faute naturellement de pouvoir procéder avec le cercle et la droite. En voici une, par exemple, qu'Eutocius, dans son commentaire sur Archimède, attribue à Ménechme, contemporain de Platon. Il est douteux que l'attribution soit exacte, mais la solution dont il s'agit est en tous cas fort ancienne. Elle suppose, on va le voir, une véritable Géométrie analytique, bien avant Descartes [2].

(Je traduis littéralement Eutocius et je respecte les notations.)

Soient données les droites A et E. Il faut trouver entre A et E deux moyennes proportionnelles. Supposons-les trouvées, et soient B, Γ ces moyennes. Traçons la droite ΔH que nous limiterons au point Δ ; portons sur ΔH ΔZ égale à Γ, et élevons la perpendiculaire ΘZ, sur laquelle nous prendrons ΘZ égal à B. Puisque les trois longueurs A, B, Γ sont proportionnelles, le carré sur B est égal au rectangle sur A et Γ. Donc le rectangle sur A et sur ΔZ est égal au carré sur ΘZ. Donc le point Θ est sur une parabole décrite par Δ. — Traçons les parallèles ΘK, ΔK. Comme le rectangle sur B et Γ est donné, car il est égal au rectangle sur A et E, le rectangle sur KΘ et ΘZ est donné. Le point Θ est donc sur une hyperbole qui admet KΔ et ΔZ pour asymptotes. Le point Θ est donc donné et aussi le point Z.

3° *La méthode infinitésimale.* — La méthode infinitésimale des anciens est souvent désignée sous le nom de méthode d'exhaustion. Elle repose sur les deux principes suivants :

1° Si deux quantités sont inégales, la plus petite répétée un nombre de fois suffisant finira par dépasser l'autre. (C'est l'axiome que l'on a appelé axiome d'Archimède, et dont l'exclusion, depuis la tentative de Hilbert, donne lieu aux géométries non-archimédiennes, comme il y avait déjà les géométries non-euclidiennes) [3].

2° Si d'une quantité on retranche une partie plus grande que sa moitié, puis qu'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et ainsi de suite, on finira par obtenir un reste inférieur à

---

(1) Ces lignes sur lesquelles portent les relations analytiques pouvaient ce que nous nommons des coordonnées. Au fond, le langage géométrique des Anciens, qui distinguait les cas de parabole simple, de parabole en ellipse et de parabole en hyperbole correspondait aux équations $y^2 = bx$, $y^2 = bx - \frac{b}{a}x^2$, $y^2 = bx + \frac{b}{a}x^2$ (car l'énoncé du problème de la parabole tel que je l'ai donné, quoique simplifié, s'était assez vite généralisé).

(2) Cf. Ibid. — Le chapitre : Descartes et la Géométrie analytique.

(3) C'est Lobatchewsky qui a construit le premier une géométrie non-euclidienne. Au postulat des parallèles (par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée) il substitua le suivant : Par un point passent une infinité de droites ne rencontrant pas une droite donnée ; elles sont toutes à l'intérieur d'un angle, dont les côtés s'appellent proprement parallèles à la droite. La géométrie ordinaire correspond au cas où cet angle est nul.

toute quantité donnée. — Ce second principe se déduit du premier et sert de fondement à la démonstration. — Exemple :

Soit à démontrer que les aires de deux cercles O et O′ sont entre elles comme les carrés de leurs diamètres. On considère les polygones réguliers inscrits dans le cercle O′, dont on double indéfiniment le nombre des côtés à partir du carré, et l'on voit sans peine qu'en passant d'un polygone au suivant, on diminue de plus que de sa moitié la somme de segments qui forme la différence entre l'aire du polygone et celle du cercle. Il en résulte qu'elle tombera au-dessous de toute valeur assignée d'avance. Dès lors si l'on suppose les carrés des diamètres proportionnels non pas aux aires O et O′, mais à l'aire O et à une aire Σ plus grande ou plus petite que O′, la somme des segments que l'on épuise indéfiniment deviendra inférieure à la différence entre O′ et Σ et l'on sera conduit à une absurdité. Si, par exemple, Σ est plus petit que O′, on pourra inscrire dans le cercle O′ un polygone régulier P′ d'un assez grand nombre de côtés pour que la différence des aires P′ et O′ tombe au-dessous de la différence entre Σ et O′; donc l'aire P′ surpassera Σ. Or si en même temps on considère le polygone régulier P, semblable à P′, inscrit dans le cercle O, on aura $\frac{P}{P'} = \frac{D^2}{D'^2}$, et, d'après l'hypothèse, $\frac{P}{P'} = \frac{O}{\Sigma}$, ou enfin $\frac{O}{P} = \frac{\Sigma}{P'}$, égalité absurde, car P est inferieur à O et P′ est supérieur à Σ. Voilà le type de raisonnements que l'on trouve chez Euclide dans les questions où l'on a à passer à la limite d'une suite infinie de termes.

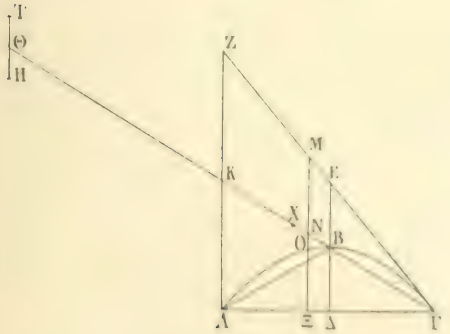
Archimède, s'appuyant sur les mêmes principes, traite des problèmes de quadrature déjà très savants. On lira dans toutes les histoires des Mathématiques (Montucla, Marie, etc.), si l'on ne veut pas aller au texte lui-même, les fameuses démonstrations qu'il donnait, par exemple, pour la quadrature d'un segment de parabole. J'aime mieux indiquer ici la solution du même problème qu'il donnait à Eratosthène, dans une lettre très longue, dont Heiberg a retrouvé la copie manuscrite il y a environ cinq ans. Cette lettre contient un très grand nombre de problèmes traités par une méthode — dont Archimède dit qu'elle est très féconde, quoique pas très rigoureuse —. La quadrature du segment de parabole est la première et la plus simple des questions qui y sont résolues.

Etant donné un segment de parabole ABΓ, si par le milieu Δ de la corde on mène le diamètre ΔE qui coupe l'arc en B et qu'on joigne BA, BΓ, la surface du segment ABΓ vaut les $\frac{4}{3}$ du triangle ABΓ.

Menons AZ parallèle au diamètre, et la tangente ΓZ à la courbe. Prolongeons ΓB jusqu'à sa rencontre K avec AZ, et, au delà, d'une longueur KΘ = KΓ. Imaginons que ΓΘ soit un levier ayant pour point fixe son milieu K. Soit enfin MΞ une parallèle quelconque à ΔE.

Archimède, s'appuyant sur des propriétés connues de la parabole, arrive sans peine à l'égalité

$$\frac{K\Theta}{KN} = \frac{M\Xi}{\Xi O},$$



puis il continue ainsi :

Transportons ΞO en TH, avec Θ pour milieu, c'est-à-dire pour centre de gravité. De même, N sera le centre de gravité de la droite MΞ restée en place. Comme K est le point fixe du levier, on voit que, à cause de la dernière égalité, les droites TH et MΞ se feront équilibre par rapport à ce point fixe, puisque les distances de leurs centres à ce point sont inversement proportionnelles à leurs longueurs. K sera donc le centre de gravité de leurs points composés. Il en sera de même pour toutes les parallèles menées au diamètre à l'intérieur du triangle ZAΓ : la parallèle, restant en place, fera équilibre à sa

portion comprise dans le segment, supposée transportée en Θ, et le centre de gravité du couple sera toujours le point K. La somme des parallèles en question, c'est l'aire du triangle ΓAZ ; la somme de leurs portions semblables à $O\Xi$, interceptées par le segment, c'est le segment parabolique $BA\Gamma$. Donc au total le triangle $ZA\Gamma$, restant en place, fera équilibre au segment entier transporté en Θ, et le centre de gravité de leur système sera K. — Prenons sur ΓK un point X tel que $\Gamma K = 3KX$. Ce point sera le centre de gravité du triangle ΓAZ. Comme le triangle fait équilibre par rapport à K au segment transporté au centre Θ, on a $\dfrac{\text{tr. } AZ\Gamma}{\text{segm. } AB\Gamma} = \dfrac{\Theta K}{KX} = 3$. D'autre part, le triangle ΓAZ est quadruple du triangle $AB\Gamma$ à cause de $ZK = KA$, $A\Delta = \Delta\Gamma$; donc finalement :

$$\frac{\text{segm. } AB\Gamma}{\text{tr. } AB\Gamma} = \frac{4}{3}.$$

(J'emprunte la traduction à Th. Reinach, Revue générale des Sciences, novembre 1907.)

Pourquoi la démonstration n'est-elle pas rigoureuse pour Archimède ? Quelle est l'importance de cette méthode des indivisibles employée ici sans hésitation ? — J'ai dit mon sentiment sur ces questions dans mes *Nouvelles Etudes*, je me permets d'y renvoyer le lecteur que ces problèmes intéressent, ne voulant pas dépasser ici les limites d'un rapide aperçu.

SUR LE RAYON DE COURBURE DES CONIQUES

par M. **V. Jamet**, professeur au lycée de Marseille.

La lecture de l'article de M. Valiron, *Sur la courbure des courbes triangulaires*, février 1911, m'a conduit à me poser la question suivante :

Déterminer une courbe C, telle qu'à chaque point M de cette courbe correspondre un centre de courbure N, symétrique par rapport à M du point P, conjugué harmonique de M par rapport aux deux points où la normale au point M à la courbe C coupe une circonférence donnée O.

Soient x et y les coordonnées de M par rapport à deux axes rectangulaires issus du centre de la circonférence donnée. Nous rappelons que les coordonnées X, Y de N doivent vérifier les deux équations

$$(1) \qquad (X - x\,dx + Y - y\,dy = 0, \qquad X - x\,d^2x + Y - y\,d^2y - dx^2 - dy^2) = 0.$$

D'autre part, les coordonnées X', Y' de P doivent vérifier l'équation de la polaire du point M par rapport au cercle donné, savoir $xX' + yY' - R^2 = 0$, ou bien

$$x(X' - x) + y(Y' - y) + x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Mais on doit avoir $X' - x = -(X - x)$, $Y' - y = -(Y - y)$, et par conséquent

$$(2) \qquad x(X - x) + y(Y - y) - (x^2 + y^2 - R^2) = 0.$$

En éliminant $X - x$ et $Y - y$ entre les équations (1) et (2), on trouve

$$\begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ d^2x & d^2y & dx^2 + dy^2 \\ x & y & x^2 + y^2 - R^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$(x^2 + y^2 - R^2)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) + (dx^2 + dy^2)(x\,dy - y\,dx) = 0.$$

Telle est l'équation différentielle qu'il s'agit d'intégrer. Je dis qu'elle convient uniquement aux coniques admettant le cercle donné pour cercle orthoptique.

En effet, on peut la transformer comme il suit :

$$d\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2 - R^2} = 0.$$

Soient r et θ les coordonnées polaires du point M, V l'angle du rayon vecteur OM avec la tangente en M à la courbe C ; l'équation précédente peut encore être transformée de la manière suivante :

$$dV + d\theta + \frac{r^2 d\theta}{r^2 - R^2} = 0,$$

puis, en vertu de la formule $\operatorname{tg} V = \dfrac{rd\theta}{dr}$,

$$dV + \left(1 + \frac{r^2}{r^2 - R^2}\right)\operatorname{tg} V\frac{dr}{r} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\cos V}{\sin V}dV + \frac{dr}{r} - \frac{rdr}{r^2 - R^2} = 0.$$

En intégrant et désignant par A une constante arbitraire, on trouve

$$\log\sin V + \log r + \frac{1}{2}\log(r^2 - R^2) = \log A,$$

ou bien $r\sqrt{r^2 - R^2}\sin V = A$, ou encore

$$r^2\sqrt{r^2 - R^2}d\theta = A\sqrt{r^2 d\theta^2 - dr^2}.$$

On en déduit, successivement, $A^2 dr^2 = (r^4 - R^2 r^2 - A^2)r^2 d\theta^2 = r^6 - R^2 r^4 - A^2 r^2 d\theta^2$,

$$\pm d\theta = \frac{A dr}{r\sqrt{r^4 - R^2 r^2 - A^2}} = \frac{A\dfrac{dr}{r^3}}{\sqrt{1 - \dfrac{R^2}{r^2} - \dfrac{A^2}{r^4}}} = \frac{A\dfrac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 + \dfrac{R^4}{4A^2} - \left(\dfrac{A}{r^2} + \dfrac{R^2}{2A}\right)^2}}$$

et

$$\pm 2d\theta = d\left(\operatorname{arc\,cos}\frac{\dfrac{A}{r^2} + \dfrac{R^2}{2A}}{\sqrt{1 + \dfrac{R^4}{4A^2}}}\right).$$

On en déduit

$$\frac{A}{r^2} + \frac{R^2}{2A} = \sqrt{1 + \frac{R^4}{4A^2}}\cos 2(\theta - \theta_0),$$

θ_0 désignant une constante arbitraire.

Cette équation représente une conique ayant son centre à l'origine. Les longueurs x_0, y_0 de ses demi-axes correspondent à $\theta = \theta_0$ et $\theta = \theta_0 + \dfrac{\pi}{2}$.

On trouve ainsi

$$\frac{A}{r_0^2} = \frac{-R^2}{2A} + \sqrt{1 + \frac{R^4}{4A^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{R^4}{4A^2}} - \dfrac{R^2}{2A}}, \qquad x_0^2 = A\left(\frac{R^2}{2A} + \sqrt{1 + \frac{R^4}{4A^2}}\right)$$

$$\frac{A}{r_1^2} = \frac{-R^2}{2A} - \sqrt{1 + \frac{R^4}{4A^2}} = \frac{1}{-\sqrt{1 + \dfrac{R^4}{4A^2}} - \dfrac{R^2}{2A}}, \qquad y_0^2 = A\left(\frac{R^2}{2A} - \sqrt{1 + \frac{R^4}{4A^2}}\right).$$

et finalement $x_0^2 - y_0^2 = R^2$, ce qui démontre la proposition énoncée.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Concours de 1910.

Mathématiques spéciales.

1890. — *On considère deux paraboloïdes hyperboliques équilatères égaux, P et Q, qui ont même axe et même sommet.*

1° *On demande de trouver toutes les droites* D *dont les conjuguées* D′ *et* D″ *par rapport à* P *et* Q *sont dans un même plan (on ne considère que des droites réelles situées à distance finie). Montrer que deux droites* D′ *et* D″ *qui correspondent à une même droite* D *sont à la même distance de l'axe des paraboloïdes, qu'elles font le même angle avec l'axe et que leurs projections sur un plan perpendiculaire à cet axe font un angle constant.*

2° *On considère une droite* D *particulière, que l'on désigne par* D_1 ; *on prend sa conjuguée* D_2 *par rapport au paraboloïde* P, *puis on prend la conjuguée* D_3 *de* D_2 *par rapport au paraboloïde* Q, *et ainsi de suite, de telle sorte qu'une droite* D_{2p} *soit conjuguée de la droite* D_{2p-1} *par rapport à* P *et qu'une droite* D_{2q+1} *soit conjuguée de la droite* D_{2q} *par rapport à* Q ; *étudier la distribution de ces droites.*

3° *Une droite* D *se déplace en faisant un angle constant avec l'axe des paraboloïdes et de façon que les surfaces engendrées par* D′ *et* D″ *fassent un angle constant au point commun à* D′ *et* D″ ; *quelle surface engendre* D ? *quelles surfaces engendrent* D′ *et* D″ *et quel est le lieu du point commun à* D′ *et* D″ ? *ce lieu peut-il être situé sur la surface engendrée par* D ? *(On indiquera un mode de génération simple de ces diverses surfaces.)*

Les deux paraboloïdes hyperboliques équilatères égaux, P et Q, de même axe et de même sommet, sont deux quadriques bitangentes : tangentes en leur sommet et au point à l'infini de leur axe. Leur intersection se décompose donc en deux coniques, deux paraboles ayant toutes deux même sommet et même axe que les paraboloïdes.

Il est aisé de voir qu'elles sont situées dans deux plans rectangulaires, et que par rapport à chacun de ces plans chacun des paraboloïdes est symétrique de l'autre.

Nous prendrons ces plans pour plans de coordonnées, des yz et des zx respectivement ; l'axe des paraboloïdes sera ainsi l'axe des z.

Nous prendrons l'origine O au sommet commun, et pour plan des xy le plan tangent commun. Dans ces conditions, les équations des deux paraboloïdes donnés seront respectivement

$$\text{P} \qquad Ax^2 - Ay^2 + 2Bxy - 2Cz = 0,$$

$$\text{Q} \qquad Ax^2 - Ay^2 - 2Bxy + 2Cz = 0.$$

Nous représenterons la droite D par ses équations paramétriques

$$\text{D} \qquad x = \frac{\alpha + \xi\alpha'}{1 + \xi}, \qquad y = \frac{\beta + \xi\beta'}{1 + \xi}, \qquad z = \frac{\gamma + \xi\gamma'}{1 + \xi},$$

α, β, γ et α', β', γ' étant respectivement les coordonnées de deux points de cette droite.

Nous obtiendrons les équations de la conjuguée D′ de D par rapport à P en formant les équations des plans polaires de ces deux points (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ par rapport à ce paraboloïde P. Nous obtiendrons d'une façon analogue les équations de la conjuguée D″ de D par rapport à Q. Nous arrivons ainsi aux équations suivantes pour ces deux droites :

$$\text{D}' \quad A\alpha x - B\beta x + (-A\beta + B\alpha)y + Cz + C\gamma = 0, \qquad (A\alpha' x - B\beta' x + (-A\beta' + B\alpha')y + Cz + C\gamma' = 0.$$

$$\text{D}'' \quad A\alpha x - B\beta x + (-A\beta - B\alpha)y + Cz + C\gamma = 0, \qquad (A\alpha' x - B\beta' x + (-A\beta' - B\alpha')y + Cz + C\gamma' = 0.$$

Exprimons que ces deux droites sont situées dans un même plan, autrement dit que les quatre

équations que nous venons d'écrire ont une solution commune, finie ou infinie. Nous obtenons la condition

$$\begin{vmatrix} A\alpha + B'\beta & -A\beta + B'\alpha & C & C\gamma \\ A\alpha' + B'\beta' & -A\beta' + B'\alpha' & C & C\gamma \\ A\alpha - B'\beta & -A\beta - B'\alpha & C & C\gamma \\ A\alpha' - B'\beta' & -A\beta' - B'\alpha' & C & C \end{vmatrix} = 0.$$

Ajoutant et retranchant la première et la troisième ligne, ajoutant et retranchant la seconde et la quatrième, on peut simplifier cette condition, qui devient, en divisant par 16,

$$\begin{vmatrix} A\alpha & -A\beta & C & C\gamma \\ B'\beta & B'\alpha & 0 & 0 \\ A\alpha' & -A\beta' & C & C\gamma' \\ B'\beta' & B'\alpha' & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en divisant encore par $C^2B''^2$ et retranchant la troisième ligne de la première,

$$\begin{vmatrix} A(\alpha - \alpha') & -A(\beta - \beta') & 0 & \gamma - \gamma' \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ A\alpha' & -A\beta' & 1 & \gamma' \\ \beta' & \alpha' & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Le déterminant se développe à vue et la relation s'écrit enfin $(\gamma - \gamma')(\alpha\beta' - \beta\alpha') = 0$.

Ainsi les droites D dont les conjuguées D′ et D″ par rapport à P et Q sont dans un même plan seront d'abord toutes les droites pour lesquelles on a $\gamma - \gamma' = 0$, c'est-à-dire toutes les droites perpendiculaires à l'axe Oz, axe commun des paraboloïdes, puis toutes les droites pour lesquelles on a $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 0$ ou $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$, c'est-à-dire toutes les droites qui rencontrent l'axe des z, à distance finie ou infinie.

Le pôle d'un plan perpendiculaire à l'axe commun des paraboloïdes P et Q étant le même par rapport à ces deux paraboloïdes, il était évident que les deux conjuguées D′ et D″ d'une droite D perpendiculaire à l'axe seraient dans un même plan, passant l'une et l'autre par le pôle du plan contenant D et perpendiculaire à l'axe. En ce cas, le point commun à D′ et D″ est sur l'axe des z le symétrique par rapport à l'origine, sommet des paraboloïdes, du pied sur cet axe de la perpendiculaire commune à la droite D et à cet axe. Il était évident aussi que les deux conjuguées d'une droite D rencontrant l'axe seraient dans un même plan, le plan polaire du point commun à D et à l'axe. Il serait facile encore, quoique ce soit moins immédiat, de montrer géométriquement qu'il n'y a pas d'autres droites D que celles-là, dont les conjuguées D′ et D″ soient dans un même plan.

Pour avoir la distance de D′ à l'axe des paraboloïdes Oz, nous allons former l'équation dans le plan des xy de la projection de D′ sur ce plan, et nous calculerons la distance de cette nouvelle droite à l'origine des coordonnées. Entre les deux équations de D′ éliminons z. Nous avons

$$\text{proj. } D' \quad (A\alpha - \alpha') + B(\beta - \beta')x + (-A\beta - \beta') + B(\alpha - \alpha')y + C(\gamma - \gamma') = 0,$$

et de même

$$\text{proj. } D'' \quad (A\alpha - \alpha') + B(\beta - \beta')x + (-A\beta - \beta') + B(\alpha - \alpha')y + C(\gamma - \gamma') = 0.$$

Si l'on forme la somme des carrés des coefficients de x et de y dans l'équation de la projection de D′, les deux termes rectangles se détruisent, et il ne reste que les quatre termes carrés. Ainsi a-t-on pour expression de la distance de cette projection de D′ à l'origine des coordonnées

$$\frac{C(\gamma - \gamma')}{\sqrt{A^2(\alpha - \alpha')^2 + B^2(\beta - \beta')^2 + A^2(\beta - \beta')^2 + B^2(\alpha - \alpha')^2}} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \frac{\gamma - \gamma'}{\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2}}.$$

On obtient d'ailleurs la même expression pour la distance de la projection de D' à l'origine, ce que l'on peut voir sans calcul aucun, puisque D'' ne diffère de D' que par le signe de B', et que dans cette expression B' n'entre que par son carré. Nous avons bien montré que les droites D' et D'' sont à la même distance de l'axe Oz. Mais ce fait est vrai d'ailleurs pour les conjuguées par rapport à P et à Q d'une droite D absolument quelconque, et non pas seulement d'une droite du complexe que nous étudions, puisqu'on n'a pas fait usage de la relation $\alpha - \gamma + \beta(\beta - \alpha) = 0$.

L'expression trouvée ci-dessus montre d'ailleurs que si l'on a $\alpha - \gamma = 0$, c'est-à-dire si l'on considère une droite D qui fasse partie du complexe étudié comme perpendiculaire dans l'espace à Oz, les droites D' et D'' seront à une distance nulle de Oz, et par conséquent feront partie encore du complexe, mais comme s'appuyant sur Oz. Nous avions déjà, plus haut, mis ce fait en évidence géométriquement.

Désignons par ξ, η, ζ les cosinus directeurs de la droite D. Ils seront donnés par les équations

$$A\xi - B\eta + C\zeta = 0, \qquad A\xi - B\eta - \Delta\zeta = 0,$$
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Et l'on a

$$\frac{\xi}{\begin{vmatrix} -\Delta\beta - B\alpha & C \\ -A\alpha - B\gamma & C \end{vmatrix}} = \frac{\eta}{\begin{vmatrix} C & A\alpha + B\gamma \\ C & A\beta + B\alpha \end{vmatrix}} = \frac{\zeta}{\begin{vmatrix} A\gamma + B\alpha & -\Delta\beta - B\alpha \\ A\beta + B\gamma & -A\beta + B\alpha \end{vmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma\Delta^2}},$$

$\Sigma\Delta^2$ étant la somme des carrés de ces trois déterminants. Ceci peut s'écrire

$$\frac{\xi}{C - A\beta - \alpha - B\gamma + \alpha} = \frac{\eta}{C - A\beta - \alpha - B\gamma - \alpha} = \frac{\zeta}{-(A^2 + B^2)(\alpha - \gamma)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(C - A^2 - B^2)(\alpha - \gamma)^2 + (C - \alpha - \gamma - A^2 - B^2)(\alpha - \gamma)^2}}.$$

Finalement on tire de là la valeur suivante de ζ, où nous n'avons pas à nous occuper du signe, puisqu'il y a des radicaux :

$$\zeta = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}(\alpha - \gamma)}{\sqrt{(C - \alpha - \gamma - A^2 - B^2)(\alpha - \gamma)^2 + (C - A^2 - B^2)(\alpha - \gamma)^2}}.$$

Le cosinus ζ' de l'angle que fait la droite D'' avec Oz aura la même valeur que ζ, comme on pourrait le vérifier directement, mais comme il est d'ailleurs bien évident, puisque, dans l'expression de ζ, B n'entre que par son carré. On a donc $\zeta = \zeta'$, et les deux droites D' et D'' font le même angle avec l'axe des paraboloïdes Oz. Ce fait d'ailleurs est vrai non seulement des conjuguées D' et D'' d'une droite D du complexe étudié, mais aussi des conjuguées par rapport aux deux paraboloïdes respectivement d'une droite D quelconque de l'espace. Enfin l'expression trouvée pour ζ nous montre que si l'on a $\alpha\beta - \beta\alpha = 0$, c'est-à-dire que si l'on considère une droite D qui appartienne au complexe étudié comme s'appuyant sur Oz ou parallèle à Oz, la droite D, et aussi la droite D'' d'ailleurs, sera perpendiculaire à Oz dans l'espace, et par suite appartiendra au complexe. Nous avions déjà aperçu ce fait géométriquement. En définitive, si une droite D fait partie du complexe à quelque titre que ce soit, D' et D'' feront également partie du complexe, au même titre l'une et l'autre, mais non pas au même titre que D.

Nous entendons par là que, si l'on regarde ce complexe des droites D, dont les conjuguées D' et D'' par rapport à P et Q respectivement sont dans un même plan, comme formé de deux groupes, le groupe des droites perpendiculaires dans l'espace à l'axe des paraboloïdes, et le groupe des droites situées dans un même plan avec cet axe, groupes qui ont d'ailleurs en commun tout une congruence de droites, les droites D' et D'', conjuguées d'une droite D du complexe, font partie du groupe différent de celui de la droite D.

Nous avons vu que les droites D' et D'' qui correspondent à une même droite D sont à la même

distance de l'axe des paraboloïdes, qu'elles font le même angle avec cet axe ; mais cette distance et cet angle sont variables avec la droite D. Nous allons maintenant rencontrer un élément invariable quelle que soit la droite D : l'angle des deux projections de D′ et D″ sur le plan des xy.

Désignons cet angle par V, et rappelons que si l'on a deux droites d'équations respectives en géométrie analytique plane

$$D_1 \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad D_2 \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

la tangente de l'angle V est donnée par la formule $\operatorname{tg} V = \dfrac{A_1B_2 - B_1A_2}{A_1A_2 + B_1B_2}$ en valeur absolue et même en signe si l'on convient de considérer la droite D_1 comme le premier côté de l'angle et la droite D_2 comme le second.

Si nous prenons alors pour droite D_1 la droite D′ et pour droite D_2 la droite D″, on aura

$$A_1 = A(\alpha - \alpha') + B''(\beta - \beta'), \qquad B_1 = -A(\beta - \beta') + B''(\alpha - \alpha'),$$

$$A_2 = A(\alpha - \alpha') - B''(\beta - \beta'), \qquad B_2 = -A(\beta - \beta') - B''(\alpha - \alpha'),$$

d'où

$$\operatorname{tg} V = \frac{-2AB''[(\alpha - \alpha')^2 - (\beta - \beta')^2]}{(A^2 - B''^2)[(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2]} = \frac{-2AB''}{A^2 - B''^2}.$$

On voit que les coordonnées α, β, γ et α', β', γ' des deux points qui déterminent la droite D n'entrent pas dans l'expression de tg V. Cet angle V est donc bien indépendant de la droite D particulière que l'on a choisie. Remarquons encore ici que nous n'avons pas fait usage de la relation qui exprime que D′ et D″ sont dans un même plan.

Par suite la proposition est vraie non seulement des projections des conjuguées D′ et D″ d'une droite D du complexe étudié, mais encore des projections des conjuguées d'une droite quelconque de l'espace.

Revenons à l'expression de tg V. Si l'on pose $\dfrac{B''}{A} = \operatorname{tg} U$, on a $\operatorname{tg} V = \dfrac{-2 \operatorname{tg} U}{1 - \operatorname{tg}^2 U}$, c'est-à-dire $V = -2U$. Or il est aisé, par un calcul que nous ne développerons pas ici, de constater que c'est par une rotation autour de l'axe commun mesurée par le nombre $-U$ que l'on amènera le paraboloïde P en coïncidence avec le paraboloïde Q. Je dis alors qu'une rotation autour du même axe, double de celle-là en grandeur et de même signe, amènera D′ en coïncidence avec D″. Il résulte tout d'abord de ce que nous venons de voir que par une telle rotation appliquée à D on amènera la projection de D′ sur le plan des xy à être parallèle à la projection de D″. Si nous avons affaire aux conjuguées d'une droite D du complexe rectangulaire dans l'espace sur l'axe des z, lesquelles coupent toutes deux au même point cet axe, la rotation considérée a amené la projection de D′ en coïncidence avec la projection de D″, et, puisque D′ et D″ font le même angle avec l'axe des z, *a priori* deux hypothèses seulement sont possibles : ou bien D′ a été amené en coïncidence avec D″ ; ou bien D′ a été amené en coïncidence avec la symétrique de D″ par rapport à l'axe des z. Or on peut voir que cette seconde hypothèse est inadmissible : elle est visiblement absurde pour le cas où l'angle U est une quantité infiniment petite, car dans ce cas D′ diffère infiniment peu de D″, et un mouvement infiniment petit comme est la rotation mesurée par le nombre infiniment petit $V = -2U$, peut bien amener D′ en coïncidence avec D″, mais ne peut pas l'amener en coïncidence avec la symétrique de D″ qui n'est pas une droite infiniment voisine. Et si maintenant nous supposons qu'on déplace d'une façon continue par rotation autour de l'axe Oz les deux paraboloïdes, en sorte que l'angle U, d'abord infiniment petit, prenne telle valeur finie que l'on voudra, D′ et D″ varieront d'une manière continue ; et puisqu'au début la rotation $V = -2U$ amenait D′ en coïncidence avec D″ et non avec la symétrique de D″, puisque nous avons vu par ailleurs que cette rotation amène D′ en coïncidence forcément avec D″ ou avec sa symétrique, qu'il ne peut bien évidemment y avoir un brusque changement, il résulte que, pour toute valeur de U, la rotation V amènera la droite D′ en coïncidence avec D″ et non pas avec la symétrique de D″.

Si nous avons affaire aux conjuguées d'une droite D du complexe qui s'appuie sur l'axe des z, lesquelles sont dans un même plan perpendiculaire à cet axe, ces droites étant à même distance de l'axe, seront tangentes à un même cercle ayant son centre sur l'axe. La rotation V opérée sur D′, qui doit amener leurs projections sur le plan des xy, et par conséquent elles-mêmes, à être parallèles, ne peut que les amener à être en coïncidence, ou à avoir la position de deux tangentes à un même cercle, parallèles, diamétralement opposées. Des considérations de continuité, en tout analogues aux précédentes, montrent que la seconde hypothèse est inadmissible. En définitive, nous arrivons bien à la conclusion annoncée, et qui d'ailleurs est vraie des conjuguées D′ et D″ d'une droite quelconque de l'espace [1] : une rotation double, en grandeur et de même signe, de celle effectuée autour de l'axe commun des paraboloïdes P et Q qui amène P en coïncidence avec Q, amènera, effectuée autour de ce même axe, D′ en coïncidence avec D″.

On pourrait établir analytiquement ce que nous avons établi par des considérations géométriques de continuité, par une rotation d'axes ; de même aussi que l'on aurait pu établir géométriquement ce que nous avons montré analytiquement [illegible] — 21 [illegible].

2° Nous avons vu que les droites D′ et D″ qui correspondent à une droite D du complexe étudié font aussi partie de ce complexe. Il en résulte immédiatement que si la droite D particulière que mentionne l'énoncé fait partie de ce complexe, il en sera de même de toute droite D_n de la série envisagée. Observons que si l'on prend la droite D_{2p} pour droite D, les droites D′ et D″ qui lui correspondent sont respectivement D_{2p-1} et D_{2p+1} ; que si l'on prend la droite D_{2p+1} pour droite D, les droites D′ et D″ qui lui correspondent sont respectivement D_{2p+2} et D_{2p}.

Supposons que la droite D_1 soit perpendiculaire à Oz dans l'espace, D_2 s'appuiera sur Oz, D_3 sera perpendiculaire à Oz dans l'espace, et ainsi de suite.

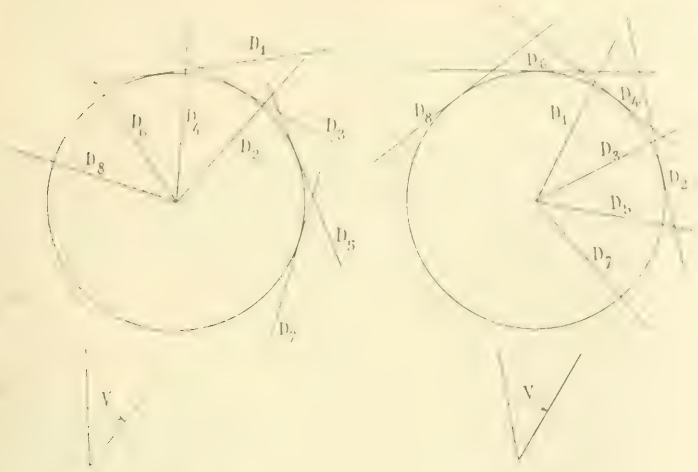
Toutes les droites d'indice pair s'appuieront sur Oz, toutes au même point et toutes faisant le même angle avec l'axe, ce que l'on montre de proche en proche puisqu'il en est ainsi de deux consécutives. Ce sont par conséquent des génératrices d'un même cône de révolution autour de l'axe des z. Les projections de deux consécutives D_{2p} et D_{2p+2}, sur le plan des xy feront entre elles l'angle $-V$, étant conjuguées par rapport à Q et à P respectivement de D_{2p+1}. Toutes les droites d'indice impair seront dans un même plan perpendiculaire à l'axe des paraboloïdes, tangentes à un même cercle ayant son centre sur cet axe, puisqu'il en est ainsi de deux consécutives. Deux consécutives D_{2p-1} et D_{2p+1} feront entre elles l'angle V, étant conjuguées par rapport à P et Q respectivement de D_{2p}.

Supposons que la droite D_1 s'appuie sur Oz. Ce seront les droites d'indice impair qui s'appuieront toutes sur Oz au même point (formant la figure des baleines d'un parapluie à moitié ouvert), et les droites d'indice pair qui seront les tangentes à un même cercle admettant l'axe Oz pour axe. Les résultats sont donc analogues aux précédents. Cependant deux droites consécutives impaires font encore entre elles l'angle V, et deux droites consécutives paires l'angle $-V$. Si bien que dans le second cas on tournera sur le cercle dans le sens suivant lequel on tournait sur le cône dans le premier cas, et réciproquement. Les figures ci-dessous donnent dans les deux cas les projections sur le plan des xy.

---

(1) On le montrerait en se basant sur ce que l'angle des positions de D′ et D″ à chaque même valeur V, excepté que la droite D ne fait plus partie du complexe étudié, sur [illegible] que D′ et D″ font toujours [illegible] avec Oz et sont à la même distance de cet axe, et par continuité en partant du cas où D fait partie du complexe étudié, de l'un ou de l'autre groupe en lesquels il se subdivise, pour venir progressivement prendre la position que l'on envisage. Si on part d'une position de D perpendiculaire à Oz dans l'espace, on voit que D′ ne peut arriver en coïncidence qu'avec une droite déduite de D″ par une translation parallèle à Oz [illegible] droite déduite de la symétrique de D″ par rapport à l'origine des coordonnées par une translation analogue. Si on part d'une position de D s'appuyant sur Oz, on voit que D′ ne peut arriver en coïncidence qu'avec une droite des deux séries déduites par translation parallèle à Oz de D″ et de la symétrique de D″ par rapport au plan des xy respectivement. En rapprochant ces deux conclusions, on voit que D′ arrive en coïncidence avec une droite déduite de D″ par translation parallèle à Oz. Pour établir que D′ vient en coïncidence avec la droite D″ elle-même, on montre que le pied sur Oz de la perpendiculaire commune à Oz et D′, et le point analogue relatif à D″ sont deux points confondus, étant l'un et l'autre symétriques par rapport à l'origine des coordonnées du pied sur Oz de la perpendiculaire commune à Oz et à D.

Si l'angle U de la rotation qui amène P en coïncidence avec Q est commensurable avec la circonférence entière (ou autrement dit si la mesure de cet angle en radians est commensurable avec π), il n'y a qu'un nombre fini de droites différentes dans la série infinie $D_1, D_2, D_3, \ldots D_n \ldots$, car une période s'établit. Dans le cas contraire, on obtient des droites toutes différentes, qui sont ou tangentes à un cercle d'axe Oz, et telles que sur tout arc de ce cercle il y ait une infinité de points de contact, ou génératrices d'un cône de révolution autour de Oz, et telles que tout angle rectiligne tracé sur ce cône (avec le sommet du cône pour sommet de l'angle) en contienne une infinité.



Premier cas. Deuxième cas.

Le plan du cercle coupe l'axe des z au symétrique par rapport à l'origine des coordonnées du sommet du cône. Ce n'est là qu'une autre forme de la proposition que nous avons établie géométriquement en montrant tout au début que les droites D perpendiculaires dans l'espace à l'axe sont des droites du complexe étudié. Le sommet du cône doit être en effet le pôle, par rapport à l'un et à l'autre des paraboloïdes d'ailleurs, du plan du cercle.

D'autre part, l'ouverture du cône n'est fonction que du rayon du cercle, et plus ce rayon est grand, plus cette ouverture est petite ; c'est ce que nous établirons dans la troisième partie.

Indiquons seulement que si la droite D_1, de laquelle on part, était quelconque dans l'espace, toutes les droites d'indices impairs seraient génératrices d'un même système d'un hyperboloïde de révolution autour de Oz, que toutes les droites d'indice pair seraient génératrices d'un même système de l'hyperboloïde de révolution autour de Oz, polaire réciproque du précédent par rapport au paraboloïde P aussi bien d'ailleurs que par rapport au paraboloïde Q. Ce seraient en quelque sorte les systèmes de génératrices différents dans l'un et l'autre hyperboloïde. Nous entendons par là qu'un observateur Oz s'il voit les droites impaires dirigées de bas en haut de gauche à droite, voit les droites paires dirigées de bas en haut de droite à gauche.

3° On obtient une solution peu intéressante de la troisième partie en supposant que la droite D se déplace en restant perpendiculaire dans l'espace à l'axe des paraboloïdes, en engendrant par conséquent une surface réglée astreinte seulement à avoir pour plan directeur le plan tangent au sommet commun des deux paraboloïdes. La surface engendrée par D' et D'' est une surface réglée à deux nappes admettant pour génératrice double l'axe commun des paraboloïdes. Le lieu du point commun à D' et D'' est alors cet axe lui-même. D'ailleurs les deux nappes se coupent bien tout au long de cet axe sous un angle constant qui est l'angle V. En effet le plan tangent à la nappe engendrée par D' par exemple en un point donné de l'axe des z est déterminé par cette droite D' et par l'axe des z. C'est en d'autres termes le plan projetant D' sur le plan des xy. Le plan tangent au même point à l'autre nappe sera de même le plan projetant D''. En définitive, l'angle des deux nappes en ce point est bien l'angle V et est par suite constant. Nous avons bien là une solution très générale du problème proposé.

Supposons maintenant que nous prenons les droites D parmi celles du second groupe, celles qui s'appuient sur l'axe des z. Nous allons montrer d'abord que cette droite se déplaçant par hypothèse, faisant un angle constant avec l'axe des z, les droites D' et D'' resteront à une distance constante de

l'axe. En effet, nous avions trouvé, pour expression de la distance de D′ et D″ à l'axe des z,

$$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\,\frac{\gamma-\gamma'}{\sqrt{(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2}}.$$

Si nous désignons par φ l'angle que fait avec le plan des xy la droite D, en gardant nos notations antérieures, nous avons $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\gamma-\gamma'}{\sqrt{(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2}}$, d'où, pour expression de la distance de D′ et D″ à Oz, $\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\operatorname{tg}\varphi$.

Cette distance est donc bien constante avec l'angle φ de la droite D et de l'axe des paraboloïdes.

Mais de ce que D′ et D″ seront à une distance constante de l'axe, et de ce que ces droites, dans le cas actuel, situées dans un même plan perpendiculaire à cet axe, font entre elles un angle V constant, résulte immédiatement que leur point commun restera à une distance constante de l'axe,

$$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\frac{V}{2}} = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}} = \frac{C}{A}\operatorname{tg}\varphi.$$

Le lieu de ce point sera tracé sur un cylindre de révolution autour de l'axe des paraboloïdes. Considérons une position particulière de ce point, et construisons les plans tangents en ce point aux deux nappes de la surface engendrée par D′ et D″. L'un de ces plans tangents sera déterminé par la droite D′ et par la tangente au lieu du point commun à D′ et D″, l'autre par la droite D″ et la même tangente. Ces trois droites forment un trièdre dont une des faces a une grandeur invariable $\pi - V$.

L'arête opposée est astreinte à être dans le plan perpendiculaire à la bissectrice de cette première face, et de plus à déterminer un dièdre de grandeur invariable. De simples considérations de géométrie élémentaire amènent immédiatement à conclure que cette dernière arête doit faire avec la face opposée un angle constant. Il en résulte immédiatement que le lieu du point commun à D′ et D″ ne peut être qu'une hélice tracée sur le cylindre que nous avons mentionné ci-dessus, et l'on voit d'ailleurs que si le lieu est une telle hélice, les surfaces engendrées par D′ et D″ respectivement se couperont tout le long de leur intersection sous un angle constant.

La droite D s'appuie sur Oz au point symétrique par rapport à l'origine des coordonnées du point d'intersection de l'axe Oz avec le plan de D′ et D″. De là résulte que si le point commun à D′ et D″ s'élève d'une certaine quantité, le point commun à D et Oz s'abaisse de la même quantité. De plus, les projections de D et D′ sur le plan des xy étant en direction symétriques par rapport aux plans asymptotiques du paraboloïde P, si D′ tourne aussi d'un certain angle autour de Oz, D tournera de l'angle égal en valeur absolue mais de signe contraire autour du même axe. Les réciproques sont vraies pour les mêmes raisons. Par suite, si nous nous astreignons à prendre les droites D parmi celles qui s'appuient sur Oz, il existe au problème proposé la série de solutions que nous allons dire, mais il n'en existe pas d'un autre genre.

La droite D se déplace en faisant un angle constant avec l'axe des paraboloïdes, sur lequel elle s'appuie, et en s'appuyant en outre sur une hélice tracée sur un cylindre de révolution autour de l'axe Oz et de pas arbitraire. Par suite elle engendre une surface réglée admettant pour cône directeur un cône de révolution autour de Oz, et pour directrices l'axe Oz et l'hélice que nous venons de désigner. Cette surface coupe d'ailleurs un cylindre quelconque de révolution autour de Oz suivant deux hélices, de même pas, de même sens, qui seront confondues lorsque le rayon du cylindre aura des valeurs convenables (telles que le diamètre multiplié par la tangente de l'angle φ soit un multiple impair du demi-pas).

Sur tous les cylindres de révolution autour de Oz, les hélices déterminées par la surface envisagée auront même pas. Le lieu du point commun à D′ et D″ est une hélice tracée sur le cylindre de révolu-

tion autour de Oz et de rayon $\frac{C}{A}\operatorname{tg}\varphi = \frac{C}{A}\frac{\gamma-\gamma'}{\sqrt{(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2}}$.

Cette hélice a même pas que les précédentes. Les surfaces engendrées par D et D′ respectivement sont des surfaces réglées à plan directeur perpendiculaire sur l'axe des paraboloïdes admettant pour directrice l'hélice lieu du point commun à D′ et D″. Chacune d'elles est tangente au cylindre de rayon $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\operatorname{tg}\varphi$, tout le long d'une hélice ayant toujours le même pas, et de même sens toutes deux que l'hélice lieu du point commun à D′ et D″. Elles sont en définitive constituées par les tangentes menées à ce cylindre, parallèlement au plan des xy, par tous les points de l'hélice, lieu des points communs à D′ et D″. Tout le long de cette hélice ces surfaces se coupent sous un angle constant.

Supposons par exemple qu'en même temps que la droite D s'élève elle tourne autour de Oz dans le sens positif. Dans ces conditions, en même temps que le point commun à D′ et D″ s'abaissera, il tournera autour de Oz dans le sens négatif. Par suite, l'hélice lieu de ce point, et les deux hélices intersection de la surface lieu de D avec le cylindre de rayon $\frac{C}{A}\operatorname{tg}\varphi$ sur lequel la première est tracée, seront trois hélices de même sens. Elles ont même pas aussi, puisque D s'élève de la même quantité dont le point commun à D′ et D″ s'abaisse, et qu'en même temps la droite D et ce point tournent du même angle toujours autour de Oz. Par conséquent, pour savoir si la première hélice est confondue avec l'une des deux autres, en d'autres termes si le lieu du point commun à D′ et D″ est sur la surface lieu de D, il faut savoir seulement si cette première hélice a un point commun avec les autres. C'est en quelque sorte une question de conditions initiales.

Supposons que sans effectuer aucune translation, on fasse subir à la surface lieu de D une rotation positive de valeur 2π autour de l'axe Oz. D'après ce que nous avons indiqué sur la relation qui existe entre les mouvements de rotation de D et D′ respectivement autour de Oz, qui sont toujours égaux en valeur absolue mais de signes contraires, à cette rotation positive de la surface lieu de D autour de Oz correspondra une rotation négative, égale en valeur absolue, autour du même axe de l'hélice lieu du point commun à D′ et D″.

Dans ce mouvement il arrivera quatre fois que cette hélice coïncidera avec l'une des deux autres. Donc, en général, le lieu du point commun à D′ et D″ n'est pas sur la surface lieu de D, mais il est *possible* que cette hélice soit tracée sur cette surface. Si l'on s'est donné le pas de l'hélice directrice de la surface lieu de D et l'angle φ des droites D avec les plans normaux à l'axe des paraboloïdes, il existe passant par tout point de l'axe des z quatre droites D deux à deux diamétralement opposées sur un même cône de révolution autour de Oz, qui, prises comme positions initiales, conduiront à une surface lieu des droites D sur laquelle sera tracé le lieu correspondant du point commun à D′ et D″. Ces quatre droites se réduiront à deux, symétriques par rapport à l'axe Oz, dans le cas où les deux hélices, intersection de la surface lieu de D avec le cylindre de révolution autour de Oz et de rayon $\frac{C}{A}\operatorname{tg}\varphi$ sur lequel est tracé l'hélice lieu du point commun à D′ et D″, viennent à se confondre. Ce fait se produit lorsque le demi-pas est contenu un nombre impair de fois dans le produit du diamètre du cylindre par la tangente de l'angle φ, lorsque, le pas étant h, on a choisi φ et h en sorte que l'on ait

$$2\frac{C}{A}\operatorname{tg}^2\varphi = (2k+1)\frac{h}{2},$$

k étant un entier.

(J. G.)

Solutions satisfaisantes : MM. A. Rousseau, à Fourmies ; R. Dontot, élève à l'École normale supérieure.
Solutions passables : MM. G. Lach, à Rodez ; L. Bastin, lieutenant au 1er régiment d'artillerie coloniale.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES (*Concours de 1909*.

Places réservées aux sous-ingénieurs et contrôleurs.

1902. — *Intégrer l'équation différentielle* $\frac{d^5y}{dx^5} - 5x + 4 = 0$.

Le candidat exprimera la forme de la solution générale avec des paramètres réels, mais sans rechercher leur valeur numérique.

De l'équation $\frac{d^5y}{dx^5} = 5x - 4$ on déduit successivement en intégrant cinq fois de suite et en désignant par C_1, C_2, ..., C_5 des constantes arbitraires,

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 5\frac{x^2}{2} - 4x + C_1,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 5\frac{x^3}{2.3} - 4\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 5\frac{x^4}{2.3.4} - 4\frac{x^3}{2.3} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3,$$

$$\frac{dy}{dx} = 5\frac{x^5}{2.3.4.5} - 4\frac{x^4}{2.3.4} + C_1\frac{x^3}{2.3} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4,$$

$$y = 5\frac{x^6}{2.3.4.5.6} - 4\frac{x^5}{2.3.4.5} + C_1\frac{x^4}{2.3.4} + C_2\frac{x^3}{2.3} + C_3\frac{x^2}{2} + C_4x + C_5.$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation proposée.

A. ROUSSEAU, à Fourmies-en-Weppes.

Solutions identiques par MM. André Courbois, à Sedan ; C. Jaquet, à Grenoble ; G. Lacan, à Rodez ; R. Masen, à Albi ; André Nicole, à Bordeaux ; J. Soubeyrand, à Mont-de-Marsan.

1903. — *Calculer l'intégrale* $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 - 3x - 1}$.

Comme l'équation $f(x) = x^3 - 3x - 1 = 0$ n'a que des racines incommensurables, nous calculerons l'intégrale proposée par la méthode des trapèzes en divisant l'intervalle (0,1) en 10 parties égales.

Nous appliquerons la formule connue

$$S = \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n). \qquad \left| y = \frac{1}{f(x)} \right|$$

qui devient ici, en posant $a = 0$, $b = 1$, $n = 10$, $S = \frac{1}{20}(y_0 + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_9) + y_{10})$.

On obtient aisément

$f(0) = -1$, $f(0,1) = -1,299$, $f(0,2) = -1,592$, $f(0,3) = -1,873$,
$f(0,4) = -2,136$, $f(0,5) = -2,375$, $f(0,6) = -2,584$, $f(0,7) = -2,757$,
$f(0,8) = -2,888$, $f(0,9) = -2,971$, $f(1) = -3$.

En se servant de la règle à calcul, on trouve

$y_0 = -1$, $y_1 = -0,769$, $y_2 = -0,628$, $y_3 = -0,533$, $y_4 = -0,468$,
$y_5 = -0,421$, $y_6 = -0,387$, $y_7 = -0,362$, $y_8 = -0,346$, $y_9 = -0,336$,

$$y_{10} = -\frac{1}{3} = -0,333.$$

Puis

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_9 = -4,25,$$

et

$$S = \frac{1}{20}(-1 - 2 \times 4,25 - 0,333) = -0,491.$$

1904. — *On donne deux droites rectangulaires et un point A sur l'une d'elles ; on mène la tangente AT à une circonférence de rayon variable tangente aux deux droites. — Lieu du point de contact, construire ce lieu.*

Soient Δ et Δ' les deux droites rectangulaires données qui se coupent au point I. Supposons que le point A soit sur la droite Δ et désignons par a la longueur AI. Nous allons former l'équation du lieu en coordonnées polaires, en prenant comme pôle le point A et comme axe polaire la demi-droite AI, le sens positif de rotation étant arbitraire et indiqué par la flèche.

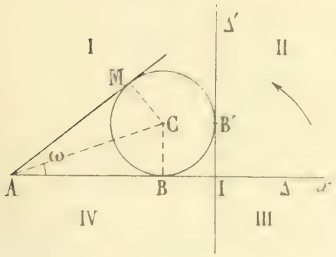


Fig. 1.

Les droites Δ et Δ' forment quatre angles droits que nous désignerons par les numéros I, II, III et IV.

Considérons d'abord un cercle C situé dans l'angle (I), touchant les droites Δ et Δ' aux points B et B', et menons la tangente AM à ce cercle. Soient $\rho = AM$, $\omega = \widehat{xAM}$ les coordonnées polaires du point M. Nous avons $\rho = AB = AI - BI = a - R$, R désignant le rayon du cercle ; puis, dans le triangle rectangle ACM, $MC = AM \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$, $R = \rho \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$.

On en déduit $\rho = a - \rho \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$, et

$$(1) \qquad \rho = \frac{a}{1 + \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}.$$

C'est l'équation du lieu demandé.

Si le point A est placé entre le point B et le point I (*fig.* 2), on a $\rho = AB = BI - AI = R - a$ et $R = \rho \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}$, ce qui donne

$$\rho = \frac{-a}{1 - \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}}.$$

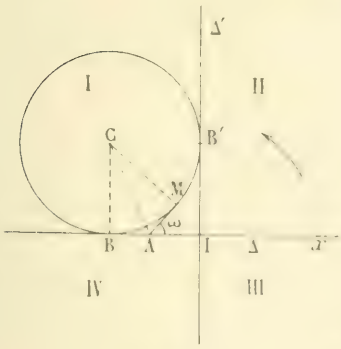


Fig. 2.

Cette équation représente la même courbe que l'équation (1), car elle s'en déduit en changeant ρ en $-\rho$ et ω en $\pi - \omega$.

Envisageons maintenant un cercle situé dans l'angle (III) (*fig.* 3). Dans cette hypothèse, l'angle xAM est égal à $-\omega$, et l'on a

$$\rho = AI - IB = a - R, \qquad \text{et} \qquad R = -\rho \operatorname{tg} \frac{\omega}{2},$$

Fig. 3.

et en éliminant ρ on retrouve l'équation (1).

On verra aisément, en opérant de la même manière, que si l'on considère des cercles tangents aux droites Δ et Δ', et situés dans les angles (II) et (IV), le lieu des points M correspondants est défini par l'équation

$$(2) \qquad \rho = -\frac{a}{1 - \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}.$$

qui représente une courbe symétrique de la courbe (1) par rapport à A.

Construisons la courbe $\rho = \dfrac{a}{1 + \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}$.

Si l'on change ω en $2\pi + \omega$, ρ ne change pas ; donc on obtiendra toute la courbe en faisant varier ω de 0 à 2π.

La fonction ρ est discontinue pour $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = -1$, ou $\frac{\omega}{2} = \frac{3\pi}{4}$, ce qui donne $\omega = \frac{3\pi}{2}$. De plus, pour $\omega = \pi$, $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$ est infini et ρ est égal à 0. La fonction $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$ étant croissante, ρ va sans cesse en diminuant.

ω	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
ρ	a	décroît	$\frac{a}{2}$	décroît	0	décroît	$-\infty$ | $-\infty$	décroît	a

On en déduit aisément la forme de la courbe.

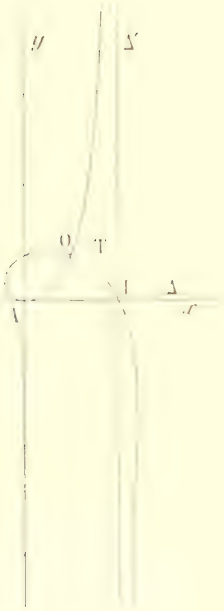


Fig. 1

Elle est tangente en A à l'axe polaire. Si l'on calcule $\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'}$, on a

$$\operatorname{tg} V = -\frac{2\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}}.$$

Pour $\omega = 0$, $\operatorname{tg} V = -2$, donc la tangente IT au point I fait avec l'axe polaire un angle obtus dont la tangente est égale à -2.

Cherchons l'asymptote correspondant à $\omega = \frac{3\pi}{2}$. Nous avons

$$\rho \sin\left(\omega - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{a\cos\omega}{1 - \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}, \quad \text{ou, en remplaçant } \cos\omega \text{ par } \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}},$$

$$\rho \sin\left(\omega - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{a\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}}.$$

Pour $\omega = \frac{3\pi}{2}$ on a $\lim \rho \sin\left(\omega - \frac{3\pi}{2}\right) = a$.

On en conclut que l'asymptote est la droite Δ. De plus

$$\rho \sin\left(\omega - \frac{3\pi}{2}\right) - a = \frac{a\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}} - a = -\frac{a\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}},$$

ce qui montre que la différence $\rho \sin\left(\omega - \frac{3\pi}{2}\right) - a$ est négative pour $\omega < \frac{3\pi}{2}$ et positive pour $\omega > \frac{3\pi}{2}$.

On en déduit la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Enfin le point double O correspond aux valeurs de ω qui vérifient l'équation

$$\frac{a}{1 + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}} - \frac{a}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi - \omega}{2}} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} - 1 = 0.$$

Cette équation peut encore s'écrire $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}} = 1$, ou $\operatorname{tg}\omega = 1$. On en tire $\omega = \frac{\pi}{4}$ et

$\omega = \frac{3\pi}{4}$, et par suite, $\frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{8}$ et $\frac{\omega}{2} = \frac{3\pi}{8}$.

Le point O est donc sur la bissectrice AO de l'angle xAy et l'on a $x = \frac{a}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Les coordonnées du point O sont $\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2}$.

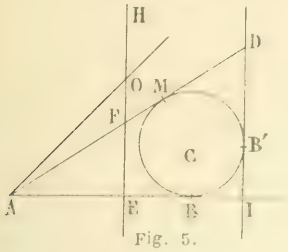


Fig. 5.

On déterminera aisément les tangentes en ce point, et on reconnaîtra qu'elles sont rectangulaires. D'ailleurs en passant aux coordonnées rectilignes on démontrera aisément que la courbe est une strophoïde ; c'est ce que nous allons établir géométriquement.

Le cercle C étant inscrit dans le triangle AID, on a

$$AM = \frac{AD + AI - DI}{2}.$$

Soit EH la perpendiculaire menée à AI en son milieu E, et soit F le point où cette perpendiculaire rencontre AM. La valeur de AM peut alors s'écrire

$$AM = AF + AE - EF, \qquad \text{ou} \qquad AM - AF = \frac{a}{2} - EF, \qquad \text{ou} \qquad FM + FE = \frac{a}{2}.$$

Si nous prenons sur EH la longueur $EO = \frac{a}{2}$, nous avons $FM = FO$, et nous voyons ainsi que le lieu du point M est une strophoïde ayant le point O pour point double, les tangentes en ce point étant les bissectrices de l'angle AOE.

R. THÉVENIN, à Reims.

Bonnes solutions par MM. E. N. Barisien ; G. Cazaux ; André Cochois, à Sedan ; E. Fouvry, à Rouen ; Gustave Lemaire, à Aire-sur-Adour ; G. Lach, à Rodez ; R. Manin, à Albi ; A. Negre, à Bordeaux ; Jean Oyvesnitzer, lycée de Nancy ; A. Rousseau, à Fournes en Weppes ; J. Soubaigné, à Mont-de-Marsan.

QUESTIONS PROPOSÉES

1943. — Étant donnés un triangle rectangle AOB et une droite OD, on considère la parabole P et l'hyperbole équilatère H telles que, pour chacune de ces deux courbes, OD soit une direction asymptotique, que OB soit la polaire de A, OA la polaire de B :

1° Trouver l'équation de P, l'équation de H, démontrer analytiquement et géométriquement que, quelle que soit OD, la parabole P est tangente à trois droites fixes et que l'hyperbole H passe constamment par quatre points fixes ;

2° Trouver le lieu des points d'intersection de P et de H lorsque la direction OD varie ; expliquer le résultat ;

3° Trouver, lorsque OD tourne autour du point O, le lieu du centre de H, le lieu du foyer de P, expliquer les transformations géométriques ;

4° Trouver et construire, dans les mêmes conditions, le lieu du sommet de la parabole P.

A. Mary de Lacoste.

1944. — On donne les cinq lignes droites X, X', G, G', B qui sont : 1° X, X' l'axe ; 2° G, G' une génératrice d'une surface gauche de révolution ; 3° B la direction des lignes de rappel.

Construire les contours apparents et une section plane de la surface en n'employant que des lignes *fausses* (bien entendu les arêtes des équerres sont rigoureusement rectilignes).

J. Caron.

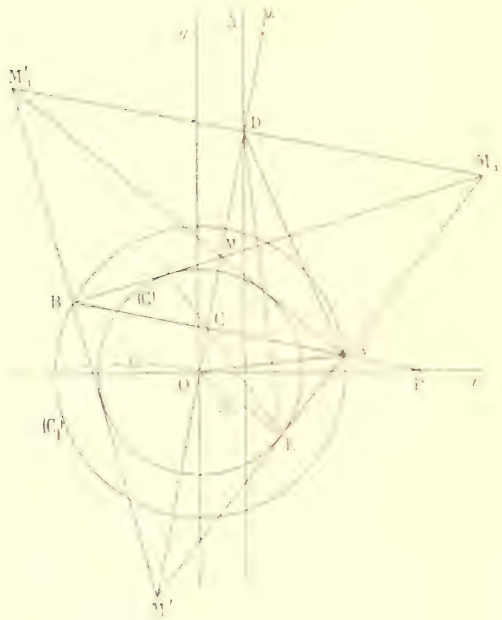
DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1889. — *On donne deux cercles concentriques* (C) *et* (C_1) *; par un point fixe,* P, *on mène une sécante variable, qui rencontre* (C_1) *en* A *et* B, *et par* A, B, *on mène les tangentes au cercle* (C). *Lieu de leurs points de rencontre.*

Problème corrélatif.

Prenons pour axe des x la droite OP qui joint le centre des cercles au point donné P et pour axe des y une perpendiculaire Oy à Ox ; appelons R et R′ les rayons des cercles concentriques (C) et (C_1) et (α, β) les coordonnées de l'un des quatre points de rencontre des couples de tangentes menées au cercle (C) par les points A et B, M, M′, M_1 et M'_1.



Le couple des tangentes issues du point (α, β) au cercle (C) a pour équation

$$(y^2 - \beta^2 - R^2)(x^2 + y^2 - R^2) - (\alpha x + \beta y - R^2)^2 = 0.$$

Ce couple de droites coupe le cercle (C_1) en quatre points dont deux sont A et B ; ces quatre points sont sur deux droites dont l'une est AB. Il suffit donc de former l'équation générale des coniques qui passent en ces quatre points, d'exprimer que l'une d'elles se décompose en deux droites et qu'elle passe au point P(a, 0)

Cette équation est

$$(y^2 - \beta^2 - R^2)(x^2 + y^2 - R'^2) - (\alpha x + \beta y - R^2)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - R'^2) = 0.$$

et, en exprimant qu'elle représente deux droites, c'est-à-dire que le discriminant est nul, on obtient l'équation qui donne le nombre λ, tel que la conique précédente se réduise à deux droites. Cette équation est

$$(\beta^2 - R^2 + \lambda)(\alpha^2 - R^2 + \lambda) - (\alpha\beta - R^2)^2 - \lambda(R'^2 - \alpha^2 - \beta^2 - R^2 + \lambda) = 0,$$

ou

$$\lambda^2 - (R'^2 - R^2 - \alpha^2 - \beta^2)\lambda - R^2(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) = 0.$$

Elle a une racine nulle, ce qui était évident *a priori*, et deux autres racines qui sont

$$\lambda = -(\alpha^2 + \beta^2 - R^2), \qquad \lambda = \frac{R^2}{R'^2}(\alpha^2 + \beta^2 - R'^2).$$

Pour chacune de ces racines, la conique envisagée se réduit à deux droites et il suffit d'exprimer que l'une d'elles passe au point P ; on aura ainsi le lieu complet du point M, du point (α, β).

Portons d'abord la première valeur de λ, nous aurons l'équation

$$(\alpha x + \beta^2 - R^2)(R^2 - R'^2) - (\alpha x + \beta y - R^2)^2 = 0.$$

qui représente deux droites parallèles à la corde des contacts. C'est le cas qui correspond aux deux points M et M′, et nous aurons le lieu de ces points en écrivant que la conique précédente passe au point P(a, 0) :

$$(R^2 - R'^2)(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) - (\alpha a - R^2)^2 = 0.$$

C'est une conique doublement tangente au cercle (C), aux deux points de contact avec les tangentes à ce cercle menées par le point P.

Nous aurons le second lieu, celui des points M_1 et M'_1, en portant la deuxième racine dans l'équa-

tion de la conique envisagée et exprimant qu'elle passe au point P. Ceci donne

$$(\alpha^2+\beta^2-R^2)(a^2-R^2)-\frac{R^2}{R'^2}(\alpha^2+\beta^2-R^2)(a^2-R'^2)-(a\alpha-R^2)^2=0,$$

ou

$$\frac{R'^2-R^2}{R'^2}\,a^2\left(\alpha^2+\beta^2-\frac{R^2R'^2}{a^2}\right)-(a\alpha-R^2)^2=0.$$

Cette équation représente une conique doublement tangente au cercle $\alpha^2+\beta^2-\frac{R^2R'^2}{a^2}=0$, aux deux points de rencontre de ce cercle avec la polaire du point P par rapport au cercle (C). Cette polaire a pour pôle par rapport au cercle $x^2+y^2-\frac{R^2R'^2}{a^2}=0$ le point de Ox qui a pour abscisse $\frac{R^2}{a}$, et il est facile de voir que la conique que nous avons trouvée passe en ce point. Cette seconde conique se réduit donc à deux droites, les deux tangentes au cercle.

Quant à la nature du premier lieu, elle dépend de l'excentricité qui est égale à $\frac{a}{\sqrt{R'^2-R^2}}$. On peut aussi l'obtenir en considérant la position des sommets situés sur Ox par rapport au point P.

Si on transforme projectivement ce problème, les deux cercles deviennent deux coniques doublement tangentes, le point P devient un autre point P et le nouveau problème a ensuite même énoncé que l'ancien. Le lieu total des quatre points M, M′, M_1 et M'_1 se compose de deux coniques.

Si on cherche le corrélatif du problème proposé en prenant pour conique directrice un cercle, chacun des cercles (C) et (C_1) se transforme en une conique qui a pour foyer le centre du cercle de base et pour directrice correspondante la polaire du centre commun à (C) et (C_1) par rapport au cercle directeur ; le point P se transforme en une droite p et le problème devient celui-ci : par chaque point de la droite fixe p, on mène les deux tangentes à la conique (C_1) et on prend leurs points de rencontre avec la conique (C). On demande alors l'enveloppe des droites qui joignent ces points deux à deux.

Ce problème peut à son tour se transformer projectivement en un autre dans lequel les deux coniques (C) et (C_1) sont deux cercles concentriques et peut alors être abordé facilement.

J. DESSIRIER, château de Bel-Air.

Bonnes solutions : MM. Marescalchi ; E.-N. Barisien ; G. Lach, à Rodez ; Nerlians ; A. Rousseau ; G. Fouret, à Reims.

Solution géométrique. — Nous avons reçu de M. R. Dontot la très belle solution géométrique que voici :

Considérons le cercle (C) comme étant le cercle de gorge d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, le cercle (C_1) comme étant la projection d'un parallèle de cette surface, et le point P comme étant un point du plan de ce parallèle. Les deux droites AM et AM′ sont les projections des deux génératrices qui passent au point A, BM et BM′, celles des génératrices qui passent au point B. De sorte que les points M et M′ sont les projections des points de contact des deux plans tangents menés à la surface par la droite AB. Ces points, dans l'espace, sont dans le plan polaire du point P, et leur lieu est la conique de section de la surface par ce plan polaire.

Donc le lieu des points M et M′ est la projection de cette conique sur le plan du cercle de gorge ; c'est une conique doublement tangente au cercle de gorge aux deux points où la polaire du point P la coupe.

La figure AMBM′ est un quadrilatère circonscrit au cercle (C) formé par les quatre tangentes issues de A et B. Les trois diagonales de ce quadrilatère sont AB, MM′ et $M_1M'_1$; elles forment un triangle conjugué par rapport au cercle (C). Or ce quadrilatère admet évidemment MM′ comme axe de symétrie, les droites AB, $M_1M'_1$ sont donc parallèles entre elles et perpendiculaires à MM′ ; cette droite MM′ passe au point O et coupe les deux autres diagonales en C et D, qui sont conjugués par rapport au cercle (C).

La droite $M_1M'_1$ est donc la polaire du point C et la droite AB celle du point D. Le point C décrit un cercle ayant pour diamètre OP, et, comme $OC.OD=R^2$, le point D décrit une droite Δ perpendiculaire à OP, la ligne inverse du lieu de (C).

Soit alors E le point de contact de la tangente $M'M_1$ avec le cercle (C) ; la polaire du point M_1 est la droite EC et celle du point A est la droite ED. Nous allons démontrer alors que l'angle DOM_1 est constant. Cet angle est égal à l'angle ACE, comme ayant ses côtés respectivement perpendiculaires à ceux de cet angle, et l'angle ACE est le complément de l'angle OCE. D'autre part, $OC.OD=R^2$, les deux triangles OCE et ODE sont

semblables, et l'on a $\frac{OC}{OE} = \frac{OE}{OD}$; l'angle OCE est donc égal à l'angle OED, et celui-ci est visiblement constant, comme étant le complément de l'angle AED, qui est constant.

Le triangle ODM_1 reste alors semblable à lui-même et $\frac{OM_1}{OD} = k$. Prenons sur OD, $O\mu = k.OD$, le lieu du point μ sera une droite Δ' parallèle à Δ, et nous aurons le lieu du point M_1 en faisant tourner cette droite d'un angle égal à $-\alpha(\alpha = \widehat{DOM_1})$ autour du point O. La droite Δ' devient ainsi une nouvelle droite Δ_1, qui est le lieu de M_1. En faisant tourner Δ' autour de O d'un angle égal à α, nous aurons aussi une nouvelle droite Δ_2, qui est le lieu du point M_1'.

Le problème corrélatif, tel que nous l'avons défini et réduit, peut aussi être abordé directement et traité par des considérations géométriques.

R. DONTOT.

Bonne solution analytique et géométrique de M. J. Soubaigné, à Mont-de-Marsan.

1907. — *On considère une parabole et la tangente en un point M de cette parabole ; soient P la projection de ce point sur l'axe et Q le point de rencontre de la tangente avec l'axe. On considère en outre le cercle circonscrit au triangle MPQ.*

1° *Trouver la deuxième parabole qui passe par les points de rencontre de la parabole donnée avec le cercle et le lieu du sommet de cette parabole.*

2° *Trouver l'enveloppe de cette parabole.*

3° *Trouver le lieu du point de rencontre de deux sécantes communes à la parabole et au cercle.*

4° *Enfin trouver le cercle circonscrit au triangle conjugué commun à la parabole et au cercle et le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur l'axe radical des deux cercles.*

En prenant pour axes les axes habituels, l'équation de la parabole sera $y^2 - 2px = 0$. Les coordonnées du point M étant a et b, celles du point P seront $(a, 0)$ et celles de Q, $(-a, 0)$. L'équation du cercle circonscrit au triangle MPQ est donc $(x-a)(x+a) - y^2 - 2xb = 0$, avec la condition $(a^2 - b^2 - 2ab - a^2) = 0$, qui donne $a = \frac{b}{2}$. Ce dernier résultat est d'ailleurs immédiat, car il est visible que le centre du cercle est le point I, milieu de QM et que les coordonnées de celui-ci sont 0 et $\frac{b}{2}$. Finalement, l'équation du cercle est donc $x^2 + y^2 - bx - a^2 = 0$.

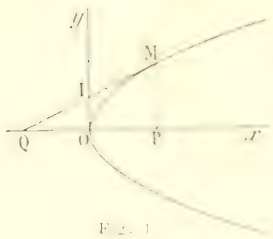


Fig. 1

1° Le faisceau linéaire de coniques passant aux points de rencontre du cercle avec la parabole a pour équation $x^2 + y^2 - by - a^2 + \lambda(y^2 - 2px) = 0$; les deux paraboles de ce faisceau correspondent à $\lambda = \infty$ et à $\lambda = -1$. La parabole demandée a donc pour équation

$$x^2 - 2px - by - a^2 = 0;$$

son axe est parallèle à Oy et a pour équation $x - p = 0$, ou $x - \frac{b}{2} = 0$. Le lieu du sommet est donc une droite fixe parallèle à la directrice de la parabole fixe et située à une distance double de l'origine.

2° Pour avoir l'enveloppe de cette parabole, quand a et b varient, il suffit d'adjoindre aux deux équations $f(a, b) = x^2 + 2px - by - a^2 = 0$, $\varphi(a, b) = b - 2pa = 0$, l'équation $\frac{f_a}{\varphi} = \frac{f_b}{\varphi_b}$, ou $\frac{x}{p} = \frac{-y}{2b}$, et d'éliminer a et b entre les trois équations ; ou encore, de remplacer a par $\frac{b}{2p}$ dans la première équation et d'écrire que cette équation a une racine commune avec sa dérivée. Ceci donne les deux équations $x^2 + 2px - by - \frac{b^2}{4p^2} = 0$, $y + \frac{b^2}{p^2} = 0$.

L'élimination de b est très facile ; on remplace d'abord $\frac{b^2}{p^2}$ par $-y$ et on a de suite

$$\frac{3by}{4} = x^2 + 2px, \qquad b = \frac{4}{3y}(x^2 + 2px).$$

puis $$64(x^2+2px)^3+27p^2y^4=0.$$

Telle est l'équation de l'enveloppe.

3° Le faisceau linéaire déterminé par le cercle et par la parabole ayant pour équation

$$x^2+y^2-by-a^2-\lambda(y^2-2px)=0,$$

les coordonnées du point de concours d'un couple de sécantes communes vérifient les équations

$$x-\lambda p=0,\qquad 2y-b+2\lambda y=0,\qquad -by-2a^2-2\lambda pa=0,$$

et il n'y a plus qu'à éliminer λ, b et a entre ces trois équations et l'équation $b^2-2ap=0$.

Nous avons successivement

$$\lambda=\frac{x}{p},\qquad b=2y+\frac{2xy}{p}=\frac{2y}{p}(x+p),\qquad a=\frac{4y^2}{2p^2}(x+p)^2=\frac{2y^2}{p^2}(x+p)^2,$$

en portant ces valeurs dans la troisième équation, nous obtenons

$$\frac{2y^2}{p}(x+p)+\frac{8y^4}{p^6}(x+p)^4-2x^2=0,\qquad \text{ou}\qquad 4y^2(x+p)+py^4(x+p)^4-px^2=0.$$

C'est l'équation du lieu demandé.

4° En éliminant λ entre les trois équations dérivées, prises deux à deux, nous obtenons trois coniques qui passent aux sommets du triangle conjugué commun :

$$f=2xy+p(2y-b)=0,\qquad g=2x^2+by+2a^2=0,\qquad h=px(2y-b)-y(by+2a^2)=0,$$

et l'équation générale des coniques circonscrites à ce triangle est $\mu f+\nu g+h=0$.

Nous aurons un cercle si $2\mu+2p=0,\quad 2\nu+b=0$;

l'équation du cercle cherché est donc $2pf+bg-2h=0$,

ou $$2b(x^2+y^2)-2bpx-(4a^2+b^2+4p^2)y+4a^2b-2p^2b=0,$$

et l'axe radical de ce cercle et du premier envisagé est

$$2pbx+4a^2-3b^2+4p^2=0.$$

La perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite a pour équation $\dfrac{x}{2pb}=\dfrac{y}{4a^2-3b^2-4p^2}$,

et le point de rencontre avec l'axe radical a pour coordonnées

$$\frac{x}{2pb}=\frac{y}{4a^2-3b^2-4p^2}=\frac{2p^2b-4a^2b}{4pb^2+(4a^2-3b^2-4p^2)p}.$$

Posons $b=2pt$, nous aurons $a=2pt^2$, et ces équations deviendront

$$\frac{x}{4p^2t}=\frac{y}{4p^2(4t^2-3t^2+1)}=\frac{t-8t^3}{4pt^2(4t^2-3t^2-1)}.$$

Les équations paramétriques du lieu sont donc

$$x=\frac{pt(t-8t^3)}{t^2-(4t^2-3t^2-1)^2},\qquad y=\frac{p(4t^2-3t^2+1)(t-8t^3)}{t^2-(4t^2-3t^2-1)^2}$$

elles représentent une courbe unicursale du neuvième degré, symétrique par rapport à Ox, et qui est asymptote à Oy, vers la gauche, en haut et en bas. C'est la seule branche infinie que présente cette courbe.

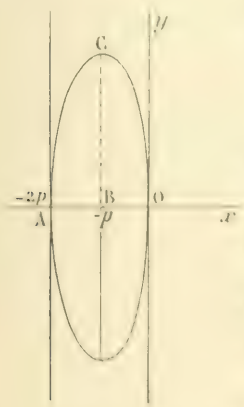


FIG. 2

Construction des courbes. — L'enveloppe des courbes a pour équation

$$64x^2(x+2p)^3+27p^2y^4=0,$$

cette équation peut s'écrire $y^2=\lambda(-x)^{\frac{3}{2}}(x+2p)^{\frac{3}{2}}$, en posant $\lambda=\sqrt{\dfrac{64}{27p^2}}$

elle montre ainsi que x doit être compris entre $-2p$ et 0, que y est nul aux deux limites et maximum pour $x=-p$. La dérivée est d'ailleurs

$y'=-\dfrac{3}{2}\dfrac{\lambda(x+p)}{\sqrt{-x(x+2p)}}$ et permet d'apercevoir immédiatement les variations de y, ainsi que les diverses positions de la tangente.

La courbe a la forme d'un ovale légèrement allongé dans le sens Oy (fig. 2), et admet pour axes de symétrie l'axe des x et la droite $x=-p$.

La deuxième courbe a une équation bicarrée en y et ne peut exister qu'à gauche de la droite $x = -p$; dans cette région l'équation bicarrée

$$4y^2(x+p)^2 + p^2y^2(x+p) - p^4x = 0$$

a toutes ses racines réelles ou toutes imaginaires : cela dépend uniquement du signe de la quantité sous le radical

$$p^4(x+p)^2 - 16p^4x^2(x+p).$$

Si $16x^2(x+p)^2 - p^4 < 0$, les valeurs de y existent ; sinon, non, et la courbe n'existe pas non plus. Or $16x^2(x+p)^2 - p^4$ est le produit de $4x(x+p) + p^2$ par $4x(x+p) - p^2$; le premier de ces trinomes est un carré parfait, et la condition revient à $4x^2 + 4px + p^2 < 0$, ou $(2x+p)^2 - 2p^2 < 0$; x doit donc être compris entre $-p\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ et $p\frac{\sqrt{2}-1}{2}$, valeurs équidistantes de $-p$. Mais, à droite de $-p$, les valeurs de y^2 sont réelles et négatives, y n'existe pas.

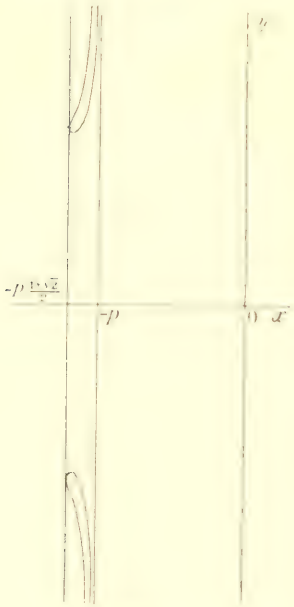


Fig. 3.

Pour $x = -p\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, les deux valeurs de y^2 sont égales à $\frac{p^2}{\sqrt{2}-1}$; elles ont une grande valeur numérique. Les quatre valeurs de y sont confondues deux à deux en deux valeurs égales et de signes contraires, la droite $x = -p\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ touche la courbe en deux points symétriques par rapport à Ox. Pour $x = -p$, toutes les valeurs de y sont infinies. La courbe a donc la forme donnée par la figure 3.

Sans construire rigoureusement la dernière courbe, on peut apercevoir sa forme approximative en suivant les valeurs principales de x et de y, quand t varie de 0 à $+\infty$, et tenant compte de la symétrie par rapport à Ox, ainsi que des tangentes évidentes que la courbe a au point O.

La figure 4 indique cette forme.

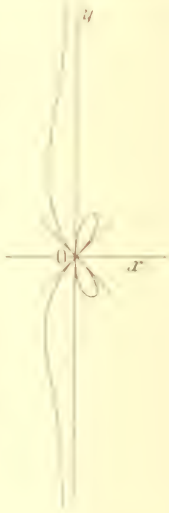
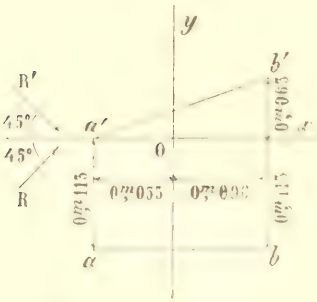


Fig. 4.

Bonnes solutions : MM. Jamelet, à Saint-Étienne ; G. [illegible] ; L. [illegible].
Assez bonnes solutions : MM. L. Simon, à Fourmies ; G. [illegible] ; A. Rousseau ; E. N. Bacsich ; A. Nicot, à Bordeaux ; P. Villain ; J. Offenheimer.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1901. — *Par rapport aux axes Ox et Oy de la feuille (dont le premier est parallèle au petit côté de cette feuille, et qui n'auront pas à être passés à l'encre), les points (a, a') et (b, b') sont définis par le croquis ci-joint.*



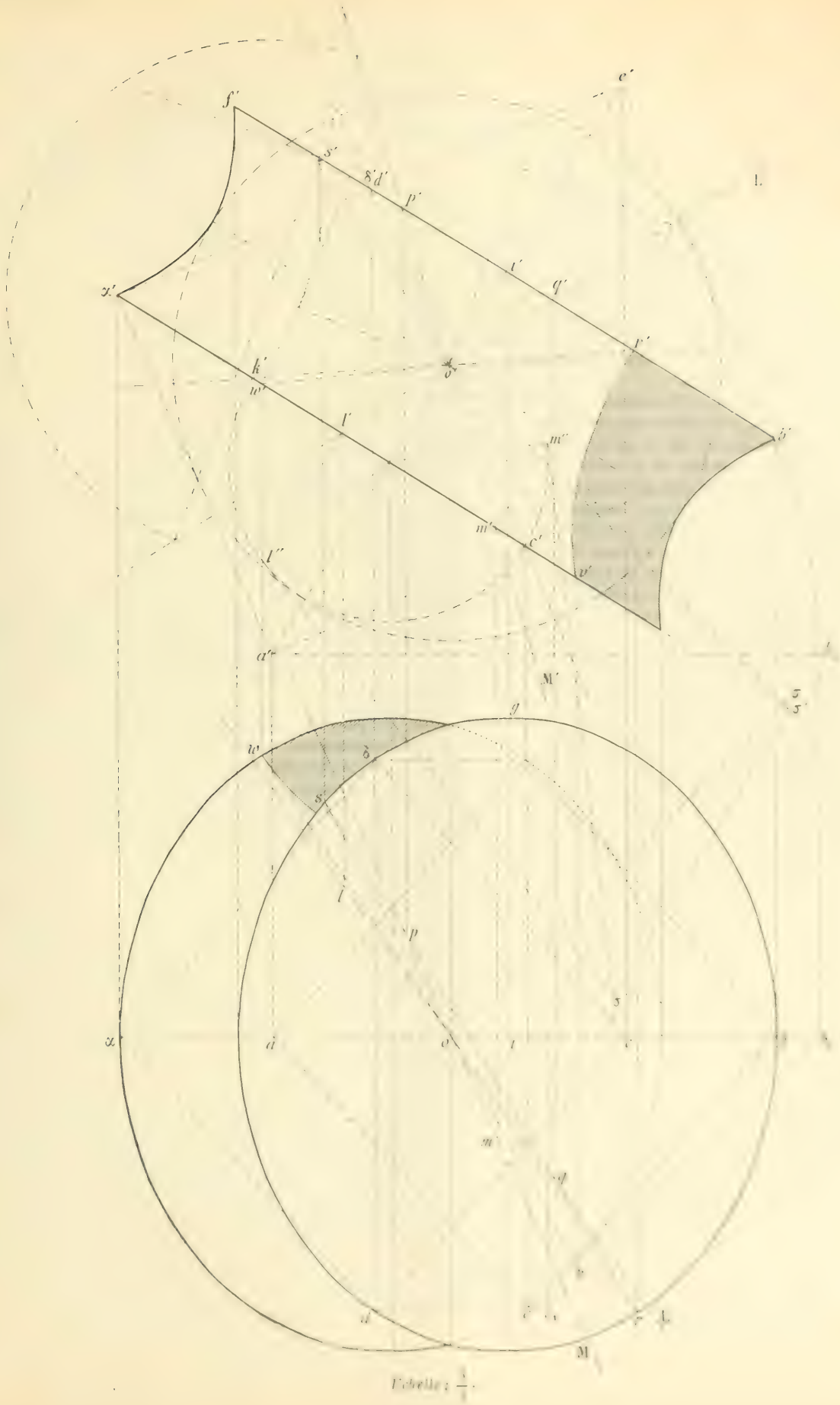
La droite (ab, a'b') est diagonale d'un carré situé dans un plan de bout et dont le sommet (c, c') est situé en avant de cette diagonale ; et ce carré sert lui-même de base à un cube placé au-dessus de ce plan de bout.

On fait tourner l'arête de front du cube issue du sommet (c, c'), autour de la diagonale du cube issue du sommet (a, a').

On demande de représenter le segment d'hyperboloïde de révolution engendré par cette arête, et, en supposant opaques les plans des deux parallèles qui le comprennent, d'indiquer les ombres produites sur ce corps par des rayons parallèles à (R, R') dont les projections sont inclinées à 45° sur Ox.

(*École des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, concours de 1910.*)

Après avoir rabattu le plan de bout passant par AB sur le plan horizontal du point A, ce qui nous donne le rabattement ab_1 de la diagonale du carré, nous construisons le sommet c_1 de ce carré et nous le relevons en


f'
e'
s'
δ'
d'
p'
t'
q'
α'
r'
k'
w'
δ'
l'
m''
b'
m'
c'
l''
v'
a''
M'
g
w
δ
s
l
p
s
α
d
o
t
c
m
q
r
d'
c'
r
M
Echelle : 1/4

c, c'. La construction du cube est alors immédiate, puisque nous avons la longueur b_1c_1 de son arête, et la diagonale ae, $a'e'$ est l'axe de la surface gauche engendrée par le côté cd, $c'd'$.

Cette surface étant limitée aux deux parallèles décrits par les points C et D, son contour apparent vertical se compose des deux diamètres de front de ces parallèles tels que $b'f'$ et des deux arcs de l'hyperbole méridienne compris entre ces parallèles. Nous avons déjà les points b' et f' de cette hyperbole; ses axes de symétrie sont d'ailleurs la diagonale du cube $a'e'$ et sa perpendiculaire menée par le centre o' du cube. Ses asymptotes sont les génératrices de contour apparent vertical du cône asymptote de la surface, c'est-à-dire les parallèles $o'c'$ et $o'k'$ à l'arête de front $e'b'$ et à sa symétrique par rapport à $o'e'$ menées par le centre o'. L'axe transverse de l'hyperbole est manifestement le diamètre du cercle de gorge, dont la longueur est $a'b'$. Nous avons donc plus d'éléments qu'il n'en faut pour construire ces arcs de méridienne.

Le contour apparent horizontal du solide se réduit aux projections des deux parallèles qui le limitent : à savoir les ellipses égales dont nous connaissons les longueurs des demi-axes ig et ib. Nous voyons en effet que la surface gauche n'a pas de contour apparent horizontal, puisque la verticale du sommet de son cône asymptote est intérieure au cône.

Ombre propre. — La direction des rayons lumineux étant moins inclinée sur la verticale que les plans des parallèles, le parallèle supérieur est éclairé et l'autre est dans l'ombre. Nous obtiendrons la courbe séparatrice d'ombre propre sur la surface gauche en cherchant la courbe de contact du cylindre circonscrit à cette surface parallèlement à R, R'. Cette courbe est la section de la surface par le plan diamétral conjugué de cette direction R, R'. Or ce plan diamétral est le même pour l'hyperboloïde et pour son cône asymptote. Nous l'obtiendrons pour ce dernier en lui menant les plans tangents parallèles à R, R' et prenant les deux génératrices de contact. A cet effet menons par son sommet la parallèle $o\sigma$, $o'\sigma'$ à R, R' et par sa trace sur un plan de base du cône, par exemple le plan de bout $k'c'$, menons des tangentes à la base; il suffit pour cela de rabattre ce plan de bout sur le plan de front de l'axe du cône : le point σ vient en σ'' et nous avons les tangentes $\sigma''l''$ et $\sigma''m''$ au cercle de base rabattu; les points de contact relevés en l' et m', puis projetés en l et m dont les éloignements sont respectivement égaux à $l'l''$ et à $m'm''$ par rapport au plan de front considéré, nous donnent les génératrices cherchées ol, $o'l'$ et om, $o'm'$. Leur plan coupe l'hyperboloïde suivant la courbe séparatrice d'ombre propre; c'est donc une hyperbole qui a pour asymptotes O'L' et O'M' en projection verticale et OL et OM en projection horizontale. Nous en pouvons déterminer les points situés sur les plans des deux parallèles bases du solide en prenant l'intersection de chacun de ces plans par le plan LOM. Ainsi $p'q'$, pq nous donnent les points r, r' et s, s'. On a par symétrie les points situés sur la seconde ellipse. On peut donc construire les deux arcs d'hyperbole par points. Il y a lieu de remarquer que la courbe coupe nécessairement l'arête $\alpha\delta$, $\alpha'\delta'$ du cube qui est une des positions de la génératrice de la surface et dont on peut prendre directement l'intersection par le plan LOM. Enfin on détermine facilement la tangente à cette hyperbole aux points extrêmes tels que s, par exemple, en remarquant que le plan tangent à l'hyperboloïde en ce point contient la tangente à l'ellipse et la parallèle à R, R'; il est aisé d'en prendre l'intersection avec le plan LOM. On obtient ainsi les arcs rv, $r'v'$ et sw, $s'w'$. La distinction des parties vues et des parties cachées n'offre pas de difficulté.

QUESTIONS PROPOSÉES

1945. — Dans un triangle ABC, inscrit dans un cercle fixe de centre O, le sommet A est fixe et l'on a

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = k^2 \quad (k \text{ étant une constante.})$$

Trouver et construire :

1° Le lieu de la projection H du point A sur BC ;

2° Le lieu du centre ω du cercle circonscrit au triangle OBC ;

3° Le lieu du centre de gravité du triangle OBC ;

4° L'enveloppe du côté BC ;

5° L'enveloppe du cercle circonscrit au triangle OBC. RÈME, à Alger.

1946. — Pour déterminer l'indice n d'un prisme solide de très petit angle ε, on dispose d'une lunette autocollimatrice à oculaire micrométrique mise au point sur l'infini et avec laquelle on fait les deux opérations suivantes :

1° Ayant pointé sur un point éloigné, on place le prisme devant la lunette, de façon que ses faces soient à peu près normales à l'axe de la lunette ; l'image paraît déplacée parallèlement au mouvement du réticule et il faut tourner le tambour de $a = 87$ divisions pour remettre le réticule sur l'image.

2° Ayant éclairé le réticule, on en voit deux images produites par réflexion sur le prisme; le réticule ayant été amené en coïncidence avec l'une d'elles, il faut, pour l'amener en coïncidence avec l'autre, tourner le tambour de $b = 237$ divisions.

Expliquer les effets observés et calculer l'indice.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

21e Année. Juillet 1911. N° 10.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES COURBES TRIANGULAIRES

par M. **G. Valiron**, professeur au lycée de Besançon [1].

Courbes de Laguerre. — Les courbes triangulaires correspondant à $\mu = -2$ et $\mu = \frac{2}{3}$ ont été étudiées par Laguerre [2]. Les premières admettent les trois sommets du triangle de référence pour points doubles à tangentes d'inflexion ; elles comprennent la *lemniscate* et la *kreuzcurve*. Les secondes ont pour équation tangentielle

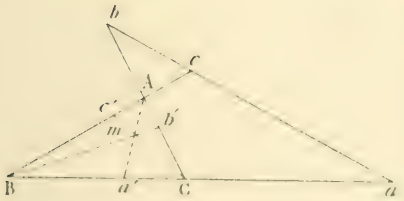
$$\alpha U^{\frac{2}{3}} + \beta V^{\frac{2}{3}} + \gamma W^{\frac{2}{3}} = 0 ;$$

elles sont polaires réciproques des premières par rapport à la conique $P^2 + Q^2 + R^2 = 0$.

Elles ont six points de rebroussement sur les côtés du triangle de référence et comprennent l'*hypocycloïde à quatre rebroussements* et les *développées des coniques à centre*.

Je vais donner une définition géométrique de ces courbes et quelques-unes de leurs propriétés.

Transformation par polaires trilinéaires. — On sait qu'étant donné un triangle ABC, une droite M coupant les côtés en a, b, c, si on prend les conjugués harmoniques de a, b, c par rapport à BC, CA, AB, soit a', b', c', les droites Aa', Bb', Cc' se coupent en un point m, appelé *polaire trilinéaire* de M. M correspond à m par la même construction. $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ étant les équations des côtés BC, CA, AB et $UP + VQ + RW = 0$ l'équation de la droite M, on trouve facilement que les coordonnées trilinéaires de m sont



$$\frac{1}{U}, \quad \frac{1}{V}, \quad \frac{1}{W}.$$

Inversement, la polaire d'un point de coordonnées P_0, Q_0, R_0 est la droite $\frac{P}{P_0} + \frac{Q}{Q_0} + \frac{R}{R_0} = 0$.

Si le point m décrit une courbe (C) d'équation $f(P, Q, R) = 0$, sa polaire trilinéaire reste tangente à une courbe (C'), dont l'équation tangentielle est $f\left(\frac{1}{U}, \frac{1}{V}, \frac{1}{W}\right) = 0$.

Nous dirons que (C') est la *polaire trilinéaire* de (C), ou simplement la polaire, lorsque la confusion ne sera pas possible.

De même, les pôles des tangentes de la courbe (C_1) d'équation tangentielle $f(U, V, W) = 0$ sont situés sur la courbe (C_1') dont l'équation est

$$F\left(\frac{1}{P}, \frac{1}{Q}, \frac{1}{R}\right) = 0.$$

[1] Cette note fait suite à celle qui a paru dans le numéro de février 1911.

[2] Sur les quartiques qui ont trois points doubles d'inflexion et en particulier sur la lemniscate. *Nouvelles Annales*, 1878, p. 337. Ce mémoire a été omis dans les œuvres de Laguerre.

Nous dirons que (C_1') est la *polaire trilinéaire négative* de (C_1) ; il est clair que (C_1) est la polaire trilinéaire de (C_1'). La transformation n'est pas réciproque, la polaire et la polaire négative d'une même courbe sont deux courbes distinctes.

Théorème. — *La transformation par polaires trilinéaires est une transformation de contact*, c'est-à-dire qu'à deux courbes tangentes correspondent des courbes tangentes.

Soient les deux courbes

$$F(P, Q, R) = 0, \qquad G(P, Q, R) = 0,$$

tangentes au point P_0, Q_0, R_0. On a donc

$$F(P_0, Q_0, R_0) = 0, \qquad G(P_0, Q_0, R_0) = 0,$$

$$\frac{F'_{P_0}}{G'_{P_0}} = \frac{F'_{Q_0}}{G'_{Q_0}} = \frac{F'_{R_0}}{G'_{R_0}}.$$

Les transformées sont $F\left(\frac{1}{U}, \frac{1}{V}, \frac{1}{W}\right) = 0$, $G\left(\frac{1}{U}, \frac{1}{V}, \frac{1}{W}\right) = 0$.

La tangente de coordonnées $\frac{1}{P_0}$, $\frac{1}{Q_0}$, $\frac{1}{R_0}$ est commune d'après les relations précédentes, et les coordonnées du point de contact sont les mêmes pour les deux courbes, car elles sont $F'_{P_0}.P_0^2$, $F'_{Q_0}.Q_0^2$, $F'_{R_0}.R_0^2$ pour la première, $G'_{P_0}.P_0^2$, $G'_{Q_0}.Q_0^2$, $G'_{R_0}.R_0^2$ pour la seconde, et ces nombres sont proportionnels, puisque l'on a $\frac{F'_{P_0}}{G'_{P_0}} = \frac{F'_{Q_0}}{G'_{Q_0}} = \frac{F'_{R_0}}{G'_{R_0}}$.

Remarque. — Le théorème est encore vrai lorsque l'une des courbes données se réduit à un point situé sur l'autre, soit P_0, Q_0, R_0, $F(P_0, Q_0, R_0) = 0$.

La transformée de $F(P, Q, R) = 0$ est par définition tangente à la droite $\frac{P}{P_0} + \frac{Q}{Q_0} + \frac{R}{R_0} = 0$.

De même, si l'une des courbes polaires se réduit à un point, ce point est situé sur l'autre.

Enfin il est bien évident que le théorème est vrai pour les polaires trilinéaires négatives.

Polaire d'un point et d'une droite. Polaire négative d'un point. — I. — La polaire d'un point $m(\alpha, \beta, \gamma)$ a pour équation $\frac{P}{\alpha} + \frac{Q}{\beta} + \frac{R}{\gamma} = 0$; elle est déterminée si le point n'est pas sommet. Si m tend vers un sommet, A par exemple sur la droite AT, sa polaire a pour position limite la conjuguée harmonique de AT par rapport aux côtés AB et AC (il suffit de considérer la limite de $\frac{\alpha}{\gamma}$).

II. — La polaire d'une droite D, $uP + vQ + wR = 0$, a pour équation

$$\frac{u}{U} + \frac{v}{V} + \frac{w}{W} = 0.$$

Si D ne passe pas par un sommet, c'est une véritable conique inscrite dans le triangle ; les points de contact avec les côtés sont les conjugués des points d'intersection de D avec les côtés par rapport aux sommets.

Si D passe par un sommet, soit A, on a $u = 0$, la polaire se réduit à deux points ; le point A et le point d'intersection de la conjuguée de D par rapport à AB, AC avec BC.

Si D est un côté, la polaire est l'ensemble des sommets situés sur ce côté.

III. — Le pôle d'une droite M est un point déterminé si M n'est pas un côté. Si M est un côté, le pôle est indéterminé sur ce côté, mais si M tend vers un côté BC en restant tangente à une courbe (C) tangente à BC en m_1, le pôle a pour limite le conjugué de m_1 par rapport à B et C.

IV. — La polaire négative du point N, $\alpha U + \beta V + \gamma W = 0$, est la courbe d'équation

$$\frac{\alpha}{P} - \frac{\beta}{Q} + \frac{\gamma}{R} = 0.$$

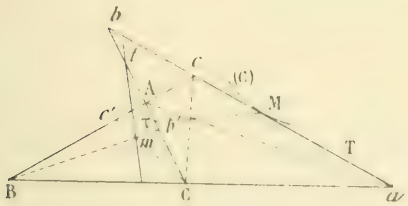
Si N n'est pas sur un côté, on a une conique véritable circonscrite au triangle, les tangentes en A, B, C étant les conjuguées harmoniques de AN, BN, CN par rapport aux côtés.

Si N est sur un côté, BC par exemple, la conique se décompose en ce côté et la droite passant par le sommet opposé et par le conjugué de N par rapport à B et C.

Si N est un sommet on a les deux côtés passant par ce sommet.

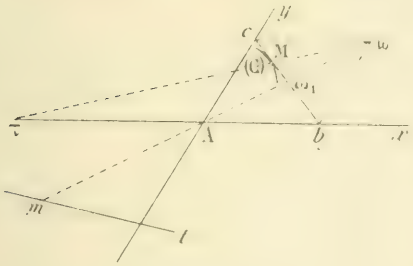
Tous ces résultats s'obtiennent également très facilement par la géométrie (homographies).

Tangente en un point de la transformée. — Prenons par exemple la polaire négative d'une courbe (C). Soit M un point de (C), MT la tangente en M ; à MT correspond le point m. Cherchons la tangente en m ; soit mt cette tangente, t étant le point d'intersection avec AC par exemple. La polaire trilinéaire de mt est une conique inscrite, tangente à la courbe (C) au point M, puisque la transformation est de contact et, d'après ce qui précède, t est conjugué harmonique par rapport à A et C du point de contact τ de cette conique avec AC ; or τ se construit immédiatement par le théorème de Brianchon, c'est le point d'intersection avec AC de la droite qui joint M au point d'intersection de Cc et Aa.



La construction de MT et M connaissant mt et m est la construction inverse.

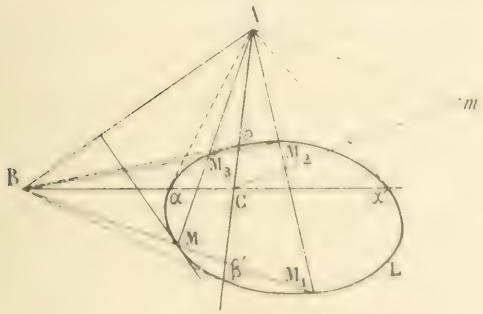
Cas particuliers. — I. — Un côté BC est à l'infini. A la tangente cMb correspond le point m symétrique par rapport à A du quatrième sommet ω du parallélogramme de côtés Ac, Ab. La tangente en m est symétrique en direction de la droite ωM par rapport à Ax, Ay.



On voit que $A\omega$ est conjuguée de la direction cb par rapport à Ax, Ay et $Am = -2A\omega_1$.

II. — B et C sont les points cycliques ; ω_1 est alors le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur la tangente à (C), la polaire négative d'une courbe est donc l'homothétique dans le rapport -2 de la podaire par rapport au point A ; la polaire est l'homothétique avec le rapport $-\frac{1}{2}$ de la podaire négative.

Application aux courbes de Laguerre. — Ces courbes sont les polaires et polaires négatives trilinéaires des coniques conjuguées au triangle de référence. En effet, à la conique $aU^2 + bV^2 + cW^2 = 0$ correspond la polaire négative



$$(1) \qquad \frac{a}{P^2} - \frac{b}{Q^2} + \frac{c}{R^2} = 0,$$

et réciproquement. De même, la polaire de la conique $aP^2 + bQ^2 + cR^2 = 0$ est la courbe

$$(2) \qquad \frac{a}{U^2} - \frac{b}{V^2} + \frac{c}{W^2} = 0.$$

Considérons les courbes (1), les propriétés des courbes (2) s'en déduisant par polaires réciproques. On voit immédiatement que les courbes (1) admettent A, B, C pour points doubles, les tangentes en ces points étant les tangentes à la conique L.

Si on considère un point voisin de α sur BC, les tangentes à L passant par ce point ont pour pôles deux points situés sur une même droite passant par A, ce qui montre que $A\alpha'$ *est une tangente d'inflexion.*

On verra immédiatement qu'une *droite passant par un sommet* A *coupe la quartique en deux autres points conjugués harmoniques par rapport à* A *et au point d'intersection de la droite avec* BC, les tangentes en ces deux points concourent sur BC.

A la tangente en M à L correspond un point m de la quartique ; au point M correspond une conique circonscrite à ABC et tangente en m à la quartique, les tangentes en A, B, C à cette conique sont les conjuguées harmoniques de MA, MB, MC ; elles se coupent sur la conique L en M_1, M_2, M_3 ; donc *les pôles des côtés du triangle* ABC *par rapport à une conique circonscrite au triangle et tangente à la quartique sont sur la conique* L.

Théorème. — *La tangente en un point m de la quartique coupe la courbe en deux autres points qui sont les pôles trilinéaires des tangentes menées de m à la conique* L.

Je m'appuierai sur le théorème suivant :

Lorsqu'une conique K_1 *est harmoniquement inscrite dans une conique* L_1 *et est tangente à* L_1 *en* M_1, *les deux autres tangentes communes passent par le pôle trilinéaire de la tangente en* M *par rapport à un triangle circonscrit à* K_1 *et conjugué à* L_1. (Ce théorème se démontre immédiatement en considérant les faisceaux involutifs déterminés par les tangentes issues de deux des sommets du triangle considéré aux coniques du faisceau tangentiel L_1K_1). Considérons alors un point m de la quartique, la tangente en m est la polaire négative de la conique K inscrite dans ABC et tangente à la conique L au point de contact M de la polaire trilinéaire de m ; les points d'intersection de cette tangente avec la quartique sont les pôles trilinéaires des tangentes communes aux coniques L et K et, d'après le théorème énoncé, ces tangentes passent par m. Le théorème proposé est donc établi.

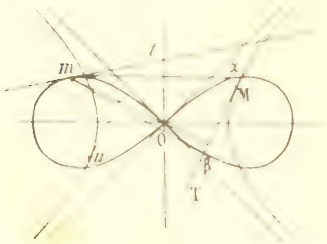
Corollaires. I. — *D'un point m de la quartique on peut mener quatre tangentes à la courbe, dont les points de contact sont en ligne droite.* — En effet si m_1 est le point de contact d'une tangente issue de m, la polaire trilinéaire de m passe par m_1, donc il y a quatre points de contact qui sont les points d'intersection de la quartique avec la polaire trilinéaire de m.

II. — *La première polaire d'un point m de la quartique se décompose par conséquent en une droite qui est la polaire trilinéaire de m et une conique circonscrite au triangle* ABC *et tangente en m à la quartique* (conique déjà considérée et que Laguerre appelle *conique harmonique* de m).

La plupart des autres propriétés établies par Laguerre se déduisent facilement de celles-ci et je renverrai à son article. Enfin, la propriété générale de courbure des courbes triangulaires donne le résultat suivant :

Le rayon de courbure en un point est les $\frac{2}{3}$ *de celui de la conique harmonique en ce point.*

On voit aussi que ce rayon de courbure est égal et de sens contraire au tiers de celui de la conique conjuguée au triangle ABC et tangente à la quartique en ce point.



Cas particuliers. — I. — Deux sommets sont les points cycliques ; la conique L est une *hyperbole équilatère* et la quartique est l'homothétique avec le rapport -2, le centre de la courbe étant le centre d'homothétie, de la podaire de l'hyperbole par rapport à son centre.

A un point M de l'hyperbole correspond le point m ; de m on peut mener quatre tangentes dont les points de contact sont sur la tangente MT à l'hyperbole en M ; la conique harmonique de m est le cercle tangent en m à la lemniscate et passant par le centre O, le centre u de ce cercle est sur l'hyperbole et le rayon de courbure en m est égal à $\frac{2mu}{3}$; la tangente en m à

la lemniscate, soit mt, coupe la courbe en deux autres points, qui correspondent aux tangentes menées de m à l'hyperbole.

II. — Deux sommets sont à l'infini dans deux directions rectangulaires. La conique L a alors pour équation par rapport à ces deux droites, qui sont ses axes,

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 1 = 0.$$

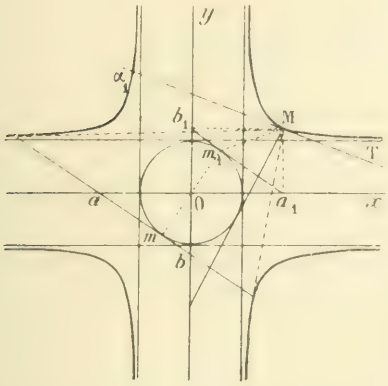
Donc la quartique a pour équation

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} - 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x^2y^2 - ay^2 - bx^2 = 0.$$

Pour $a = b = R^2$, L est un cercle et la quartique une *kreuzcurve normale*.

J'ai fait la figure dans ce cas.

Pour avoir un point de la kreuzcurve, M, on mène une tangente amb au cercle et la tangente parallèle $a_1m_1b_1$, le point M correspondant à ab est le point d'intersection des parallèles aux axes menées par a_1, b_1. La tangente en M, MT est symétrique de Mm_1 par rapport aux axes ; elle coupe la courbe en deux autres points correspondant aux tangentes menées de M au cercle. De M on peut mener quatre tangentes à la courbe, leurs points de contact sont sur ab. La conique harmonique de M est une hyperbole équilatère passant par O, ayant pour asymptotes les parallèles aux axes menées par m_1.

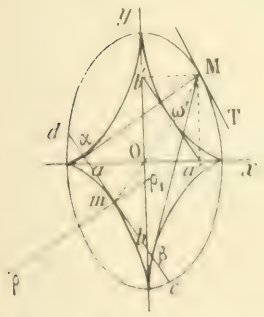


Pour avoir le rayon de courbure en M on peut employer cette hyperbole ; on sait que son rayon de courbure en M est égal et de sens contraire au diamètre du cercle tangent en M à MT et passant en m_1, donc le rayon de courbure de la kreuzcurve en M est égal et de sens contraire aux $\frac{4}{3}$ du rayon de ce cercle.

On peut aussi considérer la conique tangente en M et ayant ses axes suivant Ox, Oy, le rayon de courbure en M est égal et de sens contraire au $\frac{1}{3}$ de celui de cette ellipse, qui se construit immédiatement.

Courbes de quatrième classe. — J'énonce les résultats en supposant deux des sommets à l'infini dans deux directions rectangulaires. En prenant les deux autres côtés du triangle pour axes la conique L a pour équation $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1 = 0$. Donc sa polaire est $\frac{1}{ax^2} + \frac{1}{by^2} - \frac{1}{u^2} = 0$.

C'est donc une développée de conique à centre. J'ai fait la figure dans le cas où L est une ellipse.



La courbe est l'enveloppe de la droite qui joint les projections a', b' de M sur les axes de l'ellipse, mais à cause de la symétrie, au point M correspond la tangente amb, le point de contact est symétrique de m par rapport au centre.

Les tangentes issues de m à la courbe sont les polaires des points α, β d'intersection de ab avec l'ellipse ; la tangente en m coupe la courbe en quatre autres points ; les tangentes en ces points passent par M.

L'équation ponctuelle de la courbe est

$$(ax^2)^{\frac{1}{3}} + (by^2)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.$$

Donc le rayon de courbure en m est égal au triple changé de signe de celui de l'ellipse ayant Ox, Oy pour axes et tangente en m.

On retrouve ainsi la construction de Mac-Laurin.

J'indiquerai d'abord une construction du centre de courbure en un point M d'une ellipse différente de celles que j'ai déjà données. Soient Ox, Oy les axes. On a vu que tout revient à trouver le point d'intersection de la normale MN avec l'hyperbole passant en O, tangente à MT en M et d'asymptotes parallèles à Ox, Oy. J'applique le théorème de Pascal en numérotant les points connus sur la figure, 5 étant le point cherché, 2,3 et 5,6 concourent au point à l'infini sur MN, 3,4 et 6,1 en P, et par conséquent *la droite* OC (4,5) *coupe la parallèle à* Ox *menée par* M (1,2) *sur la perpendiculaire à* MT *au point* P.

Soit alors MT la tangente à une ellipse au point M ; j'obtiens le centre de courbure C en prenant l'intersection P de OM avec la parallèle à MT passant par N et en menant par P la parallèle à Ox. On a alors à chercher le centre de courbure C de l'ellipse d'axes Ox, Oy et tangente à la droite MN en C ; d'après la construction précédente, c'est le point C_1 d'intersection de la normale en C avec la droite OP. Le centre de courbure de la développée au point C est l'homothétique dans le rapport -3 du point C_1 par rapport au point C. C'est la construction de Mac-Laurin.

Remarque. — Les cas particuliers que j'ai choisis donnent par projection tous les autres. En effet, si on considère une conique réelle L et un triangle conjugué ABC ayant ses trois sommets réels, l'un des côtés BC par exemple ne coupe pas la conique en des points réels, on pourra alors projeter de façon que les points d'intersection de L et BC soient les points cycliques ; la projection de la polaire de L sera alors une hypocycloïde à quatre rebroussements et celle de la polaire négative une kreuzcurve, puisque L sera un cercle.

De même, si le triangle ABC a deux sommets imaginaires conjugués B,C, on pourra projeter ces points aux points cycliques, L deviendra une hyperbole équilatère et la polaire négative une lemniscate. La polaire serait l'homothétique de la podaire négative de l'hyperbole par rapport aux centres (toutes les propriétés trouvées pour l'hypocycloïde s'appliquent, mais pour la courbure on considèrera le cercle tangent à la courbe et passant par le centre comme pour la lemniscate).

Je rappelle que les projections dont je parle reviennent au problème suivant : *Trouver un système de projections tel qu'un cercle donné* C *se projette suivant un cercle et une droite* D *suivant la droite de l'infini.*

Il suffit de prendre pour point de vue le point de contact d'un plan tangent Π mené par D à une sphère S passant par C et de projeter sur un plan parallèle à Π.

(A suivre.)

SUR L'INVERSION DES LIGNES DE COURBURE

Par M. **G. Valiron**, professeur au lycée de Besançon.

Dans son exposition des propriétés infinitésimales des surfaces, M. Sainte-Laguë signale le théorème :

La propriété d'une ligne d'être de courbure sur une surface se conserve par inversion,

comme une application du théorème de Dupin. Ce théorème peut se démontrer directement comme application du théorème de Joachimsthal.

Considérons d'abord une surface développable S, elle peut être considérée comme l'enveloppe (à un paramètre) de ses plans tangents, les caractéristiques étant les génératrices A. Les génératrices A forment d'ailleurs un premier système de lignes de courbure, les lignes de l'autre système étant les tra

jectoires orthogonales B de ces génératrices. Transformons S par inversion. La surface S′ obtenue peut être considérée comme l'enveloppe des sphères inverses des plans tangents à S. Les caractéristiques de ces sphères sont les cercles A′ inverses des génératrices A. Enfin les inverses des lignes B sont les trajectoires orthogonales B′ des cercles A′. Or les cercles A′ sont des lignes de courbure puisque la surface S′ est tangente à des sphères le long de ces cercles. Les lignes B′ sont donc aussi lignes de courbure et la proposition est démontrée dans ce cas.

Soit maintenant une surface quelconque Σ et une ligne de courbure C de cette surface, S la développable formée par les normales le long de S. Soient Σ′, C′, S′ les figures inverses de Σ, C, S. D'après ce qui précède, C′ est une ligne de courbure de la surface S′ qui coupe à angle droit la surface Σ′ le long de cette ligne, donc C′ est ligne de courbure de Σ′.

REMARQUE SUR LE PROBLÈME DE CHIMIE DU CONCOURS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1911)

Il n'est peut être pas inutile d'attirer l'attention sur une particularité de ce problème.

En désignant par x le poids moléculaire du chlorure d'arsenic qu'on demandait de calculer, par δ la densité de l'hydrogène, on est conduit à l'équation

$$x = \frac{4{,}88 \cdot \dfrac{2}{\delta}}{10 - 9 \cdot \dfrac{4{,}88 \cdot \dfrac{2}{\delta}}{137{,}5}} = \frac{A}{10 - B} \quad \text{avec} \quad B = 9{,}2 \quad \text{environ}$$

Or, δ n'est pas donné dans l'énoncé. On peut prendre pour δ soit le nombre de Regnault $\delta_1 = 0{,}0693$, soit celui de Leduc $\delta_2 = 0{,}0695$. (A ces valeurs de δ correspondent $\dfrac{2}{\delta_1} = 28{,}86$ et $\dfrac{2}{\delta_2} = 28{,}78$. Le nombre que l'on retient en général est 28,8.)

Evaluons l'écart relatif sur x résultant de l'écart relatif sur δ. Nous avons

$$\frac{dx}{x} = \frac{dA}{A} + \frac{d(10 - B)}{10 - B}, \qquad \frac{dA}{A} = \frac{dB}{B} = \frac{d\delta}{\delta} = \frac{2}{694} = 0{,}00288,$$

$$\frac{d(10 - B)}{10 - B} = \frac{dB}{10 - B} = \frac{B\,\dfrac{d\delta}{\delta}}{10 - B}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d(10 - B)}{10 - B} = \frac{9{,}2 \cdot 0{,}00288}{0{,}8} = 0{,}0331 \text{ ou environ } \frac{1}{30}.$$

Il en résulte que l'écart relatif des deux valeurs résultantes pour x est sensiblement $\dfrac{1}{30}$. Comme x est environ 180, on aura $dx = 6$.

$$x_1 = 181{,}7, \qquad \text{d'où on tire} \qquad As_1 = 75{,}2.$$

On aura donc

$$x_2 = 181{,}7 - 6 = 175{,}7, \qquad As_2 = 69{,}2.$$

En résumé, la solution numérique de ce problème dépend essentiellement d'une donnée qui fait défaut, que les candidats doivent connaître, bien entendu, mais qu'ils ne connaissent qu'avec une certaine approximation.

Tous les professeurs savent qu'il est difficile de donner un problème de chimie où tout soit prévu. L'important est que les copies soient cotées en tenant compte des termes de l'énoncé.

L. ZIVY, Professeur au lycée de Douai.

Aux observations présentées par notre correspondant, on peut ajouter que la diversité des résultats peut être encore plus grande qu'il ne l'indique. Les chimistes, en effet, rapportent aujourd'hui les poids atomiques et les poids moléculaires plutôt à l'oxygène $(O = 16)$ qu'à l'hydrogène $(H = 1)$; c'est donc la densité de l'oxygène qu'il serait nécessaire de connaître ou bien, avec la densité de l'hydrogène, son poids atomique exact. Si l'on adopte pour ce poids atomique la valeur 1,0076 et pour la densité 0,06947, nombres généralement admis maintenant, le coefficient de la densite dans l'expression du poids moléculaire d'un gaz, ce qu'on pourrait appeler le *poids moléculaire de l'air*, est égal à 29,01. En faisant le calcul avec l'azote, dont le poids atomique est 14,01 et la densité, 0,967, on trouve 28,97. On devrait donc prendre, pour calculer le poids moléculaire d'un gaz, le nombre rond 29 qui a, sur le nombre 28,88, non seulement l'avantage de l'exactitude, mais aussi celui de ne pas donner l'illusion d'une précision bien difficile à atteindre dans ce genre de déterminations. Or, avec ce nombre 29, on trouve pour poids atomique de l'élément inconnu 85,5.

Au point de vue chimique, l'intérêt du problème actuel est donc de mettre en évidence le faible degré de précision que comporterait une mesure de poids moléculaire effectuée par la méthode indiquée.

Au point de vue de l'examen, c'est affaire au correcteur que de juger les calculs dont on a fort judicieusement exigé le détail. On peut même estimer qu'il est plus facile d'apprécier la sincérité des candidats sur des résultats qui peuvent être tous exacts, quoique tous différents.

Il nous parait utile de signaler, comme se rapportant au même ordre d'idées, la diversité des nombres employés pour représenter ce qu'on appelle le volume moléculaire. On voit encore figurer souvent dans des questions d'examen le nombre $22^l,32$; c'est le volume de 2 grammes d'hydrogène calculé avec la densité de Regnault non corrigée de la contraction du ballon laboratoire. Or le volume de $2^g,0152$ d'hydrogène est en réalité $22^l,43$, celui de $28^g,02$ d'azote $22^l,41$. Il conviendrait donc d'adopter le nombre $22^l,42$ ou tout simplement $22^l,4$.

C. R.

ECOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Concours de 1910.*)

(Cours spéciaux et places réservées aux conducteurs.)

1905. — 1° *Tracer la courbe figurative de la variation de la fonction* $y = (x-1)2^x - 1$.

2° *Déduire de cette courbe que l'équation*

$$(1) \qquad (x-1)2^x - 1 = 0$$

n'a qu'une seule racine réelle.

3° *Obtenir le même résultat en se servant des deux courbes* $y_1 = \dfrac{1}{x-1}$ *et* $y_2 = 2^x$.

4° *Calculer, avec une décimale exacte, la racine réelle de l'équation* (1) *en utilisant la méthode d'interpolation par parties proportionnelles (ce calcul, très simple, devra être effectué sans le secours de tables).*

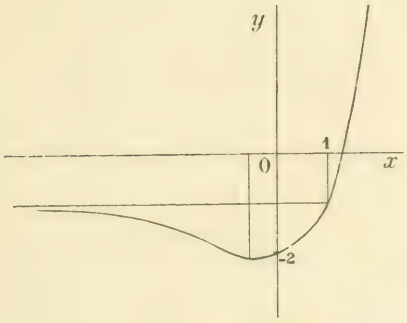
1. La fonction $y = (x-1)2^x - 1$ est parfaitement définie pour toute valeur réelle de la variable x; elle est égale à -1 pour $x = -\infty$, égale à -2 pour $x = 0$ et égale à $+\infty$ pour $x = +\infty$.

Sa dérivée est

$$y' = 2^x[(x-1)L2 + 1];$$

elle s'annule pour une valeur negative de x, $x_0 = \dfrac{L2 - 1}{L2}$, qui est plus petite que 1 en valeur absolue, car il est visible que L2 est plus grand que $\dfrac{1}{2}$. Avant x_0, la dérivée est négative, la fonction est décroissante, et, après x_0, la fonction est croissante; pour $x = x_0$, il y a un minimum, un peu plus grand que 2 en valeur absolue.

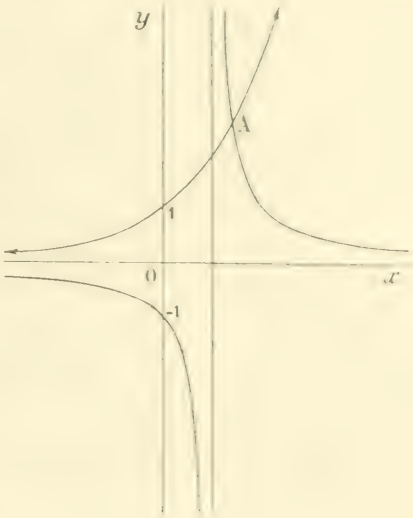
2. La courbe est dès lors aisée à figurer, et nous voyons qu'elle coupe l'axe des x en un point dont l'abscisse est comprise entre 1 et 2.



La dérivée seconde est

$$y'' = 2^{x}L2^{2}(x-1)L2 - 2 ;$$

elle s'annule pour une valeur négative de x, $x_1 = \frac{L2 - 2}{L2}$, plus petite que x_0 ; elle est négative avant et positive après. Ceci nous montre que de $-\infty$ à x_1, la concavité de la courbe est tournée vers les y négatifs, et, de x_1 à $+\infty$, vers les y positifs ; pour $x = x_1$, elle présente un point d'inflexion. En particulier, dans l'intervalle (1, 2), y'' est positive et la concavité est tournée vers le haut.



3. Les deux courbes $y = \frac{1}{x-1}$ et $y = 2^{x}$ se construisent immédiatement ; la première est une hyperbole équilatère, qui a pour asymptotes les droites $x = 1$, $y = 0$ et qui passe au point $(0, -1)$; la deuxième est une exponentielle à base plus grande que 1, qui est asymptote à Ox, en dessus et vers la gauche, qui coupe l'axe des y au point $y = 1$ et qui s'élève très vite vers les y positifs. Ces deux courbes se rencontrent en un point A, à droite de $x = 1$, dont l'abscisse est le point racine de l'équation.

4° Pour $x = 1$, $y = -1$; pour $x = 2$, $y = 3$; pour $x = \frac{3}{2} = 1{,}5$, $y = \frac{1}{2}2^{\frac{3}{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$. La racine est donc comprise entre 1 et $\frac{3}{2}$, et, en appliquant la méthode des parties proportionnelles à cet intervalle, on a $\frac{y+1}{\sqrt{2}} = \frac{x-1}{\frac{1}{2}}$; pour $y = 0$, $x = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}$.

La nouvelle valeur de x est donc $1 + \frac{\sqrt{2}}{4}$; elle est au-dessous de la racine et a pour valeur approchée par défaut 1,35. Il est facile de voir directement que la somme est plus petite que 1,4 ; car le résultat de la substitution de cette valeur à x est positif. Ce résultat est en effet $\frac{4}{10}2^{1+\frac{\sqrt{2}}{4}} - 1 = \frac{4}{5}2^{\frac{5}{4}} - 1$, et $\frac{4}{5}2^{\frac{5}{4}}$ est plus grand que 1, comme on s'en assure aisément. La racine est donc comprise entre 1,35 et 1,4 ; elle est égale à 1,3, à $\frac{1}{10}$ près par défaut, et à 1,4 à $\frac{1}{10}$ près par excès.

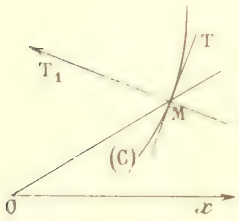
Bonnes solutions : MM. A. Gouatois, à Sedan ; J. Soubaigné, à Mont de Marsan ; A. Rousseau, à Fontenay-en-Vexin ; L. Gobillot ; A. Negre, à Bordeaux ; G. Lach, à Rodez ; L. Simon, à Fourmies ; P. Bertelin ; Ch. Hubert, à Beaurlan ; P. Sallerron, à Albi ; J. Ottenheimer, à Nancy ; G. Cazaux ; J. Girardot.

1906. — 1° *Former, en coordonnées polaires, l'équation différentielle des trajectoires orthogonales à une famille de courbes planes.*

2° *Appliquer cette équation à la recherche des trajectoires orthogonales de la famille de lemniscates de Bernoulli* $r^2 = \pm 2a^2 \cos 2\theta$, *$a$ étant le paramètre variable.*

1. Soit $f(\omega, \rho, C) = 0$ l'équation en coordonnées polaires d'une famille de courbes qui dépendent d'une constante arbitraire C. L'équation différentielle de ces courbes s'obtient en dérivant, par rapport à ω, l'équation donnée, $\frac{df}{d\omega} + \rho' \frac{df}{d\rho} = 0$, et éliminant C entre ces deux équations. On trouve ainsi une certaine équation $g(\omega, \rho, \rho') = 0$, qui convient à toutes les courbes de la famille.

Soit alors MT_1 la tangente à la trajectoire orthogonale de l'une des courbes (C) en un point M de celle-ci et soient V, V_1 les angles que font les droites MT et MT_1 avec le rayon vecteur OM ; nous avons évidemment $V_1 = V + \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} V_1 = -\operatorname{cotg} V$. Or $\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'}$, $\operatorname{tg} V_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1'}$; par conséquent, $\frac{\rho_1}{\rho_1'} = -\frac{\rho}{\rho'}$. D'autre part, au point M, les deux courbes ont le même ρ, $\rho_1 = \rho$; ρ' est donc égal à $\frac{-\rho^2}{\rho'}$, et l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes de la famille donnée est



$$g\left(\omega, \rho, \frac{-\rho^2}{\rho'}\right) = 0.$$

2° Dans le cas actuel, l'équation $f(\omega, \rho, C) = 0$ est $\rho^2 - C\cos 2\omega = 0$; différentiée par rapport à ω, elle donne $2\rho\rho' + 2C \sin 2\omega = 0$; nous avons donc $C = -\frac{\rho\rho'}{\sin 2\omega}$, et l'équation différentielle des lemniscates de Bernoulli est $\rho + \rho' \operatorname{cotg} 2\omega = 0$.

L'équation différentielle de leurs trajectoires orthogonales sera

$$\rho - \frac{\rho^2}{\rho'} \operatorname{cotg} 2\omega = 0, \quad \text{ou} \quad \rho' - \rho \operatorname{cotg} 2\omega = 0.$$

Si on y change ω en $\frac{\pi}{4} - \omega$, $\frac{d\rho}{d\omega}$ se change en $\frac{d\rho}{d\omega}$, $\operatorname{cotg} 2\omega$ en $-\operatorname{tg} 2\omega$, et l'on retrouve la première équation différentielle.

Ceci montre que les trajectoires orthogonales des lemniscates de Bernoulli sont les mêmes courbes que l'on a fait tourner d'un angle égal à 45° autour de l'origine. Elles ont donc pour équation $\rho^2 = C \cos 2\omega$ dans le nouveau système polaire, et $\rho^2 = C \cos 2\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right)$ dans l'ancien, c'est-à-dire $\rho^2 = C \sin 2\omega$, C étant une constante arbitraire.

Bonnes solutions : MM. G. Fouray, à Reims ; A. Courtois, à St-Etienne ; J. Sauvageot, à Mont-de-Marsan ; P. Sauvageot, à Albi ; J. Ottenheimer, à Nancy ; G. Lacu, à Douai ; M. Nicolas ; A. Rousseau ; A. Nicolas ; L. Fourrin, à Dijon ; Gérardin ; P. Béteille.

ÉCOLE PROFESSIONNELLE SUPÉRIEURE DES POSTES ET TÉLÉGRAPHES (2e section.)

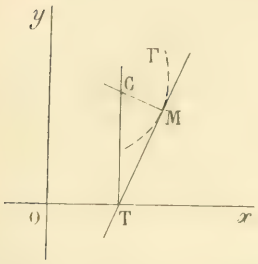
Concours de 1910.

1921. — *Étant donnés dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, on demande de déterminer une courbe Γ de ce plan telle que la projection orthogonale sur l'axe Ox du centre de courbure C en un point quelconque M de cette courbe soit le point T où la tangente en M rencontre cet axe.*

Trouver la relation qui existe entre l'ordonnée d'un point quelconque de cette courbe et l'arc de la courbe compté à partir du point d'ordonnée maximum.

Soient x, y les coordonnées du point M ; la tangente en ce point,

$$Y - y = (X - x)y'.$$



rencontre Ox au point T qui a pour abscisse $x - \frac{y}{y'}$. D'autre part, le centre de courbure C au point M a pour abscisse $x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}$. On doit donc avoir

$$x - \frac{y}{y'} = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{y'}{y} = \frac{y''}{y'(1+y'^2)}.$$

Telle est l'équation différentielle qui définit la courbe Γ.

On peut l'écrire $\frac{y'}{y} = \frac{y''}{y'} - \frac{y'y''}{1+y'^2}$, et sous cette forme, l'intégration est immédiate. On obtient

$$\mathrm{L}y = \mathrm{L}y' - \frac{1}{2}\mathrm{L}(1+y'^2) + \mathrm{L}a$$

ou

$$y = \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

ou encore

$$(1) \qquad \sqrt{y^2 + \frac{y^2}{y'^2}} = a.$$

On voit immédiatement que $\sqrt{y^2 + \frac{y^2}{y'^2}}$ est égal à la longueur de la tangente MT. On en conclut que la courbe Γ cherchée est la courbe bien connue sous le nom de *tractrice*.

Rappelons rapidement la construction de cette courbe.

De l'équation (1) on déduit $y' = \pm \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$, puis, en remplaçant y' par $\frac{dy}{dx}$,

$$\pm dx = \frac{dy\sqrt{a^2 - y^2}}{y} = \frac{(a^2 - y^2)dy}{y\sqrt{a^2 - y^2}}, \qquad \text{ou} \qquad \pm dx = \frac{a^2 dy}{y\sqrt{a^2 - y^2}} - \frac{ydy}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

et enfin

$$\pm dx = -\varepsilon a \frac{d\frac{a}{y}}{\sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1}} - \frac{ydy}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

ε étant égal à ± 1 et ayant le signe de y.

En intégrant, on obtient $\pm x + C = -\varepsilon a \mathrm{L}\left|\frac{a}{y} + \sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1}\right| + \sqrt{a^2 - y^2}$.

Quand C varie, cette équation représente une infinité de courbes qui se déduisant toutes de l'une d'elles en imprimant à celle-ci des translations parallèles à Ox.

Nous construirons la courbe qui correspond à $C = 0$.

A toute valeur de y correspondent deux valeurs de x égales et de signes contraires. Donc la courbe est symétrique par rapport à Oy ; par suite, il suffira de construire la courbe définie par l'équation

$$x = -\varepsilon a \mathrm{L}\left|\frac{a}{y} + \sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1}\right| - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

puis de tracer la symétrique de cette courbe par rapport à Oy.

Suivant le signe de y, l'expression de x prend deux formes différentes. Il est aisé de voir qu'à deux valeurs de y égales et de signes contraires correspond la même valeur de x.

Donnons d'abord à y la valeur positive y_1 ; comme $\frac{a}{y_1} + \sqrt{\frac{a^2}{y_1^2} - 1}$ est positive, la valeur

correspondante de x est

$$x_1 = -a\mathrm{L}\left(\frac{a}{y_1} + \sqrt{\frac{a^2}{y_1^2} - 1}\right) + \sqrt{a^2 - y_1^2}.$$

Remplaçons maintenant y par $-y_1$; alors $-\frac{a}{y_1} - \sqrt{\frac{a^2}{y_1^2} - 1}$ est négatif, et la valeur de x est

$$x'_1 = a\mathrm{L}\left(\frac{a}{y_1} - \sqrt{\frac{a^2}{y_1^2} - 1}\right) + \sqrt{a^2 - y_1^2}.$$

Retranchons ces deux égalités, nous avons

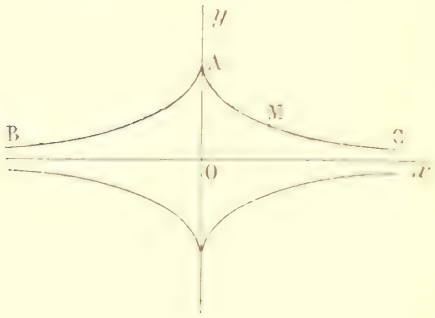
$$x_1 - x'_1 = a\mathrm{L}\left[\frac{a^2}{y_1^2} - \left(\frac{a^2}{y_1^2} - 1\right)\right] = a\mathrm{L}1 = 0.$$

En résumé, pour avoir toute la courbe, il suffit de considérer l'équation

$$x = -a\mathrm{L}\left(\frac{a}{y} + \sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1}\right) + \sqrt{a^2 - y^2},$$

de construire la branche de courbe qui correspond aux valeurs positives de y, puis d'achever par symétrie par rapport aux deux axes.

Pour que x existe, il faut que y^2 soit plus petit que a^2, ou, puisque y est positif, que y soit plus petit que a.



Nous avons vu précédemment que $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$; donc, quand y croît de 0 à a, x croît de $-\infty$ à 0.

Nous obtenons ainsi la branche de courbe BA. La tangente en A est l'axe Oy, puisque pour $y = a$, $\frac{dx}{dy}$ est nul.

Il n'y a plus qu'à achever par symétrie pour avoir toute la courbe.

Considérons maintenant un point M de la branche AC, celle-ci a pour équation

$$x = a\mathrm{L}\left(\frac{a}{y} + \sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1}\right) - \sqrt{a^2 - y^2},$$

et l'on a

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \quad \text{ou} \quad dx = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\,dy.$$

Soit à calculer l'arc AM. On a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dy^2\left[\frac{a^2 - y^2}{y^2} + 1\right] = \frac{a^2 dy^2}{y^2}, \quad \text{ou} \quad ds = \pm\frac{a\,dy}{y}.$$

Si l'on prend comme sens positif des arcs le sens AC, s varie en sens contraire de y, et l'on doit prendre le signe $-$. On a donc $ds = -\frac{a}{y}\,dy$, et, en intégrant, $s = -a\mathrm{L}y + \mathrm{C}$.

Pour $y = a$ on doit avoir $s = 0$, on doit donc avoir $-a\mathrm{L}a + \mathrm{C} = 0$, ou $\mathrm{C} = a\mathrm{L}a$. On en déduit $s = -a\mathrm{L}y + a\mathrm{L}a$, ou $s = a\mathrm{L}\frac{a}{y}$.

Remarque. — On peut déterminer la courbe Γ d'une autre manière, en calculant les coordonnées x, y d'un point M de la courbe en fonction de l'angle α que fait avec Ox la demi-tangente positive au point M. On sait que la valeur algébrique du segment $\overline{MC}$ est $R = \frac{ds}{d\alpha}$, le sens positif étant la demi-droite qui fait avec Ox l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Par suite, l'abscisse du point C est $x + R\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ ou $x - R\sin\alpha$; celle du point T est $x - \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha}$. On doit donc avoir $R\sin\alpha = \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Or $R = \frac{ds}{d\alpha}$, $\sin\alpha = \frac{dy}{ds}$, donc $R\sin\alpha = \frac{dy}{d\alpha}$. On en déduit $\frac{dy}{d\alpha} = \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha}$ et $\frac{dy}{y} = \frac{d\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$.

En intégrant, on obtient $Ly = L\sin\alpha + La$, ou $y = a\sin\alpha$.

D'autre part, $dx = \frac{dy}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{a\cos\alpha d\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$, ou $dx = a\left(\frac{d\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha d\alpha\right)$;

on en déduit
$$x = x_0 + aL\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| + a\cos\alpha.$$

On obtient ainsi les équations paramétriques de la tractrice
$$x = x_0 + a\left[L\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| + \cos\alpha\right], \qquad y = a\sin\alpha.$$
où x_0 et a sont deux constantes arbitraires.

J. SOUBAIGNÉ, à Mont-de-Marsan.

Bonnes solutions par MM. André Courtois, à Sedan ; Deperrois, à Chartres ; H. Frobert, à Vichy ; Georges Cuttaz, à Aire-sur-l'Adour ; Ch. Guillerme ; G. Lach, à Rodez ; J. Ottenheimer, lycée de Nancy ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; L. Simon, à Fourmies ; Wladimir Sturtz, à Nice.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1885. — *La ligne de terre étant placée suivant le petit axe de la feuille, on donne : 1° un paraboloïde de révolution dont l'axe Z est vertical, a pour éloignement* 110^{mm} *et se projette à* 20^{mm} *à droite du grand axe de la feuille : la cote du sommet est* 160^{mm}, *celle du foyer* 144 ; *2° un paraboloïde hyperbolique qui a deux génératrices de front, la première* D *est verticale, elle est située dans le plan de profil de l'axe* Z, *à* 32^{mm} *en avant de cet axe ; la seconde* Δ *est à* 64^{mm} *en arrière de* Z, *elle est inclinée à* 45° *sur le plan horizontal et on s'élève sur elle de gauche à droite. Les projections verticales de ces deux génératrices se rencontrent en un point dont la cote est* 96^{mm}. *Enfin, le paraboloïde a un plan directeur perpendiculaire à la génératrice* Δ.

On demande : 1° de construire l'intersection des deux surfaces ; 2° de représenter la partie solide du paraboloïde de révolution qui ne contient pas le sommet, séparée par le paraboloïde hyperbolique et limitée au plan horizontal de projection ; 3° de construire l'ombre propre de ce solide et son ombre portée sur le plan horizontal. Les rayons lumineux sont parallèles à la direction Δ.

On déterminera, pour chaque courbe, un point courant et la tangente en ce point, ainsi que les points et tangentes remarquables. En particulier, on cherchera les tangentes à l'intersection aux points situés dans le plan de profil de l'axe du paraboloïde de révolution.

Entourer l'épure d'un cadre de 280 × 410^{mm}. *Dessiner les résultats en noir (les lignes pour vis semi-plein, les lignes cachées en points ronds) et les constructions en rouge. Mettre sur les ombres des hachures bleues ou grises, fines, espacées d'environ* 1^{mm},5. *Expliquer très sommairement les constructions effectuées et les résultats obtenus.*

(*École normale supérieure et concours de dernières promotions de 1880*.)

Le paraboloïde de révolution P_1 a pour contour apparent vertical une parabole méridienne d'axe vertical Z et que l'on construit par points connaissant son sommet s' et son foyer f'. Limité au plan horizontal de projection, ce solide a pour contour apparent horizontal le cercle ss section du paraboloïde par ce plan.

Le paraboloïde hyperbolique P_2, ayant une génératrice verticale D, n'a pas de contour apparent horizontal proprement dit. Il coupe le plan horizontal suivant une parabole que l'on construit par points en prenant les traces d'autant de génératrices que l'on veut. On utilisera en particulier celles qui serviront à construire la tangente en ce point de l'intersection des deux surfaces. Cette parabole passe manifestement au point d, et la tangente en ce point, où le plan tangent à la surface P_2 est vertical, est la projection de la seconde génératrice

qui y passe ; on l'obtient en menant sa projection verticale par d' et rappelant le point où celle-ci coupe δ' sur δ pour le joindre au point d.

Intersection des deux surfaces. — Rappelons que toute section faite dans un paraboloïde de révolution par un plan quelconque se projette sur un plan perpendiculaire à l'axe suivant un cercle dont le centre est la projection du point où la perpendiculaire menée par le foyer à ce plan sécant perce le plan passant par la directrice méridienne et perpendiculaire à l'axe. Nous couperons donc les deux surfaces par des plans auxiliaires perpendiculaires à Δ.

Par exemple le plan de bout $\beta'\gamma'$ coupe P_1 suivant une conique se projetant horizontalement suivant le cercle de rayon $\omega\beta$, et le paraboloïde P_2 suivant la génératrice $\gamma'b'$, $d\gamma b$ dont la trace horizontale γ est un point de la parabole horizontale de P_2, et qui coupe la circonférence ωb au point m, m' de l'intersection demandée. Le second point serait situé en dehors de l'épure, en dessous du solide conservé.

Tangente en un point. — La tangente en m, m' est l'intersection des plans tangents à P_1 et P_2 en ce point. Le premier s'obtient en amenant par une rotation le point M dans le plan méridien de front en c, c' et menant la tangente à la méridienne en c'. La trace θ_1 de cette tangente décrit dans la rotation inverse un arc de circonférence de rayon $z\theta_1$ et la tangente en θ à cet arc donne la trace du plan tangent en M à la surface P_1. Le plan tangent à P_2 est défini par la génératrice γb, $\gamma' b'$ et la seconde génératrice passant en M ; la projection verticale de cette génératrice passe par le point g' où se coupent les projections verticales de D et de Δ, tandis que sa projection horizontale est parallèle à xy. Sa trace horizontale τ jointe à la trace γ de la première génératrice donne la trace du plan tangent à P_2, et l'intersection de cette droite $\tau\gamma$ avec θt donne le point t, qu'il suffit de joindre à m pour avoir la tangente cherchée. Sa projection verticale est $t'm'$.

Points remarquables. — La projection verticale de l'intersection présente un point double sur la génératrice horizontale de bout du paraboloïde P_2 et qui est la projection commune des deux points g_1 et g_2 où cette génératrice perce P_2 ; leur éloignement relatif au plan méridien de l'axe Z est donné par $g'h'$, ici double du paramètre $f'z'$ de la parabole méridienne.

Les tangentes en ce point double g' se construisent à la manière ordinaire : l'une est précisément la génératrice δ', et l'autre, $\zeta'g'$, s'obtient après avoir ramené le point b dans le plan méridien en h, h'. Cette construction donne les deux projections horizontales $\zeta_2 g_2$ et $\zeta_1 g_1$.

La génératrice verticale D coupe P_1 en un point N qui se projette horizontalement sur la parabole horizontale de P_2 et donne par conséquent un point commun à cette parabole et à la projection horizontale de l'intersection. La projection verticale de ce point, qui est sur la méridienne de profil à 32mm en avant de l'axe, se fait donc précisément au foyer f' de la méridienne.

On a le second point d'intersection de Δ avec le paraboloïde P_1 en prenant le plan auxiliaire de bout passant par Δ et coupant P_1 suivant une conique dont la projection horizontale est un cercle qui a son centre symétrique de ω par rapport à z.

Le point de contact de la courbe d'intersection et de la parabole méridienne en projection verticale se trouve sur la génératrice de front de P_2 qui est dans le plan de l'axe de P_1 soit $l'g'k'$, lk et coupe la parabole méridienne au point k'.

Solide commun. — Le solide commun limité au plan horizontal de projection est compris, en projection horizontale, à l'intérieur du cercle de rayon za. Il est limité par l'arc pqr et l'arc de parabole $pldr$ d'une part, puis par la courbe d'intersection pg_1kng_2r, l'arc de parabole dr seul étant caché par le solide. En projection verticale, le solide commun a pour contour apparent l'arc de méridienne $k'q'$ l'horizontale $q'p'$ et une partie seulement de la courbe d'intersection, dont l'arc $g'v'k'$, qui est en arrière du plan méridien de front, est caché par le solide.

Ombre propre. — Sur le paraboloïde P_1 l'ombre propre est limitée par la parabole verticale de profil dont le plan est conjugué de la direction Δ.

Il n'en reste sur le solide commun que l'arc, d'ailleurs caché et projeté sur la droite uw', tandis qu'en projection horizontale le segment est vu.

La portion de surface P_1 située à gauche de ce plan de profil uc est cachée ; tout le reste est vu. Sur la surface du solide commun appartenant à P_2 la ligne d'ombre propre est précisément Δ, qui est l'intersection de P_2 par le plan diamétral singulier conjugué de la direction Δ, et toute la portion située en avant de δ est dans l'ombre, l'autre étant éclairée. On voit donc sur chaque projection la portion de surface éclairée comprise entre le segment ug_1, $u'g'$ et la courbe d'intersection.

Ombre portée. — La courbe d'ombre portée sur le plan horizontal se compose : 1° de la trace horizontale du cylindre dont les génératrices de front parallèles à Δ s'appuient sur le segment de parabole de profil qui constitue l'ombre propre sur P_1 ; 2° des traces horizontales de toutes les parallèles à Δ qui s'appuient sur la

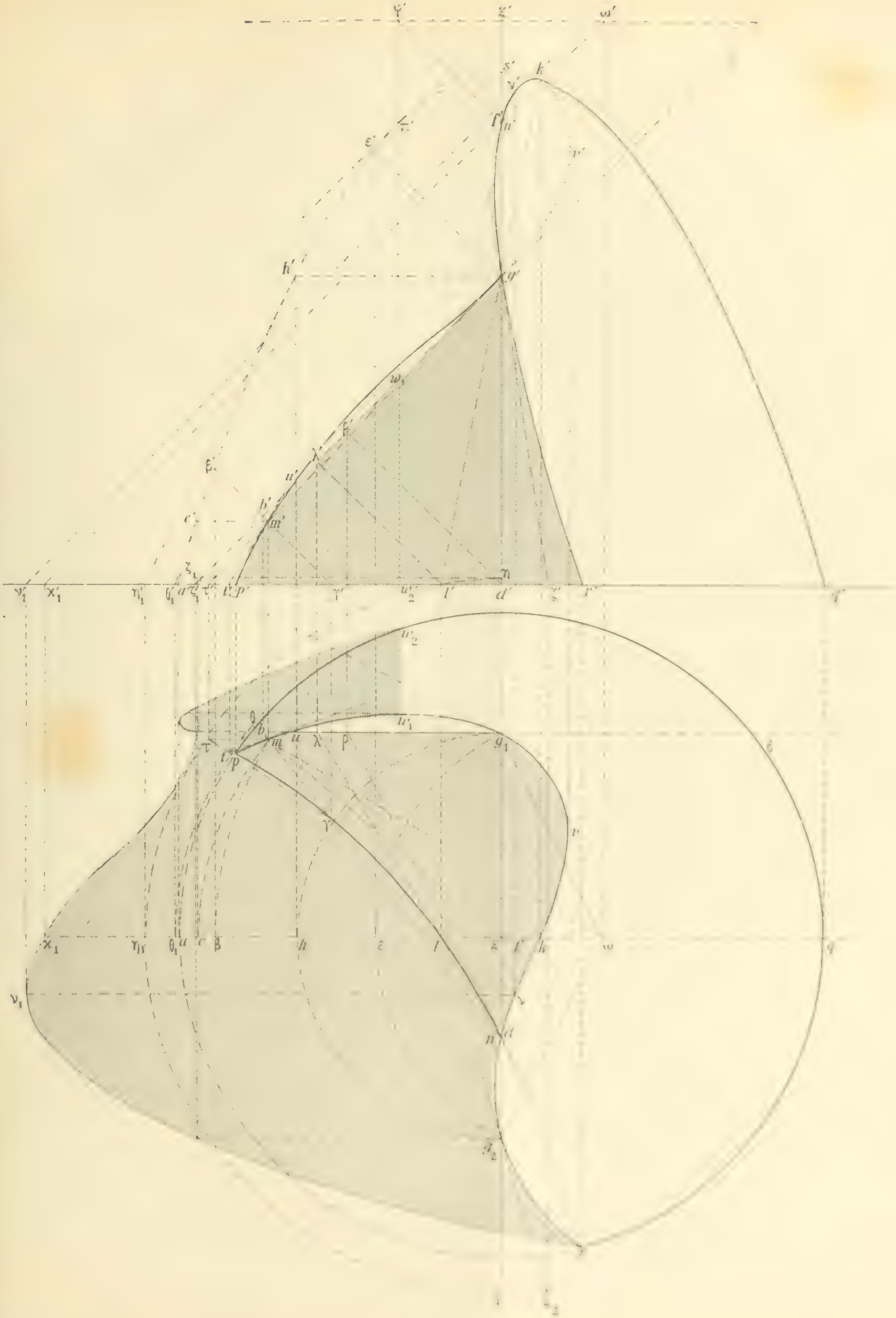


Planche 5

courbe d'intersection des deux surfaces dans sa portion séparant une partie éclairée et une partie dans l'ombre sur le solide commun. On reconnaît ces portions en déterminant par points la trace horizontale du cylindre ayant pour directrice cette courbe d'intersection et ne conservant de cette trace que le contour commençant à l'ombre du point le plus haut sur la parabole d'ombre propre pour s'arrêter à l'ombre du point a, a', qui se confond avec celle du point g_1 et correspond à un point double de la courbe d'ombre portée, puis se poursuit en z_1v_1r, où il rejoint la trace horizontale du solide commun. Cette courbe d'ombre portée présente une boucle dont une partie du contour est dans l'ombre et ne doit pas être tracée. On l'a indiquée par un trait pointillé. L'ombre du point w_1 où la parabole d'ombre propre coupe la courbe d'intersection des deux surfaces donne le point de raccordement de la boucle avec la parabole d'ombre portée et est très voisine du point de la boucle qui correspond au point d'éloignement minimum sur la courbe d'intersection.

Solution analytique. — Prenons pour axe des z l'axe du paraboloïde de révolution et pour plan des xy le plan perpendiculaire au point de cote 96. L'équation du paraboloïde est

$$(P_1) \qquad x^2 + y^2 + 64z - 6144 = 0.$$

Le paraboloïde hyperbolique ayant pour plan directeur un plan

$$x + z + a = 0$$

est engendré par la droite qui s'appuie sur

$$(D) \quad x = 0, \quad y = 32 \qquad \text{et} \qquad \Delta \quad y = -64, \quad x + z = 0$$

Cette droite a donc pour équations

$$\frac{x}{-\frac{a}{2}} = \frac{y - 32}{-64 - 32} = \frac{z + a}{\frac{a}{2} + a},$$

d'où, éliminant a,

$$\frac{2x}{z + a} = \frac{y - 32}{-96},$$

ou P

$$(P_2) \qquad 96x + 32y + 192z - 1024 = 0.$$

Projetons la courbe définie par l'intersection de P_1 et P_2 sur le plan des zx. On tire de (P_2)

$$y = \frac{32(z - 3x)}{z + x}.$$

Portant cette expression dans (P_1),

$$(Q) \qquad x^2(z + x)^2 + 64(z + x)^3 + 32^2(z - 3x)^2 = 0,$$

équation d'une quartique ayant un point double à l'origine ; les tangentes sont

$$-64(z + x)^3 + 32^2(z - 3x)^2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad (z + 7x)(z - x) = 0$$

L'équation (Q) peut s'écrire sous la forme

$$x^2(z + x)^2(x^2 + 64(z + x)) + 32^2(z - 3x)^2 = 0$$

La droite double $(z - 3x)^2 = 0$ la coupe aux points situés sur la parabole méridienne

$$x^2 + 64(z + 64) = 0,$$

et en ces points les deux courbes sont tangentes.

L'axe Oz coupe aussi la courbe Q au point de cote $z = 48$, foyer de la parabole méridienne.

La quartique n'a pas d'asymptote réelle.

Si maintenant nous projetons l'intersection des deux surfaces sur le plan des xy, nous trouvons

$$y(x^2 + y^2 - 32x - y^2 - 32 + 64(2y + 64)) = 0,$$

courbe du troisième degré ayant pour asymptote unique $y = 32$ et coupant Oy aux points $y = -64$ et $y = 32$.

Elle coupe Ox aux points qui sont les projections des points de contact de la courbe de l'espace avec la parabole méridienne.

Courbes d'ombre. — Considérons la droite parallèle aux rayons lumineux

$$y = 0, \qquad x + z = 0.$$

Son plan diamétral conjugué par rapport au paraboloïde (P_1) est

$$x + 32 = 0$$

et coupe la surface suivant la courbe d'ombre propre

$$x + 32 = 0, \qquad y^2 + 64(z - 48) = 0,$$

parabole égale à la méridienne, mais dont le sommet a la cote du foyer de cette méridienne.

Le cylindre circonscrit à P_1 le long de cette courbe coupe le plan $z = -96$ suivant la courbe (π), $y^2 - 64(x + 176) = 0$, qui est aussi une parabole.

Le cylindre qui s'appuie sur la courbe d'intersection de (P_1) et (P_2) s'obtient en exprimant que la droite $Y = y$, $X - x = Z - z$ rencontre la courbe. L'élimination de x, y, z entre les quatre équations donne l'équation du cylindre

$$(Z - X)(Y^2 - 32Y - 128Y + 64Z + 4(Y + 64)(Y^2 + 64Z - X) - 2.64^2) = 0.$$

Il passe par la droite double $X = Z$, $Y = -64$, dont la trace sur le plan $Z = -96$ donne un point double de la courbe d'ombre portée.

Cette courbe a pour équation

$$(x + 96)(y^2 - 32y - 128y + 64x + 4y + 64)^2(y^2 - 64(x + 96) - 2.64^2) = 0.$$

Elle a même asymptote que la cubique étudiée plus haut ; on peut la construire en discutant l'équation par rapport à x qui n'entre qu'au second degré.

Bonne solution de M. A. Rousseau, école supérieure de Fournes.

PHYSIQUE

1951. — *Projet de mesure de $\mathcal{M}\mathcal{H}$ par la méthode de Gauss à l'approximation de* $\frac{1}{1000}$.

Calculs relatifs aux causes d'erreur.

(On fera usage des unités C. G. S. *et de la règle à calcul.)*

Accélération de la pesanteur 981*cm.-sec.*

Champ magnétique : inclinaison, $i = 60°$, *composante horizontale* $\mathcal{H} = 0{,}19$ *gauss, valeurs approximatives.*

L'aimant aura la forme d'un cylindre circulaire AOB *ayant pour longueur* $AB = 6^{cm}$ *et pour rayon* $r = 0^{cm},15$. *Il sera fait d'un acier ayant pour densité* 7,85 *et susceptible de recevoir un moment magnétique de* 420 *unités* C. G. S. *par* cm^3.

Il sera suspendu à un fil de torsion négligeable, au moyen d'une monture dont le poids et l'inertie seront négligés, le point d'attache C *étant situé dans le plan de symétrie perpendiculaire au milieu* O *de l'axe du cylindre aimanté, à une distance de cet axe ayant pour valeur* $OC = 1^{cm}$.

1° *Calculer le volume* v, *la masse* m, *le poids* p, *le moment magnétique* $\mathcal{M}$ *de l'aimant.*

2° *Calculer le moment d'inertie* $I = m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{12}\right)$, *le couple directeur* $C = \mathcal{M}\mathcal{H}$ *et la période d'oscillation* T *de l'équipage, en négligeant l'inclinaison que donne à l'aimant* AB *la composante verticale du champ magnétique.*

3° *Calculer cette inclinaison* ε *et en préciser le sens, en désignant par* A *l'extrémité australe de l'aimant* AB.

4° *Calculer l'écart relatif* $\frac{\mathcal{H}' - \mathcal{H}}{\mathcal{H}}$ *entre la composante* $\mathcal{H}'$ *du champ magnétique dans la direction inclinée de l'aimant, et sa composante horizontale* $\mathcal{H}$.

5° *De quelle longueur* η *faudra-t-il faire glisser l'aimant dans sa monture, et dans quel sens, pour rétablir l'horizontalité de l'aimant? Quel changement relatif* $\frac{T_1 - T}{T}$, *ce déplacement apportera-t-il à la valeur de la période* T?

(*Ecole Polytechnique, concours de 1911.*)

1° Le volume a pour valeur

$$v = \pi r^2 l = \pi \times \overline{0{,}15}^2 \times 6 = 0{,}424 \text{ cm}^3,$$

la masse

$$m = v \times 7{,}85 = 0{,}424 \times 7{,}85 = 3{,}33 \text{ grammes},$$

le poids

$$p = mg = 3{,}33 \times 981 = 3266 \text{ dynes},$$

le moment magnétique

$$\mathcal{M} = 420 \times v = 420 \times 0{,}424 = 178 \text{ C.G.S}$$

2° Le moment d'inertie a pour valeur

$$I = m\left[\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{12}\right] = 3{,}33\left[\frac{\overline{0{,}15}^2}{4} + \frac{6^2}{12}\right] = 10{,}0 \text{ C. G. S.}$$

Le barreau étant supposé maintenu horizontal et susceptible, par suite, de tourner autour d'un axe vertical, le couple directeur a pour valeur

$$C = \mathcal{M}\mathcal{H} = 178 \times 0{,}19 = 34 \text{ C. G. S.}$$

La période des oscillations dans ces mêmes conditions sera

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\mathcal{H}}} = 2\pi\sqrt{\frac{10}{34}} = 3{,}4 \text{ secondes}$$

Ces deux dernières grandeurs dépendant du champ magnétique $\mathcal{H}$, les valeurs trouvées pour C et T sont des valeurs approximatives. $\mathcal{H}$ est donné dans l'énoncé avec une approximation d'environ $\frac{1}{20}$: les valeurs que nous avons trouvées pour C et T comportent donc des approximations qui ont respectivement pour ordres de grandeur $\frac{1}{20}$ et $\frac{1}{40}$. C'est pour cette raison que la précision des calculs numériques n'a pas besoin d'être poussée plus loin.

3° Le barreau aimanté est soumis à l'action :

a) Du couple directeur dû à la composante horizontale $\mathcal{H}$ du champ terrestre ;

b) Du couple directeur dû à la composante verticale $\mathcal{V}$ du champ terrestre ;

c) De son poids p appliqué au centre de gravité O du barreau ;

d) De la tension t du fil appliquée au point d'attache C.

Le système étant en équilibre, ces deux forces (p) et (t) constituent un couple ; t doit donc être parallèle à p. On voit ainsi que l'inclinaison du barreau ne trouble pas la verticalité du fil de suspension.

Dans sa position d'équilibre, le barreau est évidemment contenu dans le plan du méridien magnétique. La composante horizontale $\mathcal{H}$ tend à le placer horizontalement, son pôle austral dirigé vers le nord ; la composante verticale $\mathcal{V}$ tend à le placer verticalement, le pôle austral dirigé vers le sol dans l'hémisphère nord. Le barreau inclinera donc son pôle austral vers le sol.

L'angle ε que fait la direction OC avec la verticale du lieu est déterminée par l'équation des moments des couples :

$$mg \cdot OC \sin\varepsilon - \mathcal{M}\mathcal{H}\sin i - \mathcal{M}\mathcal{V}\cos i = 0,$$

d'où, en tenant compte de ce que $\mathcal{V} = \mathcal{H}\,\mathrm{tg}\,i$,

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon = \frac{\mathcal{M}\mathcal{H}\,\mathrm{tg}\,i}{mg \cdot OC} = \frac{34 \times 1{,}73}{34 \times 3266} = 0{,}0178.$$

Cet angle étant petit, l'arc peut être confondu avec sa tangente, de sorte que

$$\varepsilon = 0{,}0178 \text{ radian} = 1^\circ$$

4° La composante du champ dans la direction inclinée du barreau est la projection sur cette direction inclinée du champ total $\mathcal{T}$, donc

$$\mathcal{H}' = \mathcal{T}\cos(i - \varepsilon) = \mathcal{H}\frac{\cos(i - \varepsilon)}{\cos i}$$

et

$$\frac{\mathcal{H}' - \mathcal{H}}{\mathcal{H}} = \left(\frac{\mathcal{H}}{\cos i}\cos(i - \varepsilon) - \mathcal{H}\right)\frac{1}{\mathcal{H}} = \frac{\cos(i - \varepsilon) - \cos i}{\cos i}.$$

Comme ε est petit, le numérateur peut être considéré comme la variation très petite de $\cos i$ lorsque i varie de $(-\varepsilon)$, donc, d'une façon approchée,

$$\frac{\mathcal{H}' - \mathcal{H}}{\mathcal{H}} = \frac{\varepsilon \sin i}{\cos i} = \varepsilon\,\mathrm{tg}\,i = 0{,}0178 \times 1{,}73 = 0{,}0308.$$

Cette composante $\mathcal{H}'$ est celle qui interviendrait dans l'expression de la période si le barreau oscillait autour de CO. Sans entrer dans les détails d'une analyse complète, on conçoit que le barreau puisse s'approcher plus ou moins de cette condition. Il importe donc de maintenir une horizontalité aussi parfaite que possible.

5° Pour rétablir l'horizontalité de l'aimant, il suffit de le faire glisser de manière à rapprocher son pôle austral A de la monture ; la grandeur η du glissement est donnée par l'équation des moments

$$mg\eta - \mathcal{M}\mathcal{V} = 0,$$

d'où

$$\eta = \frac{\mathcal{M}\mathcal{H}\,\mathrm{tg}\,i}{mg} = \frac{34 \times 1{,}73}{3266} = 0{,}018 \text{ cm}.$$

Par suite de ce déplacement, le moment d'inertie du barreau prend une valeur I_1, différente de celle qui a été calculée au n° 2. La période réelle T_1 que l'on observera aura pour valeur

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{\mathfrak{M}\mathcal{H}}},$$

tandis qu'elle aurait été $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\mathfrak{M}\mathcal{H}}}$ si l'on n'avait pas été obligé de déplacer le terrou dans sa monture pour le maintenir horizontal. L'écart relatif entre ces deux périodes a donc pour valeur

$$\frac{T_1 - T}{T} = \frac{1}{2} \times \frac{I_1 - I}{I}.$$

or $I_1 = I + m\alpha_1^2$, donc

$$\frac{I_1 - I}{I} = \frac{m\alpha_1^2}{I} = \frac{3{,}33 \times \overline{0{,}018}^2}{10} = 0{,}0001,$$

donc

$$\frac{T_1 - T}{T} = 0{,}00005.$$

Cette erreur doit être négligée, étant donné le but poursuivi.

JACQUES CARVALLO, agrégé des sciences physiques.

CONCOURS DE 1911

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Algèbre et Trigonométrie.

1947. — On donne l'équation différentielle

$$(1) \qquad a\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + by = 0,$$

où a et b désignent deux constantes réelles.

I. Trouver une série entière $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots$, qui vérifie l'équation (1) et s'assurer qu'elle est convergente.

II. Constater :

1° Que les coefficients λ_0 et λ_1 demeurent arbitraires ;

2° Que la série peut s'écrire $\lambda_0\varphi(x, a, b) + \lambda_1\psi(x, a, b)$; φ et ψ désignant deux séries entières en x dont les coefficients sont des fonctions de a et b ;

3° Que les fonctions satisfont à l'équation (1) ;

4° Que leurs dérivées φ'_x et ψ'_x satisfont chacune à une équation de même forme.

III. Exprimer $\varphi(x, a, b)$ et $\psi(x, a, b)$ en fonction de $\varphi(x, a, b-1)$ et $\psi(x, a, b-1)$.

IV. Quand b est un entier positif, suivant qu'il est pair ou impair, la série φ ou ψ devient un polynome.

V. Discuter, d'après le signe de a, la réalité des racines de ces polynomes φ ou ψ suivant la parité de b.

(*Université de Paris*, 1910.)

Géométrie analytique et Mécanique.

1948. — On donne trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz.

1° Trouver les équations de la parabole (P) qui satisfait aux conditions suivantes :

Son foyer a pour coordonnées $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$; son axe est parallèle à Oy ; elle passe par O ; enfin elle tourne sa concavité vers les y positifs.

2° Montrer qu'à chaque point M de l'espace correspond, en général, un point R de l'axe Ox et un seul, autre que O, tel que la droite MR rencontre (P).

Calculer OR en fonction des coordonnées de M.

3° Parmi les droites MR ainsi définies, on considère celles qui sont parallèles au plan $x = z$. Trouver et étudier leur lieu géométrique.

4° On imagine que M soit la position d'un point matériel libre de masse égale à l'unité et que le vecteur MR représente la force unique qui agit sur lui.

Que peut-on dire du mouvement projeté sur le plan xOy ?

Que peut-on dire du mouvement lui-même quand la vitesse initiale de M est dans le plan MOz ?

5° Faire l'étude complète du mouvement avec les conditions initiales suivantes :

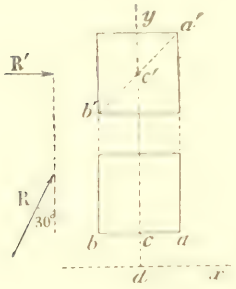
Coordonnées du point M : [illegible] $= 2$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$;

Projections de sa vitesse : [illegible] $= 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 3$.

(31 mai, de 7 h. à 11 h.)

Epure de géométrie descriptive.

1949. — Un cube a une face de front et une face horizontale. Un hyperboloïde de révolution a pour axe l'axe vertical du cube, et pour l'une de ses génératrices la droite $(ab, a'b')$, diagonale de la face antérieure.



On considère le solide S limité par cet hyperboloïde et par les plans des deux faces horizontales du cube.

On représentera ce qui reste du solide S, quand on supprime la partie contenue à l'intérieur d'une sphère ayant pour centre le point (a, a') et passant par le point (c, c'), centre de la face antérieure du cube.

On supposera que le solide ainsi obtenu est éclairé par des rayons horizontaux (R, R') dirigés conformément aux indications du croquis.

Légende : dx, bord inférieur de la feuille ; dy, grand axe de la feuille ; $dc =$ [illegible] ; $cc' =$ [illegible] ; $ca =$ [illegible].

(1er juin, de 7 h. à 11 h.)

Calcul.

1950. Application de la règle à calcul à la fonction $y = \frac{x}{\sin x}$, où x représente le rapport de l'arc au rayon.

1° Dresser une table de la fonction en faisant croître x de 0 à 100 grades par échelons de 10 grades.

2° Fournir un moyen d'étendre l'usage de la table en dehors de ses limites et calculer la table auxiliaire nécessaire à cet effet.

3° Application : Calculer y pour un arc de 542 grades, au moyen des deux tables construites.

(1er juin, de 5 h. à 6 h.)

Physique.

I. — Le microscope.

II. — **1951** [1].

Chimie.

I. — Le fluor ; préparation, propriétés.

II. — **1952.** Etant donné un échantillon de trichlorure de phosphore impur et sachant que cet état est dû à la présence, dans l'échantillon, de 10 pour 100 d'une substance étrangère unique, constituée par un composé binaire chloré, on demande de déterminer la nature de cette impureté d'après les considérations suivantes :

a) Une certaine quantité de l'échantillon, mise en contact avec une proportion d'eau suffisante, s'y dissout totalement et la solution précipite en jaune quand on la traite par l'hydrogène sulfuré.

b) Le liquide provenant de la réaction de l'eau est chauffé à l'ébullition avec de l'acide azotique et neutralisé ensuite au moyen du carbonate de sodium ; l'évaporation à sec fournit un résidu blanc. Quand on mélange ce résidu avec du charbon et qu'on chauffe le tout dans un tube à essais, à une température voisine du rouge, on observe qu'il se sublime, sur les parois du tube, un corps gris à éclat métallique. Ce corps gris possède la propriété de se dissoudre dans les hypochlorites alcalins.

Après avoir déduit de ces observations la nature de l'impureté, on en indiquera la formule et calculera son poids moléculaire, en tenant compte de ce fait que la densité de vapeur du produit impur, indépendante de la température, est égale à 4,88. On déduira ensuite de ce poids moléculaire le poids atomique de l'élément combiné au chlore dans l'impureté. Connaissant ces résultats, on procédera alors, avec le mélange, aux deux opérations suivantes :

A) On prend 10^g du chlorure impur et on les met en présence de chlore gazeux parfaitement sec, de façon à en réaliser la saturation complète.

[1] Voir l'énoncé et la solution de cette question, p. 249 du présent numéro.

B) On prend à nouveau une certaine quantité de chlorure impur que l'on traite par de l'eau ; puis, à la solution ainsi obtenue on ajoute du chlorate de potassium en quantité suffisante pour produire une réaction complète.

Indiquer :

1° Le poids du produit résultant de l'action du chlore, sans tenir compte du gaz qui pourrait être retenu autrement qu'à l'état de combinaison (opération A) ;

2° La nature des substances en solution après l'action du chlorate de potassium (opération B).

Poids atomiques : Cl = 35,5 ; P = 31.

N.-B. — Il ne sera pas tenu compte du résultat relatif à la détermination du poids moléculaire de l'impureté pour les candidats qui ne donneraient pas, sur leurs copies, la suite des calculs qui y conduisent (²).

(*31 mai, de 2 h. à 4 h.*)

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1915. — *Enveloppe des paraboles de directrice fixe dont le foyer décrit une droite ou un cercle.*

1° *Cas d'une droite.* — Soient $x = 0$ l'équation de la droite que décrit le foyer, et $x\cos\theta + y\sin\theta = 0$ l'équation de la directrice fixe. L'équation de toute parabole satisfaisant aux conditions de l'énoncé est $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (x\cos\theta + y\sin\theta)^2$, où α, β sont les coordonnées du foyer, et, comme $\alpha = 0$, on peut écrire

$$(1) \qquad x^2 + (y-\beta)^2 = (x\cos\theta + y\sin\theta)^2,$$

β est l'arbitraire. Dérivant par rapport à β, on a

$$(2) \qquad 2(y-\beta) = 0.$$

Eliminant β entre (1) et (2), on a l'équation de l'enveloppe cherchée :

$$x^2 = (x\cos\theta + y\sin\theta)^2$$

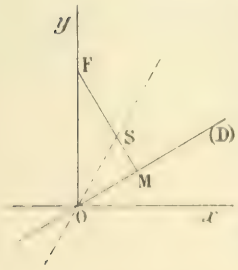
ou

$$(x^2 - y^2)\sin^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta = 0,$$

$$(x^2 - y^2)\sin\theta - 2xy\cos\theta = 0.$$

L'enveloppe se compose de deux droites rectangulaires passant par l'origine.

Solution géométrique. — Toutes ces paraboles sont semblables et ont même direction d'axes, donc elles sont homothétiques, et elles sont homothétiques par rapport à un point de la ligne des foyers. Elles le sont aussi par rapport à un point de la ligne des sommets. Or il est évident que ce lieu des sommets, qui est le lieu des milieux de droites telles que FM, passe par l'origine. Donc l'origine est le centre d'homothétie et les deux tangentes communes à toutes les paraboles passent par O. Donc l'enveloppe est bien formée de deux droites et ces droites sont rectangulaires, car le point O est sur la directrice commune à toutes les paraboles.



2° *Cas d'un cercle.* — Nous prenons l'origine au centre et l'axe Oy parallèle à la directrice. L'équation des paraboles est alors de la forme

$$(x - r\cos\varphi)^2 + (y - r\sin\varphi)^2 = (x - p)^2,$$

$$x^2 + y^2 + r^2 - 2r(x\cos\varphi + y\sin\varphi) = (x-p)^2.$$

En dérivant par rapport à φ, on a

$$2r(-x\sin\varphi + y\cos\varphi) = 0.$$

En isolant dans la première équation les termes en φ, élevant au carré les deux équations et ajoutant, on a

$$4r^2(x^2 + y^2) = (y^2 + r^2 + 2px - p^2)^2.$$

(²) Voir, p. 239 de ce numéro, une remarque sur cette question.

C'est l'équation de l'enveloppe.

Cette courbe semble être une quartique ayant ses directions asymptotiques parallèles à Ox. Mais il est facile de voir qu'elle se décompose en deux paraboles. En effet revenons aux équations

$$2r(x\cos\varphi - y\sin\varphi) = x^2 + y^2 + r^2 - (x - p)^2, \qquad 2r(-x\sin\varphi + y\cos\varphi) = 0,$$

et ajoutons-les après les avoir élevées au carré : nous aurons

$$4r^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + r^2 - (x - p)^2)^2,$$

équation qui peut s'écrire

$$(x^2 + y^2 - r^2)^2 - 2(x - p)(x^2 + y^2 + r^2) + (x - p)^2 = 0,$$

puis

$$(x^2 + y^2 - r^2)^2 - 2(x - p)^2(x^2 + y^2 + r^2) + (x - p)^4 - 4r^2(x - p)^2 = 0.$$

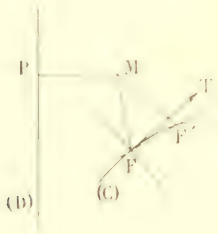
On a alors une différence de deux carrés qui se décompose immédiatement en un produit de deux facteurs.

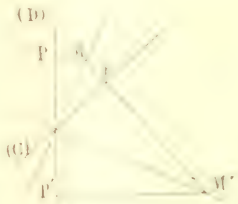
J. OTTENHEIMER et P. CHANGEY.

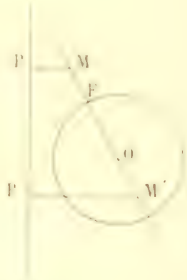
Solution géométrique. — Proposons-nous de chercher le point caractéristique d'une parabole ayant une directrice fixe (D) et dont le foyer F décrit une courbe (C). Soit F′ une position du foyer voisine de F, M un point commun aux paraboles de foyers F et F′, l'on a

$$MP = MF = MF'. \tag{1}$$

donc le point M est sur la perpendiculaire au milieu de FF′. Le point caractéristique d'une parabole se trouve donc sur la normale au lieu (C) au foyer correspondant.







Supposons que (C) soit une droite. — Des égalités (1) on conclut que l'enveloppe cherchée se compose des bissectrices de l'angle des droites (C) et D.

Supposons que (C) soit un cercle. — Soit O le centre, à un point F correspondent deux points M, M′ de part et d'autre de F, dont l'un M est à l'extérieur du cercle. Remarquons que, d'après (1), on a

$$OM = OF + MP,$$
$$OM' = |MP' - OF|$$

$(OM' = MP' - OF)$ si le cercle ne coupe pas la directrice ; $(OM' = OF - MP)$ s'il la coupe.

Traçons deux droites D_1, D_2 à la distance OF de la directrice donnée : l'enveloppe se compose des paraboles de foyer O et de directrices D_1, D_2.

R. DONTOT, élève de l'école Normale supérieure.

Bonnes solutions analytiques de MM. J. Sourbaigné ; A. Courtois ; L. Naculle ; Jamerot ; E. N. Barisien ; G. Lach ; L. Perrin ; Guillerme ; L. Simon, à Fourmies ; J. Guillaume ; M. Nicolas ; A. Nègre.
Bonnes solutions géométriques de MM. Marescalchi ; A. Roussenq.

CONCOURS DE 1911

ÉCOLE CENTRALE

Mathématiques.

I. — **1953**. Poulie fixe avec frottement.

On néglige les poids et les épaisseurs de la poulie et de la corde et on admet que la corde ne peut pas glisser sur la poulie. La puissance P et la résistance Q s'exercent suivant la corde tangentiellement à la poulie

et sont supposées verticales. Soit R le rayon de la poulie circulaire, R′ le rayon de l'ouverture centrale circulaire ou œil de la poulie, α l'angle de frottement de la poulie sur l'axe fixe qui est un cylindre de révolution horizontal de rayon moindre que celui de l'œil.

Pour une même valeur de Q, on demande de donner, sans démonstration :

1° L'expression de la valeur P′ de P qui correspond à l'état d'équilibre-limite où la poulie est sur le point de tourner dans le sens de P ;

2° L'expression de la valeur P″ de P qui correspond à l'état d'équilibre-limite où la poulie est sur le point de tourner dans le sens de Q.

Application numérique. — On donne $R = 22,5$, $R' = 4,5$ en centimètres,
$P' = 2,057$, $P'' = 1,377$ en kilogrammes.

Calculer la résistance Q et l'angle α de frottement.

II. — **1954**. On considère deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy, un point P mobile sur Ox d'abscisse α et un point Q mobile sur Oy d'ordonnée β et tels que : $\alpha + \beta = 2a$, a étant une longueur positive donnée.

1° Sur PQ comme diagonale on construit le carré PRQS, montrer que l'un des sommets R reste fixe et trouver le lieu du quatrième sommet S.

2° Par le point S on mène la parallèle à la droite dont l'équation est $y - x = 0$, elle rencontre la droite PQ en un point M.

Trouver, reconnaître et construire le lieu (G) de M et démontrer qu'il est tangent à la droite PQ au point M.

3° Sachant que le vecteur-vitesse de M sur (G) est la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{MR}$ sur la droite PQ, trouver l'équation du mouvement de chacun des points P et Q et discuter le mouvement de M sur (G). On supposera qu'à l'origine du temps, le point Q est à l'origine O des coordonnées.

4° Par l'origine O des coordonnées on mène le vecteur OM′ équipollent au vecteur-vitesse de M. Trouver, reconnaître et construire le lieu du point M′. Trouver le lieu de V, extrémité du vecteur-vitesse M′V de M′ et en déduire une construction géométrique du vecteur-accélération de M.

(14 pour. de 7 h. à 11 h.)

Trigonométrie.

1955. — On considère un trapèze ABCD rectangle en A et en D ; soit E le point de rencontre des côtés AD et BC. On désigne par x l'angle CED, par a la longueur BC et par d la longueur DE.

1° Evaluer la longueur de la diagonale AC en fonction de a, d, x et étudier la variation de cette longueur AC quand x varie, les longueurs a et d restant constantes.

2° Déterminer l'angle x, connaissant les trois longueurs
$BC = a$, $DE = d$, $AC = b$

Discuter, indiquer dans quels cas ce problème est possible et combien il a de solutions.

Calcul.

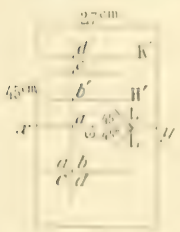
1956. — Calculer, soit en grades, soit en degrés, l'angle x, l'angle y et l'angle z, compris tous les trois entre zéro et deux angles droits qui vérifient les équations :

$$\cos x = \sqrt{\frac{31625}{325138}}, \qquad \operatorname{tg} y = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \qquad \operatorname{tg} z = \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 2y}.$$

(15 pour. de 2 h. à 5 h.)

Epure.

1957. — Pas de titre extérieur. Titre intérieur : Ombres.



Cadre 27cm sur 45cm. La ligne de terre xy (en noir) est à 8cm au-dessus du côté xx du cadre.

$xo = oy$, $oc' = 4^{cm},5$, $c'a = 10^{cm}$, $a'b' = 6^{cm}$, $xc = 12^{cm}$, $c'd = 1^{cm},5$.

Un hyperboloïde de révolution à une nappe dont l'axe est vertical a pour centre le point c, c' ; le rayon du cercle de gorge a $1^{cm},5$ et les génératrices rectilignes font avec le plan horizontal un angle de 60°.

Il est limité aux deux plans horizontaux K′ et H′.

On déterminera la sphère inscrite dans l'hyperboloïde le long du parallèle situé dans le plan horizontal K′. On ne considérera que la partie de cette sphère située au-dessus du plan K′.

Le plan H′ coupe l'hyperboloïde suivant un cercle par lequel passe un paraboloïde de révolution, dont le sommet est a, a'. On considère seulement la portion située au-dessous du plan H′.

Les trois corps précédents forment un solide dont on demande les projections ; on trouvera ensuite les ombres propres et portées sur les deux plans de projection, les rayons lumineux étant parallèles à la droite L,L′.

Les contours d'ombres qui existent vus et *cachés* seront tracés à l'encre noire ou à l'encre bleue ; on mettra des hachures sur les surfaces vues qui sont dans l'ombre ; la distance de deux hachures consécutives ne sera pas la même dans l'ombre propre et dans l'ombre portée.

Nota. — Les constructions seront faites à l'encre rouge, traits pleins plutôt fins. On déterminera les points et les tangentes remarquables. Les tangentes seront dessinées en traits rouges un peu plus accentués aux environs des points de contact (flèches inutiles).

(15 juin, de 7 h. à 11 h.)

Physique.

I. — Détermination d'une densité de vapeur par la méthode de Dumas.

II. — **1958.** Dans une première approximation on a calculé la densité d'une vapeur sans tenir compte d'une bulle d'air observée lors du jaugeage du ballon et l'on a trouvé le nombre. . . . $d' = 8,730$.

Calculer la densité exacte connaissant, le volume V_0 à zero du ballon . . . . . $V_0 = 324^{cm3}$,

Son coefficient de dilatation. . . . . $k = 0,000029$,

La température T et la pression H sous lesquelles il a été fermé. . . . . $T = 300°$, $H = 753$,

Le coefficient de dilatation des gaz . . . . . $\alpha = 0,00367$,

Le volume $u = 2^{cm3}$ de la bulle d'air mesuré à la température . . . . . $t_1 = 16°$,

sous la pression . . . . . $H_1 = 752$.

Etablir la formule algébrique avant tout calcul.

Chimie.

I. — L'acide cyanhydrique.

II. — **1959.** A. Quatre opérations distinctes sont faites avec le chlorure d'ammonium pur et sec (*sel ammoniac, chlorhydrate d'ammoniaque*) en vue de préparer 1 litre de chacun des gaz suivants :

1° L'ammoniac ;

2° L'acide chlorhydrique ;

3° Le chlore ;

4° L'hydrogène.

On demande d'indiquer les réactions, de les formuler et de calculer le poids de sel ammoniac employé pour chacune des préparations.

B. — Dire comment on pourrait, dans une opération unique, mettre simultanément en liberté le chlore et l'azote contenus dans le chlorure d'ammonium. Formuler la réaction proposée et calculer le volume de chacun des deux gaz obtenus en décomposant 1 gramme de sel.

C. — Indiquer quelles expériences il faudrait faire pour reconstituer le sel ammoniac en partant successivement de chacun des quatre gaz préparés en A.

Ecrire seulement les réactions proposées sans faire de calculs.

On supposera que les réactions sont complètes et qu'il n'y a pas de pertes.

On ne fera pas les corrections de température et de pression.

Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques.

(11 juin, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2.)

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

21e Année. Août 1911. N° 11.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES COURBES TRIANGULAIRES (*Fin*).

par M. **G. Valiron**, professeur au lycée de Besançon.

Cubiques à point double et leurs polaires réciproques. — Les cubiques à point double ont une équation de la forme

$$(aP)^{\frac{1}{3}} + (bQ)^{\frac{1}{3}} + (cR)^{\frac{1}{3}} = 0,$$

$P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ étant les équations des côtés du triangle formé par les tangentes d'inflexion. On voit qu'elles peuvent être considérées comme les polaires (trilinéaires) de la conique

$$(aP)^{\frac{1}{2}} + (bQ)^{\frac{1}{2}} + (cR)^{\frac{1}{2}} = 0$$

inscrite dans le triangle formé par les tangentes d'inflexion, le point de Brianchon du triangle étant le point double de la cubique.

On pourra des propriétés simples d'une cubique à point double déduire des propriétés des coniques du réseau tangentiel

$$\frac{a}{U} + \frac{b}{V} + \frac{c}{W} = 0.$$

Le théorème général sur la courbure donne ici le théorème suivant :

Le rayon de courbure en un point d'une cubique à point double est égal et de sens contraire au triple du rayon de courbure de la conique circonscrite au triangle formé par les tangentes d'inflexion et qui est tangente à la cubique en ce point.

On pourra également considérer les coniques conjuguées à ce triangle.

En particulier, l'on aura la construction du centre de courbure en un point de l'*antipodaire d'une parabole* par rapport au foyer. Les courbes de troisième classe à tangente double donneront lieu à des propositions analogues. Ces courbes pourront être considérées comme la polaire trilinéaire négative d'une conique passant par les trois points de rebroussement et dont la droite de Pascal du triangle formé par ces trois points est la tangente double.

L'équation de ces courbes de troisième classe par rapport au triangle formé par les points de rebroussement est de la forme

$$\left(\frac{a}{P}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{b}{Q}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{c}{R}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Le théorème sur la courbure est donc le suivant :

Le rayon de courbure en un point d'une courbe de troisième classe à tangente double est les $\frac{4}{3}$ de celui de la conique circonscrite au triangle des points de rebroussement qui lui est tangente en ce point.

En particulier on retrouvera la construction du centre de courbure de la *cardioïde*

Courbes triangulaires de deuxième espèce. — Considérons les courbes[1] dont l'équation est de la forme

$$\alpha P^{\mu} Q^{\nu} + \beta R^{\mu+\nu} = 0,$$

$P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ étant les côtés du triangle de référence. Par un point il passe une seule de ces courbes tangente à une droite donnée, car $\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{\mu}{\nu}$ sont alors déterminés.

Ces courbes ont une définition géométrique simple :

Le rapport anharmonique de la tangente en un point avec les droites joignant ce point aux sommets du triangle de référence est constant.

En effet, au point P_0, Q_0, R_0 la tangente a pour équation

$$\mu \frac{P}{P_0} + \nu \frac{Q}{Q_0} - (\mu + \nu) \frac{R}{R_0} = 0,$$

comme on le voit en se servant de la relation $\alpha P^{\mu} Q^{\nu} + \beta R^{\mu+\nu} = 0$: les coefficients de $\frac{P}{P_0}$, $\frac{Q}{Q_0}$, $\frac{R}{R_0}$ ne dépendant que de μ et ν, la propriété est établie.

Inversement, l'équation générale des courbes jouissant de cette propriété est bien l'équation précédente, comme on le constate facilement. Ceci posé, je démontre la proposition suivante :

C *étant une courbe triangulaire de deuxième espèce, le rayon de courbure en l'un de ses points est égal à* $\rho_\mu(1 - \mu)$, ρ_μ *étant le rayon de courbure de la courbe de première espèce de degré* μ *qui lui est tangente en ce point.*

En effet l'équation de la courbe peut s'écrire

$$\mu \log P + \nu \log Q - (\mu + \nu) \log R = K.$$

Prenons pour axe des x la tangente au point considéré, et pour axe des y la normale, et soit

$$P = ax + by + c, \ldots$$

On aura

$$\log P = \log c + \frac{ax}{c} + \frac{by}{c} - \frac{(ax + by)^2}{2c^2} + \ldots$$

le développement étant valable dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$. Pour $\log Q$ et $\log R$, on a des expressions analogues. On a alors les deux relations

$$\mu \log c + \nu \log c' - (\mu + \nu) \log c'' = K,$$

$$(1) \qquad \mu \frac{a}{c} + \nu \frac{a'}{c'} - (\mu + \nu) \frac{a''}{c''} = 0,$$

qui expriment le contact en O à Ox. Quant au rayon de courbure il est égal à $-\frac{k}{h}$, k désignant le coefficient de y dans l'équation de la courbe, h celui de $\frac{x^2}{2}$. On a ici

$$(2) \qquad \begin{cases} k = \mu \frac{b}{c} + \nu \frac{b'}{c'} - (\mu + \nu) \frac{b''}{c''}, \\ -h = \mu \frac{a^2}{c^2} + \nu \frac{a'^2}{c'^2} - (\mu + \nu) \frac{a''^2}{c''^2}. \end{cases}$$

On peut éliminer μ et ν entre les équations (1) et (2), ce qui donnera la valeur de $\frac{k}{h}$; on a ainsi

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{c} - \frac{a''}{c''} & \frac{a'}{c'} - \frac{a''}{c''} & 0 \\ \frac{b}{c} - \frac{b''}{c''} & \frac{b'}{c'} - \frac{b''}{c''} & k \\ \frac{a^2}{c^2} - \frac{a''^2}{c''^2} & \frac{a'^2}{c'^2} - \frac{a''^2}{c''^2} & -h \end{vmatrix} = 0.$$

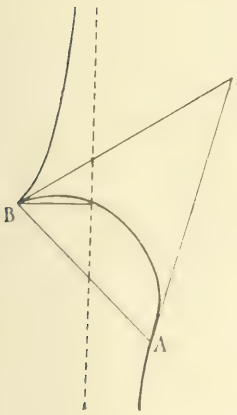
[1] Ces courbes et la relation de courbure établie plus loin sont citées par M. Jamet.

il est loisible d'écrire ce déterminant sous les formes suivantes :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a''}{c''} & \frac{a}{c}-\frac{a''}{c''} & \frac{a'}{c'}-\frac{a''}{c''} & 0 \\ \frac{b''}{c''} & \frac{b}{c}-\frac{b''}{c''} & \frac{b'}{c'}-\frac{b''}{c''} & k \\ \frac{a''^2}{c''^2} & \frac{a^2}{c^2}-\frac{a''^2}{c''^2} & \frac{a'^2}{c'^2}-\frac{a''^2}{c''^2} & -h \end{vmatrix} = 0, \quad \text{puis} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{a''}{c'} & \frac{a}{c} & \frac{a'}{c'} & 0 \\ \frac{b''}{c''} & \frac{b}{c} & \frac{b'}{c'} & k \\ \frac{a''^2}{c'^2} & \frac{a^2}{c^2} & \frac{a'^2}{c'^2} & -h \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} c & c' & c'' & 0 \\ a & a' & a'' & 0 \\ b & b' & b'' & k \\ \frac{a^2}{c} & \frac{a'^2}{c'} & \frac{a''^2}{c''} & -h \end{vmatrix} = 0.$$

En comparant ce déterminant au déterminant (6) trouvé dans l'étude des courbes de première espèce, on voit que l'on aura

$$-\frac{k}{h} = \rho_\mu(1-\mu),$$



ρ_μ étant le rayon de courbure de la courbe de première espèce de degré μ tangente à l'origine. Le théorème est donc établi.

Cas particuliers. — Prenons les cubiques

$$\alpha P^2 Q - R^3 = 0.$$

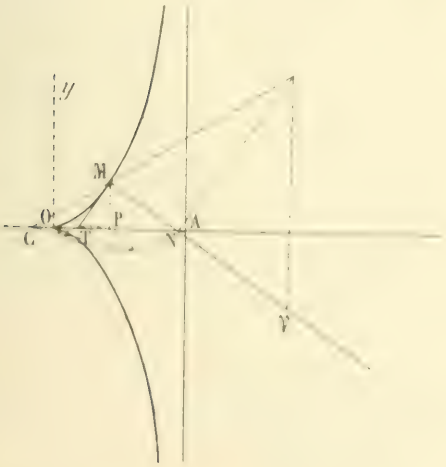
Elles admettent pour point de rebroussement le sommet B opposé à $Q = 0$, la tangente étant $P = 0$, et le sommet A opposé à $P = 0$ pour point d'inflexion, la tangente étant $Q = 0$; on sait qu'une telle cubique est une cissoïde de conique, la droite étant tangente à la conique. Si l'on définit ainsi la courbe on sait construire le triangle ABC, et l'on voit que :

Le rayon de courbure en un point sera le double de celui de la conique circonscrite au triangle ABC *et tangente à la courbe en ce point.*

Si l'un des côtés est à l'infini, on pourra prendre une conique conjuguée. Nous aurons alors $\rho = -\rho_2$:

Le centre de courbure sera symétrique de celui de la conique conjuguée par rapport au pied de la normale.

On construira ainsi immédiatement le centre de courbure en un point des courbes $py^2 = x^3$ (parabole semi-cubique, développée de parabole $y^2 = 2px$); $p^2y = x^3$ (parabole cubique); $xy^2 = p^3$ (qui se déduit de la parabole $x = p^2y_1$ par la transformation $y_1 = \frac{1}{y}$ étudiée par M. Valensi (Revue de Spéciales)).



Pour la cissoïde de Dioclès, le triangle est formé par Ox, Oy et l'asymptote. Les coniques conjuguées ont l'un de leurs axes suivant Ox, celle qui est tangente à MT en M a donc pour centre le point C de Ox tel que

$$\overline{CT}\cdot\overline{CP} = \overline{CO}\cdot\overline{CA},$$

point que l'on sait construire, le centre de courbure de cette conique est alors le point γ, celui de la cissoïde est le symétrique de γ par rapport à M.

Enfin on voit que l'on a une construction du rayon de courbure à toutes les courbes $y = Ax^\alpha$ quel que soit α (en coordonnées rectangulaires).

Généralisation. — Soient $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ les équations de trois courbes que je supposerai telles que les trois formes polaires

$$V_{1\theta} \equiv xU'_{1\theta} + yU'_{1\theta} + zU'_{1\theta},$$
$$V_{2\theta} \equiv xU'_{2\theta} + yU'_{2\theta} + zU'_{2\theta},$$
$$V_{3\theta} \equiv xU'_{3\theta} + yU'_{3\theta} + zU'_{3\theta},$$

sont en général distinctes (ce qui revient à supposer le déterminant fonctionnel de $U_1U_2U_3$ non identiquement nul, c'est-à-dire que l'on n'a pas de relation telle que $\alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3 \equiv 0$). Ceci revient à dire que les trois courbes définissent un *réseau*. Considérons alors les courbes C_μ dont l'équation est

$$\alpha U_1^\mu + \beta U_2^\mu + \gamma U_3^\mu = 0,$$

α, β, γ étant des constantes. On verra immédiatement que par un point A il passe une seule courbe C_μ tangente à une droite D en ce point. Cherchons les relations entre les courbures des différentes courbes C_μ tangentes en A à la droite D. En prenant AD pour Ox et la perpendiculaire pour Oy, on sait que le rayon de courbure sera le quotient $\frac{k}{h}$ du coefficient k de y, par le coefficient h de $-\frac{x^2}{2}$ dans le développement en série du premier membre de l'équation de la courbe dans le voisinage de $x = 0$. Soit

$$U_1 \equiv a + a'x + a_1 y + a''x^2 + \ldots,$$
$$U_2 \equiv a_1 + a_1 x + a_2 y + a'_1 x^2 + \ldots,$$
$$U_3 \equiv a_2 + a'_2 x + a_1 y + a''_2 x^2 + \ldots.$$

Les trois nombres a, a_1, a_2 ne sont pas tous nuls si le point A n'est pas commun aux trois courbes. Exprimons la condition de contact ; on a

$$\alpha a^\mu + \beta a_1^\mu + \gamma a_2^\mu = 0,$$
$$\alpha a^{\mu-1} a' + \beta a_1^{\mu-1} a_1 + \gamma a_2^{\mu-1} a_2 = 0,$$

et de plus

$$k = \mu\left[\alpha a^{\mu-1} a_1 + \beta a_1^{\mu-1} a_2 + \gamma a_2^{\mu-1} a_1\right],$$
$$2h = \mu\left[\alpha\left(a^{\mu-1} a'' + \frac{\mu-1}{2} a'^2 a^{\mu-2}\right) + \ldots\right].$$

En éliminant α, β, γ, l'on a

$$\begin{vmatrix} a^\mu & a_1^\mu & a_2^\mu & 0 \\ aa' & a_1 a_1 & a_2 a_2 & 0 \\ aa & a_1 a_1 & a_2 a_2 & \frac{k}{\mu} \\ aa'' + \frac{\mu-1}{2} a'^2 & a_1 a_1 + \frac{\mu-1}{2} a_1 & a_2 a_2 + \frac{\mu-1}{2} a_2 & \frac{2h}{\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

D'où
$$\frac{1}{\rho_\mu} = \frac{h}{k} = A\mu + B,$$

A et B étant indépendants de μ. Par conséquent :

Si l'on considère trois courbes C_{μ_1}, C_{μ_2}, C_{μ_3} tangentes en un point A, les rayons de courbure en ce point vérifient la relation

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho_{\mu_1}} & \mu_1 & 1 \\ \frac{1}{\rho_{\mu_2}} & \mu_2 & 1 \\ \frac{1}{\rho_{\mu_3}} & \mu_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mu_2 - \mu_3}{\rho_{\mu_1}} + \frac{\mu_3 - \mu_1}{\rho_{\mu_2}} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\rho_{\mu_3}} = 0.$$

On verra par des calculs analogues que les courbes C_0 dont l'équation est

$$U_1^{\mu_1} U_2^{\mu_2} U_3^{\mu_3} = k$$

et qui sont telles qu'une seule est tangente à une droite D en un point donné, doivent être considérées comme correspondant à $\mu = 0$.

En particulier le centre de courbure de la courbe C_{μ_1} est conjugué harmonique du point d'incidence par rapport aux centres de courbure des courbes $C_{\mu_1 - 1}$, $C_{\mu_1 + 1}$ qui lui sont tangentes.

Applications. — I. Prenons $U_1 = x^2 + y^2$, $U_2 = x$, $U_3 = y$. On aura pour C_1 les cercles passant par l'origine, pour C_{-1} les strophoïdes tangentes aux axes à l'origine. Si l'on considère alors les lemniscates $(x^2 + y^2)^2 = \lambda xy$ (dont le rayon de courbure est en un point les $\frac{2}{3}$ de celui du cercle C_1 qui lui est tangent en ce point) on aura la proposition suivante :

Étant donnée une lemniscate, la strophoïde qui admet même point double et mêmes tangentes en ce point et qui lui est tangente en un point M *a pour rayon de courbure en ce point* M *les* $\frac{3}{8}$ *de celui de la lemniscate.*

On aura de même une relation entre le rayon de courbure en un point de la *rosace à quatre branches* $(x^2 + y^2)^3 = kx^2y^2$ et ceux de la strophoïde C_{-1} et du cercle C_1 qui lui sont tangents en ce point.

II. — Considérons les courbes C_μ dont l'équation bipolaire est $\rho^\mu + k\rho'^\mu = k'$, les courbes C_1 sont des *ovales de Descartes*, les courbes C_2 des cercles dont le centre est sur Ox. Si ρ_μ est le rayon de courbure d'une courbe C_μ en un point, ρ_1 celui de l'ovale de Descartes qui lui est tangente en ce point, d la portion de normale comprise entre le point d'incidence et l'axe, on a la relation

$$\frac{1}{\rho_\mu} = \frac{2-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu - 1}{d}.$$

Remarque. — Lorsqu'on suppose que $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ sont des droites, on a $\mu_1 = \mu$ et la relation générale devient, en prenant $\mu_3 = 1$,

$$\frac{\mu_2 - 1}{\rho_{\mu_1}} + \frac{1 - \mu_1}{\rho_{\mu_2}} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\rho_\mu^{1-\mu_1} = C^{te}$$

SUR LES SURFACES QUI ONT UN AXE TERNAIRE

par M. **Ch. Bioche**.

1 On dit qu'une figure admet pour *axe ternaire* une droite Δ lorsqu'une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de Δ amène la figure à coïncider avec elle-même.

Il est facile de voir que les points, dont les coordonnées sont

$$(\alpha, \beta, \gamma), \qquad (\gamma, \alpha, \beta), \qquad (\beta, \gamma, \alpha),$$

(c'est-à-dire s'obtiennent en permutant circulairement un système de trois nombres) se permutent les uns dans les autres par une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de la droite $x = y = z$, car cette rotation revient à une permutation des axes de coordonnées. Il résulte immédiatement de là que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface admette comme axe ternaire la droite $x = y = z$ est que l'équation de cette surface ne change pas lorsqu'on y permute circulairement x, y et z.

En particulier cela a lieu lorsque l'équation est symétrique par rapport à x, y et z, c'est-à-dire si la surface admet pour plans de symétrie les plans

$$y = z, \qquad z = x, \qquad x = y.$$

2. Pour étudier une surface ayant comme axe ternaire la droite

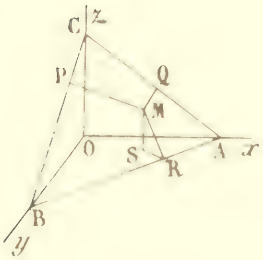
$$x = y = z,$$

il est commode de faire un changement de coordonnées de façon que l'axe ternaire soit un axe de coordonnées, l'axe des Z par exemple, et si on prend des coordonnées semi-polaires r, θ, Z on aura en évidence les équations des sections par des plans perpendiculaires à l'axe et celles des sections passant par l'axe.

On peut obtenir facilement les formules de transformation au moyen de quelques remarques simples. De plus le calcul qui conduit à l'équation transformée se fait sans difficultés si on remarque que tout polynome $F(x, y, z)$ se conservant par une permutation circulaire de x, y, z est une fonction des expressions

$$x + y + z, \qquad x^2 + y^2 + z^2, \qquad xyz, \qquad (y - z)(z - x)(x - y).$$

3. *Formules de transformation de coordonnées.* — Soit M un point ayant pour coordonnées (x, y, z) dans le système primitif et (X, Y, Z) dans le système où OZ serait l'axe ternaire; le plan mené par M perpendiculairement à l'axe ternaire coupe les axes du système primitif en A, B, C. Soient P, Q, R les projections de M sur les côtés du triangle ABC et S sa projection sur xOy. On a



$$z = MR \sin MRS = MR\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

On aurait de même

$$x = MP\sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad y = MQ\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Or, dans le plan ABC, les équations des côtés du triangle ABC peuvent s'écrire, en désignant par α l'angle du nouveau plan des YZ avec le plan $y = z$,

$$X \cos\alpha + Y \sin\alpha - \lambda = 0,$$

$$X \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + Y \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) - \lambda = 0,$$

$$X \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) + Y \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) - \lambda = 0.$$

λ étant le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC. Le plan de ce triangle étant à une distance Z de l'origine, on trouve facilement que les côtés du triangle ont pour longueur $Z\sqrt{6}$ et on en déduit

$$\lambda = Z\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On a alors

$$MP = \pm\left[X \cos\alpha + Y \sin\alpha - Z\frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Pour que MP, et par suite r, soit du signe de Z lorsque $X = Y = 0$, il faut prendre le signe $-$ devant la parenthèse ; on a donc

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\frac{Z}{\sqrt{2}} - X \cos\alpha - Y \sin\alpha\right].$$

Or si on prend les coordonnées r, θ, Z en posant

$$X = r\cos\theta, \qquad Y = r\sin\theta,$$

on a

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\frac{Z}{\sqrt{2}} - r\cos(\theta - \alpha)\right].$$

de même

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\frac{Z}{\sqrt{2}} - r\cos\left(\theta - \alpha - \frac{2\pi}{3}\right)\right],$$

$$z = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\frac{Z}{\sqrt{2}} - r\cos\left(\theta - \alpha - \frac{4\pi}{3}\right)\right].$$

4. *Expression de* $F(x, y, z)$, *lorsque* F *est un polynome se conservant par permutation circulaire de* x, y, z. — $F(x, y, z)$ est une somme de termes de la forme $Ax^\alpha y^\beta z^\gamma$; cherchons quels termes on obtient par permutation circulaire.

1° Si $\alpha = \beta = \gamma$ on n'a qu'un terme $Axyz(x^2)$.

2° Si $\beta = \gamma$ on a des termes dont la somme peut s'écrire

$$Ax^\beta y^\beta z^\beta(x^{\alpha-\beta} + y^{\alpha-\beta} + z^{\alpha-\beta}) \qquad \text{ou} \qquad Ax^\alpha y^\beta z^\beta(x^{\beta-\alpha} + y^{\beta-\alpha} + z^{\beta-\alpha})$$

suivant l'ordre de α et de β. Dans les deux cas on a une fonction symétrique, donc exprimable en fonction entière de

$$x + y + z, \qquad yz + zx + xy, \qquad xyz,$$

ou, comme

$$yz + zx + xy = \frac{(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2},$$

en fonction entière de

$$x + y + z, \qquad x^2 + y^2 + z^2, \qquad xyz.$$

3° Si α, β, γ sont différents, supposons pour fixer les idées $\alpha < \beta < \gamma$ et posons

$$\beta = \alpha + p, \qquad \gamma = \alpha + q.$$

Les termes déduits par permutation circulaire de $Ax^\alpha y^\beta z^\gamma$ donneront la somme

$$Ax^\alpha y^\beta z^\alpha(y^p z^q + z^p x^q + x^p y^q).$$

La parenthèse n'est plus une fonction symétrique, mais

$$(y^p z^q + z^p x^q + x^p z^q) + (y^q z^p + z^q x^p + x^q z^p)$$

est une fonction symétrique et

$$(y^p z^q + z^p x^q + x^p z^q) - (y^q z^p + z^q x^p + x^q z^p)$$

est divisible par $(y - z)(z - x)(x - y)$, le quotient étant une fonction symétrique entière.

Donc chacune des parenthèses s'exprime en fonction entière des expressions élémentaires que j'ai énumérées, et on peut écrire

$$F(x, y, z) = \varphi(x + y + z, \quad x^2 + y^2 + z^2, \quad xyz, \quad (y - z)(z - x)(x - y)).$$

5. On obtient facilement

$$x + y + z = Z\sqrt{3}, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Ces résultats sont d'ailleurs évidents, si on remarque qu'il suffit d'égaler les expressions des distances de M à l'origine ou au plan mené par ce point perpendiculairement à l'axe ternaire pour les obtenir immédiatement.

Si on remarque que $\cos(\theta - \alpha)$, $\cos\left(\theta - \alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$, $\cos\left(\theta - \alpha - \frac{4\pi}{3}\right)$ sont les racines de l'équation qui donne $\cos\varphi$ quand $\cos 3\varphi = \cos 3(\theta - \alpha)$, on obtient facilement

$$xyz = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{2}}{4}z^3 - \frac{3\sqrt{2}}{8}zr^2 - \frac{r^3}{4}\cos 3(\theta - \alpha)\right].$$

En remarquant de même que les expressions de $y - z$, $z - x$, $x - y$ contiennent $\sin(\theta - \alpha)$, $\sin\left(\theta - \alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\theta - \alpha - \frac{4\pi}{3}\right)$ dont le produit est $-\frac{\sin 3(\theta - \alpha)}{4}$, on a

$$(y - z)(z - x)(x - y) = +\frac{\sqrt{2}}{2}r^3\sin 3(\theta - \alpha).$$

6. *Surfaces du troisième ordre à axe ternaire.* — Comme application je considérerai l'équation générale des surfaces du troisième ordre à axe ternaire, ce qui va me conduire à un résultat intéressant.

L'équation générale de ces surfaces, lorsque $x = y = z$ est l'axe ternaire, est

$$A(x+y+z)^3 + B(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) + Cxyz + D(y-z)(z-x)(x-y)$$
$$+ E(x+y+z)^2 + H(x^2+y^2+z^2) + K(x+y+z) = 0,$$

si on prend l'origine sur la surface; l'équation transformée en r, θ et Z est, si on fait $\alpha = 0$,

$$3A\sqrt{3}Z^3 + B\sqrt{3}Z(Z^2+r^2) + \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}C\left[\frac{\sqrt{2}}{4}Z^3 - \frac{3\sqrt{2}}{8}Zr^2 - \frac{r^3}{4}\cos 3\theta\right] + D\frac{\sqrt{2}}{2}r^3\sin 3\theta$$
$$+ 3EZ^2 + H(Z^2+r^2) + K\sqrt{3}Z = 0.$$

Le coefficient de r^3, seul terme dans lequel figure θ, est de la forme

$$M\cos 3\theta + N\sin 3\theta.$$

Si on pose $\operatorname{tg}\varphi = \frac{N}{M}$, ce coefficient s'écrit

$$\frac{M}{\cos\varphi}\cos(3\theta - \varphi),$$

de sorte que si on posait $\theta = \omega + \frac{\varphi}{3}$, l'équation ne contiendrait ω que par $\cos 3\omega$. Elle ne changerait donc pas si on changeait ω en $-\omega$; autrement dit le plan correspondant à $\theta = +\frac{\varphi}{3}$ est un plan de symétrie. Il en est de même de ceux qui correspondent à $\theta = \frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}$ et $\theta = \frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}$. Donc *si une surface du troisième ordre admet un axe ternaire elle admet trois plans de symétrie.*

Pour une surface du quatrième ordre on obtiendrait des termes en r^3Z et en r^3 ayant des coefficients de la forme $M\cos 3\theta + N\sin 3\theta$.

On ne pourrait pas en général ramener ces coefficients à la forme monome. De sorte que la surface n'a pas en général de plans de symétrie; il est facile de voir que chaque section par un plan perpendiculaire à l'axe ternaire a trois axes de symétrie, mais ces axes tournent lorsque le plan se déplace.

7. *Courbes gauches à axe ternaire.* — Il est facile d'obtenir des courbes gauches admettant pour axe ternaire la droite $x = y = z$; il suffit de prendre les équations

$$x = F\operatorname{tg}\theta, \qquad y = F\left[\operatorname{tg}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right], \qquad z = F\left[\operatorname{tg}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

En particulier on peut obtenir des cubiques gauches, par exemple la cubique

$$x = \operatorname{tg}\theta, \qquad y = \operatorname{tg}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right), \qquad z = \operatorname{tg}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Les expressions de x, y, z étant les racines de l'équation qui fournit $\operatorname{tg}\theta$ quand on connaît $\operatorname{tg}3\theta$, on en conclut facilement que ces coordonnées vérifient les équations

$$3xyz - (x+y+z) = 0, \qquad yz + zx + xy + 3 = 0.$$

L'intersection des deux surfaces représentées par ces dernières équations se compose de la cubique précédemment indiquée, et de la cubique

$$x = \operatorname{tg}\theta, \qquad y = \operatorname{tg}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right), \qquad z = \operatorname{tg}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right),$$

symétrique de la première par rapport à chacun des plans

$$y = z, \qquad z = x, \qquad x = y.$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

(Places réservées aux sous-ingénieurs et contrôleurs des Mines.)

Concours de 1910.

1910. — *Calculer avec 6 décimales exactes la racine réelle de l'équation* $2x^3 + 10x - 1 = 0$.

Nous nous rendons compte à l'aide du théorème de Descartes que l'équation donnée n'admet qu'une racine réelle et que cette racine est positive.

D'autre part, cette racine est comprise entre 0 et 1, car nous avons $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 11$.

Nous avons aussi $$f(0,1) = 0,00002 > 0,$$
ce qui nous montre que la racine est comprise entre 0 et 0,1.

Appliquons la méthode de Newton. Nous avons
$$f'(x) = 10x^2 + 10 \qquad \text{et} \qquad f''(x) = 40x.$$

La dérivée seconde étant positive dans tout l'intervalle considéré, la méthode s'applique avec certitude au nombre 0,1, car nous avons $f(0,1) > 0$.

Nous pouvons écrire
$$\frac{f(0,1)}{f'(0,1)} = \frac{0,00002}{10,001} = 0,0000019 \quad \text{à} \quad \frac{1}{10^7} \quad \text{par défaut.}$$
d'où
$$0,1 - \frac{f(0,1)}{f'(0,1)} = 0,1 - 0,0000019 = 0,0999981 \quad \text{à} \quad \frac{1}{10^7} \quad \text{par excès.}$$

Nous obtenons ainsi une valeur approchée par excès de la racine cherchée.

Cherchons une limite supérieure de l'erreur commise. Le maximum de la dérivée seconde dans l'intervalle considéré est obtenu pour $x = 0,1$ et a pour valeur 0,04.

Nous obtenons donc comme limite supérieure
$$\overline{0,1}^2 \times \frac{0,04}{2 \times 10,001} < 0,00002.$$
0,1 était donc une valeur de x approchée par excès à moins de
$$0,0000020 + 0,00002 < 0,00003$$
et, en remplaçant dans l'inégalité précédente 0,1 par 0,00003, nous obtenons une nouvelle limite supérieure de l'erreur commise en adoptant pour x la valeur $0,1 - \frac{f(0,1)}{f'(0,1)}$:
$$\overline{0,00003}^2 \times \frac{0,04}{2 \times 10,001} < \frac{1}{10^{11}} < \frac{1}{10^7}.$$

La valeur trouvée 0,099998 est donc approchée à moins de $\frac{1}{10^6}$.

En poussant plus loin la division donnant $\frac{f(0,1)}{f'(0,1)}$ nous trouverions pour x la valeur 0,09998002, qui serait approchée à moins de $\frac{1}{10^{10}}$ par excès.

P. SALLERON, à Alès.

Bonnes solutions : MM. A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; L. Simon, à Fourmies ; E. [illegible], à Blois-les-Mortagne ; H. Froger, à Vichy ; Th. Giraud, à Poitiers ; L. Santoni, à Chartres ; J. [illegible], à Grenoble ; G. [illegible], à Denain ; J. [illegible], à Mont-de-Marsan.

1911. — *Étant donnée une fonction* $F(x)$ *représentée par une série* $F(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$, *former la série qui représente* $F'(x)$, *la sommer et en déduire la fonction* $F(x)$.

En tirer un développement du nombre $\frac{\pi}{4}$.

La série qui représente $F'(x)$ s'écrit immédiatement

$$F'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \ldots\ldots$$

C'est une progression géométrique dont la raison est $-x^2$. Elle est convergente pour les valeurs de x plus petites en valeur absolue que 1.

Nous avons alors $$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Si nous intégrons les deux membres de l'égalité, nous obtenons

$$F(x) = \operatorname{arc\,tg} x,$$

la constante d'intégration étant nulle, puisque, pour $x = 0$, nous avons $F(x) = 0$ et $\operatorname{arc\,tg} x = 0$.

Nous avons donc ainsi

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \ldots$$

pour les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$.

Pour $x = 1$, la série devient $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots$

Nous savons que cette série alternée, dont les termes vont en diminuant en valeur absolue, le n^e terme ayant pour limite 0, est convergente. Sa valeur est, d'après le théorème d'Abel, égale à la limite vers laquelle tend la somme de la série précédente quand x tend vers 1.

Nous avons donc, en remarquant que $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots$$

P. SAUTERON, à Albi.

Bonnes solutions : MM. A. Sauvestre, Th. Olivier, à Bordeaux ; L. Cotera, H. Lemaire, à Nancy ; J. Dupuy, à Nancy ; G. Lacu ; Jacquet, à Grenoble ; Guillaume ; A. Guérinot, Sainte ; L. Sainsou, à Chartres ; Amigonic, à Rodez ; G. Guillaume ; L. Simon, à Fourmies ; A. Rousseau.

1912. — *Enveloppe et trajectoires orthogonales des paraboles qui ont même axe et même directrice.*

L'équation d'une parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet est $y^2 = 2px$, p pouvant être positif ou négatif, suivant que la parabole est située du côté des x positifs ou négatifs. $|p|$ est le paramètre de la courbe.

Dans les deux cas la directrice a pour équation $x = -\frac{p}{2}$. On en déduit aisément l'équation de la parabole par rapport à son axe et à sa directrice :

$$(1) \qquad y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right) = 2px + p^2$$

Enveloppe des paraboles. — Si nous dérivons les deux membres par rapport à p nous obtenons

$$2x + 2p = 0, \qquad \text{d'où} \qquad p = -x,$$

et, en portant cette valeur dans l'équation (1),

$$y^2 = 2x(-x) + x^2 = x^2,$$

équation qui représente les deux bissectrices des axes de coordonnées.

C'est l'enveloppe demandée.

Trajectoires orthogonales des paraboles. — L'équation différentielle des paraboles considérées s'obtient en éliminant p entre (1) et l'équation obtenue en différentiant les deux membres de (1), soit

$$2y\,dy = 2p\,dx, \qquad \text{d'où} \qquad p = y\frac{dy}{dx}.$$

L'équation différentielle est par suite

$$y^2 = 2xyy' - y^2y'^2.$$

Nous obtenons l'équation différentielle des trajectoires orthogonales en substituant dans cette dernière équation $-\frac{1}{y'}$ à y'. Nous obtenons alors

$$y^2y'^2 + 2xyy' + y^2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad yy'^2 + 2xy' - y = 0.$$

La droite $y = 0$, soit OX, est une trajectoire orthogonale évidente des paraboles considérées. Il reste à intégrer l'équation différentielle

$$yy'^2 + 2xy' - y = 0.$$

Nous en tirons

$$y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - y^2}}{y} \qquad \text{ou} \qquad yy' + x \pm \sqrt{x^2 - y^2} = 0.$$

C'est une équation homogène en x et y.

Posons $\frac{y}{x} = u$ ou $y = ux$, $dy = udx + xdu$. $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$.

L'équation précédente devient

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - u^2}}{u} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dx}{x} = \frac{-udu}{1 + u^2 \pm \sqrt{1 - u^2}}.$$

Posons $\sqrt{1 - u^2} = v$ ou $1 - u^2 = v^2$ et $-2udu = 2vdv$.

Nous avons aussi $1 + u^2 = 2 - v^2$.

L'équation différentielle devient alors

$$\frac{dx}{x} = \frac{vdv}{2 - v^2 \pm v}.$$

qui se décompose en ces deux équations

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{-vdv}{v^2 + v - 2}. \\[2ex] \dfrac{dx}{x} = \dfrac{-vdv}{v^2 - v - 2} \end{cases}$$

1° Résolvons d'abord la première. Nous avons :

$$v^2 + v - 2 = (v - 1)(v + 2) \qquad \text{et} \qquad \frac{-v}{v^2 + v - 2} = -\frac{1}{3(v - 1)} - \frac{2}{3(v + 2)}.$$

d'où

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{dv}{1 - v} - \frac{2}{3}\frac{dv}{v + 2}$$

et, en intégrant, $\mathrm{L}\frac{x}{C} = -\frac{1}{3}\mathrm{L}(1 - v)(v + 2)^2$, C étant une constante arbitraire positive si x est positif et négative si x est négatif ; d'où $x\sqrt[3]{(1 - v)(v + 2)^2} = C$ et $x^3(1 - v)(v + 2)^2 = C^3$.

2° La deuxième équation différentielle nous donne, après intégration, en opérant d'une manière identique, $x\sqrt[3]{(v + 1)(2 - v)^2} = C$ ou $x^3(v + 1)(2 - v)^2 = C^3$.

Nous devons remarquer que dans l'élévation au cube nous n'introduisons aucune autre branche réelle de courbe.

Si nous remplaçons v par $\sqrt{1 - u^2}$ ou $\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}$, nous obtenons

$$(x - \sqrt{x^2 - y^2})^3(x + \sqrt{x^2 - y^2})^2 = 2x^5 = C^3, \qquad \text{et} \qquad \sqrt{x^2 - y^2} + x)(2x - \sqrt{x^2 - y^2})^2 = C,$$

ou encore, après réduction des termes semblables,

$$\sqrt{x^2 - y^2}(x^2 - y^2 + 4x^2 - 4x\sqrt{x^2 - y^2}) = C \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{x^2 - y^2}(5x^2 - y^2) = C, \quad \text{ou} \quad 25x^6 - 30x^4y^2 + 9x^2y^4 = C^2.$$

équations qui se trouvent réunies dans l'équation unique

$$(x^2 - y^2)^3 = (x^2 + 3y^2)^2 - C^{3/2},$$

qui s'écrit encore

$$(\mathrm{I}) \qquad y^6 + 6x^2y^4 + y^2(9x^4 - 6C^2x^2 - 2Cx) - C^3 = 0.$$

Cette équation représente les trajectoires orthogonales dans la région des x positifs, si C est positif et dans la région des x négatifs si C est négatif. Cela provient de l'intégration précédente et se trouvera d'ailleurs vérifié dans la discussion qui suit.

Les courbes représentées par cette équation sont symétriques par rapport à l'axe Ox et de plus admettent cet axe comme asymptote. C'est d'ailleurs la seule. La courbe rencontre l'axe Ox à distance finie au point d'abscisse déterminée par l'équation $2C^3x^3 = C^6$, c'est-à-dire $x = \frac{C}{\sqrt[3]{2}}$.

Posons $y^2 = z$; l'équation précédente devient

$$(\mathrm{II}) \qquad z^3 + 6x^2z^2 + z(9x^4 - 6C^2x^2 - 2Cx) - C^3 = 0.$$

Pour étudier les racines réelles de l'équation en y (I), il nous suffira d'étudier les racines positives de l'équation en z (II).

Nous supposerons pendant la discussion $C > 0$. On pourrait même faire $C = 1$, puisque toutes les courbes sont homothétiques par rapport au point O. Le coefficient du terme du premier degré en z s'annule pour $x = \sqrt{\frac{2}{3}C}$ et le terme indépendant pour $x = \frac{C}{\sqrt[3]{2}}$.

Nous voyons que pour $x = 0$ le nombre des variations des termes du premier membre de l'équation (II) est nulle, ce qui nous montre que l'équation (I) n'admet pas de racines réelles pour $x < 0$ (avec $C > 0$), résultat que nous avions indiqué précédemment.

Pour x compris entre 0 et $\frac{C}{\sqrt[3]{2}}$, le premier membre présente deux variations ce qui indique 0 ou 2 racines positives.

Pour x compris entre $\frac{C}{\sqrt[3]{2}}$ et $\sqrt{\frac{2}{3}C}$, le premier membre présente une variation, ce qui indique une racine positive.

Il en est de même pour x supérieur à $\sqrt{\frac{2}{3}C}$.

Reprenons la discussion pour le cas où x est compris entre 0 et $\frac{C}{\sqrt[3]{2}}$. A cet effet prenons l'équation dérivée de (II)

$$z^2 + 4x^2z + 3x^4 - 2Cx = 0.$$

Ses racines sont $z = -2x^2 \pm \sqrt{4x^4 - 3x^4 + 2Cx} = -2x^2 \pm \sqrt{x^4 + 2Cx}$, l'une est toujours négative, l'autre est positive si $2x^2 > \sqrt{x^4 + 2Cx}$ ou $x > \sqrt{\frac{2}{3}C}$.

Dans l'intervalle considéré nous avons donc toujours une racine positive, z_1.

Remarquons que pour $z = 0$ (x étant compris dans l'intervalle considéré), le premier membre est positif; il en est de même pour $z = \infty$.

Pour distinguer les valeurs de x qui donnent pour z deux valeurs positives de celles qui n'en donnent aucune, il nous suffira d'étudier le signe que prend le premier membre de (II) pour $z = z_1$.

Nous obtenons, après simplifications,

$$-\sqrt{x^4 + 2Cx}(2Cx^2 - 4C^2x) - 2x^6 + 10C^2x^4 + C^3,$$

quantité qui s'annule pour $x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}C}$, qui est positive pour $x < \sqrt[3]{\frac{1}{4}C}$ et négative pour

$$x > \sqrt[3]{\frac{1}{4}C}.$$

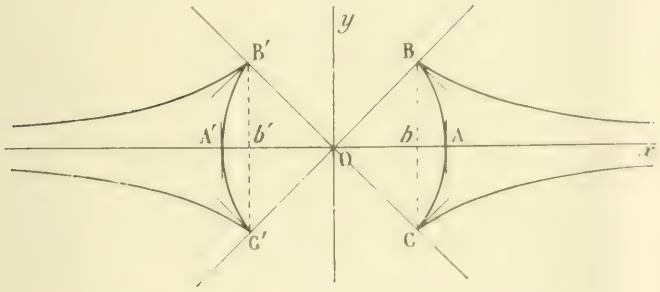
Nous en déduisons que, pour x variant de 0 à $\sqrt[3]{\frac{1}{4}C}$, l'équation (II) n'a aucune racine positive et que, pour x compris entre $\sqrt[3]{\frac{1}{4}C}$ et $\sqrt{\frac{1}{2}C}$, elle en possède deux. De plus nous voyons que la valeur $\sqrt[3]{\frac{1}{4}C}$ pour x donne pour z une racine double égale à $\left(-\frac{C}{\sqrt{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$. La valeur correspondante de y est

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}C}.$$

Nous pouvons résumer la discussion de l'équation (II) dans le tableau suivant :

		0	$\sqrt[3]{\frac{1}{4}C}$	$\sqrt{\frac{1}{2}C}$	
Valeurs de x	$-x$				$+x$
Nombre de racines positives pour z		0	2	1	
			racine double		

Nous pouvons maintenant tracer les courbes représentatives de l'équation (I) c'est-à-dire les trajectoires orthogonales demandées.



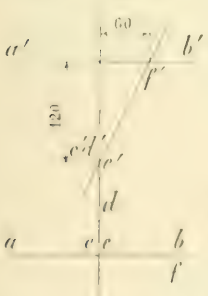
Les deux courbes sont symétriques par rapport à Oy, celle de droite $(C > 0)$ correspond à $p > 0$ dans l'équation des paraboles, celle de gauche $(C < 0)$ à $p < 0$.

Les points B et C sont des points de rebroussement de première espèce, dont la tangente est perpendiculaire aux bissectrices des angles des axes de coordonnées. On pourrait le montrer par le calcul. Nous avons déjà vu que ce sont des points de rebroussement. De plus la parabole passant par le point B est tangente en B à son enveloppe, qui se compose de la droite OB et de la droite OC, bissectrices des axes de coordonnées. Les trajectoires devant être normales à la parabole ont pour tangentes aux points de rebroussement des perpendiculaires aux mêmes bissectrices.

P. SALLERON, à Albi.

Bonnes solutions : MM. J. Sourbaigne ; G. Lach, à Rodez ; L. Santoni ; Guillaume ; L. Simon, à Fourmies ; J. Oltenbrunn ; A. Nègre ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppe ; G. Fouchy, à Reims.

1913. — *Les droites (ab, a'b') et (cd, c'd') sont les axes de deux cylindres de révolution A et B ayant respectivement pour diamètres 90 mètres et 80 mètres. La droite (ef, e'f') est l'axe d'un cône de révolution dont le sommet est situé sur la surface du cylindre B (à gauche de ab, a'b'). Le cône est en outre bitangent au cylindre A.*



1° *Représenter la portion du cône comprise entre les deux cylindres supposés opaques.*

2° *Construire le développement de la surface latérale de cette portion du cône.*

Le cylindre B a pour contour apparent vertical sa section droite dont le centre est c' et pour contour apparent horizontal les deux génératrices du plan diamétral horizontal. Le cylindre A a pour contour apparent horizontal les deux génératrices du plan diamétral horizontal et pour contour apparent vertical les deux génératrices du plan méridien de front. Pour obtenir le cône de révolution dont nous connaissons l'axe et le sommet, il suffit d'inscrire dans le cylindre A auquel il est bitangent la sphère qui a pour centre le point d'intersection des axes des deux surfaces, soit e'. Le cône sera circonscrit à cette sphère, et par suite nous

aurons ses contours apparents en menant par s et par t les tangentes aux contours apparents de même nom de cette sphère.

Le cône coupe le cylindre A auquel il est bitangent suivant deux courbes, planes, et comme les deux sur-

Échelle : $\frac{1}{2}$.

faces ont pour plan de symétrie commun le plan de front qui contient leurs axes, les plans de section sont de front et la projection verticale de l'intersection se compose des deux droites $g'h'$ et $l'k'$. On voit immédiatement que les courbes sont deux ellipses dont l'un des axes, égal au rayon du cylindre, se projette horizontalement en vraie grandeur sur une droite de bout ; l'autre, différent dans les deux ellipses, a pour projection horizontale

gh pour l'une et kl pour l'autre. On peut donc construire chaque ellipse. On obtient sur chacune d'elles les points où elle touche le contour apparent horizontal du cône en prenant la projection verticale n' du point où la génératrice de contour apparent horizontal traverse l'équateur de la sphère inscrite, ce qui donne $s'n'$, et par suite les points ν'_1 et ν'_2 qui se projettent en ν_1 et ν_2. Les deux ellipses se coupent aux points u où s'arrête la portion qui limite la surface demandée dans l'énoncé.

Le cône coupe le cylindre B suivant une courbe qui se projette verticalement suivant l'arc de circonférence $p'q'$. On en déduit la projection horizontale par points. A cet effet nous pouvons donner au cône une base plane se projetant horizontalement suivant la circonférence ab, c'est l'une des courbes communes au cône et au cylindre vertical circonscrit à la même sphère. On peut alors aisément déterminer la projection horizontale d'une génératrice quelconque $s\mu$, $s'\mu'$ par exemple, et rappeler sur cette génératrice le point d'intersection m, m' dont on a la projection verticale.

On a ainsi par points toute la projection horizontale de l'intersection.

Développement de la surface latérale du cône. — Nous donnerons pour base au cône la section droite suivant laquelle il se raccorde avec la sphère aa'. Rabattons cette section sur le plan de front de son centre r' suivant $\alpha'\gamma'\beta'$ et inscrivons dans la circonférence un polygone régulier quelconque. Nous avons pris ici un octogone dont il suffit de prendre la moitié, soit $\beta'\delta'$ son côté. En prenant le milieu de chacun des arcs tels que $\beta'\delta'$ on a des cordes suffisamment petites pour que leur longueur donne sensiblement la longueur de l'arc sous-tendu. Si maintenant nous décrivons l'arc de circonférence de centre s' et de rayon $s'\alpha'$ et que nous prenions à partir de α' huit arcs consécutifs ayant la longueur ainsi obtenue, nous arrivons en β'_1 et l'arc $\alpha'\beta'_1$ donne la moitié du développement de la base du cône sur le plan tangent le long de $s'\alpha'$. Le plan de front de l'axe du cône étant un plan de symétrie pour ce cône et pour les deux cylindres, les courbes de section sont elles-mêmes symétriques par rapport à ce plan, et leurs développements admettront $s'\beta'_1$ pour axe de symétrie.

Nous développerons d'abord les deux sections planes. Le point λ', λ'_2 de la base du cône par exemple donnera sur le développement la génératrice $s'\lambda'_1$ sur laquelle nous porterons la vraie grandeur de la distance $s'\lambda''$ obtenue en amenant la génératrice à être de front. La tangente en λ''_1 s'obtiendra en cherchant le point où la tangente à la courbe de l'espace coupe la trace du plan tangent en ce point sur le plan de base du cône. A cet effet prenons la trace u', u'_1 du plan sécant sur le plan de base du cône choisi comme plan horizontal auxiliaire de projection, et menons la tangente à la base du cône au pied λ'_2 de la génératrice du point considéré ; elle coupe la trace du plan sécant au point u'_1, qui est précisément la trace de la tangente en λ'' sur le plan de base du cône. La longueur $\lambda'_2u'_1$, qui est dans le plan tangent au cône, reste invariable dans le développement, en sorte qu'il suffit de la porter en $\lambda'_1u''_1$ sur la tangente au développement de la base, et dans la direction qui s'éloigne du point α', pour obtenir le point cherché u''_1 et en déduire la tangente $u''_1\lambda''_1$ à la développée au point λ''_1.

La développée présente un point d'inflexion, car si on mène par le sommet du cône la perpendiculaire au plan sécant cette perpendiculaire est extérieure au cône ; on peut donc mener à la surface deux plans tangents perpendiculaires au plan sécant, et obtenir sur les génératrices de contact deux points d'inflexion, symétriques d'ailleurs par rapport à $s'\beta'_1$. La construction de ces points dont les génératrices sont déterminées en menant par 0, 0' les tangentes à la section plane se fait comme celle d'un point ordinaire, ainsi que celle de la tangente correspondante. Nous avons donné sur l'épure la construction du point d'inflexion situé sur la seconde section plane en prenant la trace de la perpendiculaire au plan sécant sur le plan de base du cône, soit τ', et en menant la tangente $\tau'\tau$, à la base, ce qui nous a donné la génératrice [illegible] et par suite le point d'inflexion [illegible] qui se trouve en v''_1 sur la développée. On obtient d'ailleurs la génératrice $s'v'_1$ qui y passe en prenant la distance du point v'_2 au sommet le plus voisin du polygone qui a servi à trouver le développement et en reportant cette distance sur l'arc $\alpha'\beta'_1$ à partir du point qui correspond à ce sommet.

Le développement de la courbe d'intersection du cône par le cylindre B se fait exactement de la même manière ; on porte à partir du sommet s' sur chaque génératrice du développement la vraie grandeur de la distance de ce sommet aux différents points de la courbe, et pour cela on ramène chaque génératrice à être de front. On a ainsi obtenu les points δ''_1, η''_1 et ξ''_1.

(Bonne épure de M. Rousseau, à Fourmies.)

CONCOURS DE 1911 (*Suite*).

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Groupe I.

Mathématiques.

1960. — On considère trois axes rectangulaires $Oxyz$ et la surface de révolution, appelée tore, dont l'équation est [illegible]
l étant un nombre positif et θ un angle aigu.

1° On coupe le tore par le plan $z = x \operatorname{tg}\theta$. Former l'équation de la section dans son plan et vérifier que cette section se compose de deux circonférences c et γ, ayant leurs centres sur Oy. Les projections de ces circonférences sur le plan xOy admettent le point O pour foyer.

On déduit facilement de là qu'il existe sur le tore, à part les parallèles et les méridiens, deux systèmes de circonférences : les circonférences C et les circonférences Γ. Montrer que deux circonférences d'un même système (C ou Γ) ne se coupent jamais, que deux circonférences de systèmes différents (C et Γ) ont toujours deux points communs.

2° Trouver les courbes K qui coupent tous les parallèles du tore sous un angle donné V. Construire la projection de ces courbes sur le plan xOy, d'abord pour $V = \theta$, puis pour $\operatorname{tg} V = 2 \operatorname{tg}\theta$. Comment peut-on déduire la seconde courbe de la première et, d'une manière plus générale, comment peut-on construire point par point les courbes K ?

3° Former l'équation générale des sphères s passant par l'une des circonférences C, trouver le lieu des centres de ces sphères et montrer que chacune d'elles contient aussi une circonférence Γ.

Montrer que toutes les sphères s passant par un point a passent aussi par un point associé a'.

4° On donne deux points a et b non situés sur le tore ; b est différent de a et de son associé a'. Soit C_0 l'une des circonférences C. Par C_0 et a passe une sphère A_0 qui coupe le tore suivant une autre circonférence Γ_0. Par Γ_0 et b passe une sphère B_0 qui coupe le tore suivant une circonférence C_1. Par C_1 et a passe une sphère A_1 qui coupe le tore suivant une circonférence Γ_1. Par Γ_1 et b passe une sphère B_1 qui coupe le tore suivant une circonférence C_2, et ainsi de suite.

On étudiera dans deux cas particuliers à quelle condition la suite des circonférences $C_0, C_1, C_2 \ldots$ est périodique.

Supposant d'abord a et b sur Oz, on montrera que les centres des sphères A_i et B_i sont alors dans deux plans dont on se donnera les équations sous la forme
[illegible]

Quelle relation doit-il y avoir entre α et β pour que $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ étant différentes, C_n soit identique à C_0 ? Calculer algébriquement le rapport $\rho = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$ dans le cas où $n = 10$.

En second lieu, on prendra les valeurs suivantes pour les coordonnées de a et de b :
[illegible]

Montrer que si C_0 est identique à C_n pour un choix particulier de C_0, il en est de même quelle que soit C_0, et trouver la relation de position entre a et b pour laquelle cette circonstance se produit.

(Durée : 6 heures.)

Physique.

I. — **1961.** 1° Un système optique est formé de deux lentilles simples infiniment minces, centrées sur le même axe, séparées par la distance D et ayant pour distances focales f et f'. Calculer la distance focale du système et la position de ses foyers et de ses plans principaux.

Application : D = 4 centimètres, $f = 5$ centimètres, $f' = 3$ centimètres.

Dessiner la position des éléments du système.

2° Calculer la distance D en fonction de f et de f' pour que la distance focale du système demeure indépendante de l'indice au voisinage immédiat d'une certaine couleur, les deux lentilles étant faites avec le même verre. Calculer et placer les éléments du système constitué par deux lentilles identiques, de 5 centimètres de distance focale pour la couleur considérée.

3° Les lentilles précédentes étant disposées de façon à remplir la condition demandée, trouver la position des foyers et des plans principaux du système pour deux couleurs situées de part et d'autre de celle pour laquelle la condition est réalisée. Faire le calcul pour les couleurs ayant pour indices 1,5124 et 1,5294 ; l'indice 1,5200 est celui pour lequel la distance focale de chaque lentille est 5 centimètres.

4° Montrer que le système ainsi constitué ne donne pas d'images achromatiques. Calculer l'écart des images, correspondant aux deux couleurs extrêmes précédentes, d'un point situé sur l'axe, à 2 centimètres en avant de l'une des lentilles.

5° Indiquer dans quelles conditions le système précédent peut être employé et quels avantages il présente sur une lentille simple de même puissance ; montrer que son défaut d'achromatisme n'a pas d'importance sensible.

II. — Balance. Mesure de la masse d'un corps. Corrections à apporter à la mesure brute pour obtenir une valeur exacte.

Avec quelle précision faut-il connaître les quantités qui interviennent dans ces corrections pour avoir avec certitude le chiffre des dixièmes de milligramme sur une masse voisine de 500 grammes, de densité 2,50, les poids de la boîte de poids ayant une densité de 21,45.

On n'insistera pas sur la description de la balance.

Epure.

1962. — Un cube $abcd\alpha\beta\gamma\delta$ a pour diagonales les droites $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$. La diagonale $a\alpha$ est verticale ; sa longueur vaut 12 cm. Sur l'épure, elle se projette suivant le grand axe de la feuille ; son extrémité inférieure (α, α') est placée de manière que $\alpha\alpha' = 12$ cm et que le point α soit à 12 cm du bord inférieur du cadre. La diagonale $b\beta$ est de front, le point b à gauche du point β et plus haut que lui. L'arête cd est en avant du plan de front $a\alpha b\beta$, le point c à gauche du point d.

Cela posé, on considère :

1° L'*hyperboloïde* qui a pour directrices les trois droites bc, $d\beta$, $\gamma\delta$;

2° Le *paraboloïde* qui a pour plan directeur le plan $abcd$ et pour directrices les droites $b\delta$ et $c\beta$.

On demande :

1° De déterminer l'intersection des deux surfaces ;

2° De représenter le solide limité d'une part à ces deux surfaces, d'autre part aux plans horizontaux menés par les extrémités de la diagonale verticale du cube. L'arête $\alpha\beta$ fait partie de ce solide ;

3° De déterminer les ombres produites sur la surface de ce solide par des rayons lumineux parallèles à la droite $b\alpha$;

4° de calculer, à 1^{mm2} près, l'aire de la section faite dans ce solide par le plan horizontal mené par le point β.

Expliquer succinctement l'épure.

Cadre 28×44 cm.

[21 juillet 1911, de 8 h. à [illegible]]

Groupe II.

Physique.

I. — **1963.** 1° Un cadre rectangulaire, analogue à celui d'un galvanomètre à cadre mobile, est formé de 500 tours de fil de cuivre d'un dixième de millimètre de diamètre. Il a 4 centimètres sur 6 centimètres. Il est placé dans un champ magnétique uniforme, de 500 gauss, dont la direction est parallèle à l'un des côtés. Calculer l'action à laquelle ce cadre est soumis, quand on le ferme sur une pile de résistance négligeable, dont la force électro-motrice est de 2 volts.

On rappelle qu'un fil de cuivre de 1 millimètre de diamètre a une résistance de 20 ohms par kilomètre.

2° Ce cadre, placé horizontalement, est rendu solidaire du fléau d'une balance dont les bras de levier ont 10 centimètres. Le champ magnétique précédent est aussi horizontal et est perpendiculaire à l'arête du couteau de la balance. L'équilibre étant obtenu, en l'absence du courant, par des poids placés dans l'un des plateaux, de combien faut-il modifier ces poids pour maintenir l'équilibre quand on établit la connexion entre le cadre et la pile ?

Intensité de la pesanteur : 980.

II. — Dissolution des solides. Indiquer les variations de propriétés et les propriétés nouvelles que présente la dissolution par rapport au dissolvant pur.

Comment ces variations et ces propriétés nouvelles dépendent-elles de la quantité de solide dissoute ?

Chimie.

Magnésium. — Sulfates doubles de la série magnésienne. — Isomorphisme. — Principales réactions où il est fait usage du magnésium en chimie minérale et en chimie organique.

(*Durée : 4 heures.*)

Sciences Naturelles.

Les Diastases. Leur rôle et leur importance. Donner des exemples précis choisis aussi bien chez les Végétaux que chez les Animaux.

(*Durée: 4 heures.*)

Groupes I et II.

Mathématiques.

1964.—On considère un point matériel M, de masse m, sur lequel un centre fixe S exerce une attraction F inversement proportionnelle au carré de la distance $r = \mathrm{SM}$ $\left(\mathrm{F} = -\frac{km}{r^2}\right)$.

1° Indiquer à quelles conditions doit satisfaire la vitesse initiale pour que la trajectoire de M soit une circonférence C; on calculera la durée T d'une révolution complète en fonction de la constante k et du rayon R de la circonférence C.

2° Un autre point matériel M', de masse m', décrit sous l'action du même centre de forces S $\left(\text{la force étant } \mathrm{F}' = -\frac{km'}{r'^2} \text{ avec } r' = \mathrm{SM}'\right)$ une parabole P de paramètre p. Calculer le temps employé par M' pour décrire un arc AB de la parabole ; on se donnera les angles α et β de SA et SB avec l'axe Sx de la parabole.

3° La parabole P et la circonférence C étant supposées dans un même plan, à quelle condition se coupent-elles en deux points A et B ? Cette condition étant remplie, calculer le temps T' pendant lequel le point M' reste à l'intérieur de C, et étudier la variation du rapport $\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}'}$ quand le paramètre p varie.

4° L'orbite de la terre étant supposée circulaire, calculer le nombre maximum de jours durant lesquels une comète, décrivant une orbite parabolique dans le plan de l'orbite terrestre, peut rester à l'intérieur de l'orbite terrestre.

(*Durée : 4 heures.*)

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1909. — 1° *Construire la courbe* (C) (*axes rectangulaires*)

$$(x^2 + y^2)^2 - m(x^2 - y^2) = 0,$$

en déterminer les tangentes doubles et l'aire limitée par chacune de ses boucles.

2° *Un cercle passant par* O *rencontre* (C) *en trois points à distance finie, autres que* O *; déterminer les régions du plan où doivent se trouver les centres de ces cercles, pour que les trois points d'intersection soient réels.*

3° *Lieu du milieu des cordes* PQ *de* (C) *vues de l'origine sous un angle droit et enveloppe de ces cordes.*

4° *Soient* OPQR *un quadrilatère dont les droites rectangulaires* OP, OQ *sont deux côtés consécutifs ; en supposant que* P *et* Q *décrivent* (C) *et que le quadrilatère* OPQR *reste semblable à lui-même, on demande l'enveloppe des côtés* PR, QR.

1. Pour construire la courbe donnée, il est commode de prendre son équation en coordonnées polaires. On trouve, en posant $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, l'équation

$$\rho = a\sin\omega\cos 2\omega.$$

ρ est une fonction continue de ω et l'on a

$$\frac{d\rho}{d\omega} = a(\cos\omega\cos 2\omega - 2\sin\omega\sin 2\omega) = 0.$$

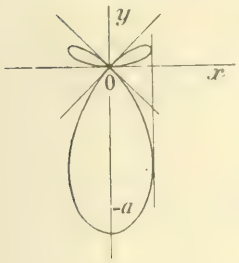
Cette dérivée s'annule quand $\operatorname{tg}\omega \operatorname{tg} 2\omega = \frac{1}{2}$.

Résolvant cette équation en $\operatorname{tg}\omega$, on trouve $\operatorname{tg}\omega = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$.

Si l'on suppose $a > 0$ on peut construire alors le tableau suivant où ω_0 représente la valeur de ω correspondant à $\operatorname{tg}\omega = \sqrt{\frac{1}{5}}$. La symétrie évidente de la courbe par rapport à Oy nous dispense de mettre dans notre tableau des valeurs de ω extérieures à l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

ω	0		ω_0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
ρ'	a	$+$	0	$-$			0
ρ	0	$\nearrow$	$max.$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-a$

On en déduit immédiatement la construction de la courbe.



La figure et l'équation primitive montrent que cette courbe est unicursale ; elle est du quatrième ordre et possède un point triple à l'origine. Les tangentes en ce point sont Ox et les bissectrices des axes. De plus la courbe est circulaire et se compose dans sa partie réelle de trois boucles.

Pour construire la courbe d'une façon un peu plus précise, déterminons-en les tangentes doubles. Soient $ux + vy + a = 0$ de telles droites. Si nous remarquons qu'on peut écrire les coordonnées de tout point de la courbe :

$$x = \frac{at(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2}, \qquad y = \frac{at^2(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2},$$

comme on le voit de suite en posant $y = tx$, on déterminera u et v en écrivant que l'équation du quatrième degré en t, $ux + vy + a = 0$, a deux racines doubles, c'est-à-dire que le polynome suivant en t, obtenu par la réduction du premier membre,

$$t^4(1 - v) - ut^3 + t^2(v + 2) + ut + 1,$$

est un carré parfait.

En l'identifiant avec une expression de la forme $(\lambda t^2 + \mu t + 1)^2$ on obtient le système d'équations

$$2\mu = u, \qquad 2\lambda + \mu^2 = -v + 2, \qquad 2\lambda\mu = -u, \qquad \lambda^2 = 1 - v.$$

On déduit par un calcul facile les quatre solutions suivantes en u et v :

$u = 0, \quad v = 0 ; \quad u = 0, \quad v = -8 ; \quad u = 4, \quad v = 0 ; \quad u = -4, \quad v = 0.$

Nous avons ainsi quatre tangentes doubles qui sont :

1° La droite de l'infini (la courbe est tangente à la droite de l'infini aux deux points cycliques) ; 2° la droite $-8y + a = 0$ ou $y = \frac{a}{8}$, qui est parallèle à Ox ; 3° les droites $\pm 4x + a = 0$, qui sont parallèles à Oy.

Pour avoir les aires des trois boucles de la courbe, il nous suffit de prendre dans des limites convenables des intégrales de la forme :

$$I = \frac{1}{2}\int \rho^2 d\omega = \frac{a^2}{2}\int \sin^2\omega \cos^2 2\omega\, d\omega.$$

Or on trouve pour cette intégrale indéfinie après réduction en intégrales de fonctions circulaires de multiples de ω : $I = \left(C + \frac{1}{4}\omega - \frac{3}{16}\sin 2\omega + \frac{1}{16}\sin 4\omega - \frac{1}{48}\sin 6\omega\right)\frac{a^2}{2}$.

Pour les boucles situées au-dessus de Ox, il nous faut calculer $I_0^{\frac{\pi}{4}}$, et l'on a pour aire de chacune de ces boucles :

$$S = \frac{a^2}{96}(3\pi - 8).$$

Pour l'autre boucle, nous avons la moitié de son aire en calculant $I_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$; nous avons ainsi

$$S' = \frac{a^2\pi}{8} - 2S = \frac{a^2}{48}(3\pi + 8).$$

2. Considérons le cercle passant par l'origine

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny = 0.$$

Les valeurs de t correspondant à l'intersection de ce cercle avec la courbe sont données par l'équation en t.

$$\frac{a^2t^2(1-t^2)^2}{(1+t^2)^4} + \frac{a^2t^2(1-t^2)^2}{(1+t^2)^4} - 2m\frac{at(1-t^2)}{(1+t^2)^2} - 2n\frac{at(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = 0,$$

ou, en éliminant les solutions imaginaires de t qui correspondent aux points cycliques (qui sont évidemment de l'intersection), on a l'équation du troisième degré

$$(n - a)t^3 + mt^2 + (n + a)t - m = 0.$$

Pour que cette équation ait ses trois racines réelles (qui correspondent à des points réels), il faut et suffit que l'on ait l'inégalité connue

$$(a + n)m - mn - a)^2 + 4(a - n)(a - n - m)m^2 - (n - a)^2 \geq 0$$

ou (1) $$a^2m^2 + (a + n)(a - n - m)m^2 - (n - a)^2 \geq 0.$$

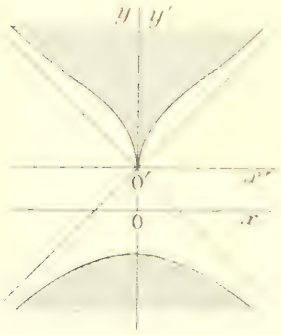
Comme m, n sont les coordonnées du centre, la courbe séparatrice aura pour équation par rapport au système d'axes primitif

$$a^2x^2 + (y + a)(y - a)(x^2 + y^2 - (y - a)^2) = 0.$$

Or si nous transportons les axes parallèlement à eux-mêmes au point $x = 0$, $y = a$, l'équation devient

$$a^2x^2 + (y - 2a)(y - x^2)(x^2 - y^2) = 0,$$

$$a^2x^2 + (x^2 + y^2 - 2ay)(x^2 - y^2) = 0.$$



Sous cette forme, on voit que la courbe représentée par cette équation est une quartique circulaire ayant à l'origine un point de rebroussement dont la tangente est Oy. Il y a deux asymptotes réelles, les bissectrices des axes. On la construit aisément en se servant du principe connu dit des régions, et on trouve la forme de courbe ci-contre, symétrique par rapport à Oy.

Pour savoir quelle est la région du plan qui correspond à trois points réels, substituons par exemple l'origine primitive dans l'inégalité (1), où m, n sont remplacés par x, y ; nous trouvons pour $x = 0$, $y = 0$, le signe $-$; donc la partie hachurée est la partie qui ne contient aucun centre de cercle satisfaisant aux conditions demandées.

3. Considérons les deux droites issues de l'origine et rectangulaires,

$$y = tx; \qquad y = -\frac{1}{t}x;$$

elles coupent la courbe aux deux points

$$x = \frac{at(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \qquad y = \frac{at^2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

et

$$x = \frac{-\frac{a}{t}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2} = \frac{at(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \qquad y = \frac{+\frac{a}{t^2}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2} = -\frac{a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

Les valeurs de x sont les mêmes pour ces deux points, ce qui nous montre que les cordes vues du

centre sous un angle droit sont parallèles à Oy. Les coordonnées du milieu de ces cordes PQ sont ainsi

$$x = \frac{at(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \qquad y = \frac{-a(1-t^2)^2}{2(1+t^2)^2}.$$

Pour éliminer t, posons $t = \operatorname{tg}\varphi$; on a

$$x = \frac{a\operatorname{tg}\varphi(1-\operatorname{tg}^2\varphi)}{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)^2} = \frac{a}{2}\sin 2\varphi\cos 2\varphi, \qquad y = \frac{-a(1-\operatorname{tg}^2\varphi)^2}{2(1+\operatorname{tg}^2\varphi)^2} = -\frac{a}{2}\cos^2 2\varphi.$$

En tirant de là $\sin^2 2\varphi$ et ajoutant à $\cos^2 2\varphi$, il vient l'équation

$$2x^2 + 2y^2 + ay = 0.$$

Le lieu cherché est un cercle ayant son centre sur Oy au point d'ordonnée $-\frac{a}{4}$.

Remarque. — Il résulte de ceci que la courbe diamétrale de la courbe donnée relative à la direction Oy se décompose en un cercle et une quartique.

Il n'y a pas lieu de chercher l'enveloppe des cordes PQ, puisque celles-ci sont parallèles. L'enveloppe se réduit au point à l'infini dans la direction Oy.

4. Il est impossible que le quadrilatère OPRQ puisse rester semblable à lui-même, le rapport $\frac{OP}{OQ}$ étant essentiellement variable.

P. CHANGEY, à Dijon.

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Rodez ; Guillerme ; A. Rousseau ; Nyegaard, lycée Louis-le-Grand ; L. Jambert ; M. Stévenot ; A. Courtois.

MÉCANIQUE

1919. — *On considère trois axes de coordonnées rectangulaires, ox, oy et oz, et sur oz un vecteur égal à* $+1$. *Soit* MV *le moment linéaire de ce vecteur par rapport à un point quelconque de l'espace,* M.

1° *On prend le symétrique* MF *du vecteur* MV *par rapport à un plan parallèle au plan des yz et mené par le point* M. *Ce vecteur* MF *représente l'intensité d'un champ de forces au point* M. *Trouver les surfaces de niveau, les lignes de force du champ et le potentiel d'un point de masse* 1, *qui serait égal à* 100 *sur oz.*

2° *On suppose que le point* M *décrive un cercle de rayon* 1 *qui a son centre sur ox et qui est situé dans le plan* $x = 1$. *Trouver le lieu du point* V *et la surface engendrée par la droite* MV. *Construire la trace de cette surface sur le plan des yz.*

3° *Trouver le plan tangent en un point quelconque de la génératrice variable* MV, *le plan asymptote et le plan central. Donner l'équation tangentielle de la surface et les équations de la ligne de striction.*

1° Le vecteur porté par oz a pour origine le point (0, 0, 0), et, pour extrémité, le point (0, 0, 1). Les composantes du moment linéaire MV par rapport à un point quelconque (x, y, z) de l'espace sont donc :

$$(0-y)Z - (0-z)Y = -y,$$
$$(0-z)X - (0-x)Z = x,$$
$$(0-x)Y - (0-y)X = 0.$$

Le vecteur MF, symétrique de MV par rapport au plan parallèle au plan des yz mené par le point M, a donc pour composantes $y, x, 0$, et le travail élémentaire est

$$d\overline{U} = y\,dx + x\,dy.$$

Il y a une fonction de force $U = xy + k$, k étant une certaine constante. Le potentiel est $-U$, et, comme il doit être égal à 100 sur oz, on a $-k = 100$, $k = -100$. La fonction de force véritable, correspondant à l'énoncé de la question, est donc $U = xy - 100$.

Les surfaces de niveau sont $U = C^{te}$ ou $xy = C$; ce sont des cylindres parallèles à oz et ayant pour bases des hyperboles équilatères asymptotes aux axes.

Les équations différentielles des lignes de force sont

$$xdx - ydy = 0, \qquad dz = 0;$$

leurs équations finies sont $\qquad x^2 - y^2 = C, \qquad z = C'.$

Ce sont des hyperboles équilatères situées dans des plans parallèles au plan des xy et ayant pour asymptotes les bissectrices des parallèles aux axes ox et oy, menées par les divers points de rencontre avec oz.

2° Le cercle de rayon 1 ayant son centre sur ox et situé dans le plan $x = 1$ a pour équation,

$$x = 1, \qquad y^2 + z^2 = 1;$$

ses équations paramétriques sont donc

$$x = 1, \quad y = \cos t, \quad z = \sin t,$$

et le vecteur MV correspondant à l'un de ces points a pour composantes $-\cos t$, 1, 0; les coordonnées du point V sont donc $x = 1 - \cos t$, $y = 1 + \cos t$, $z = \sin t$.

Le lieu du point V est une courbe plane située dans le plan $x + y = 2$ et sur le cylindre $(x - 1)^2 + z^2 = 1$. C'est une ellipse, tangente au plan des yz en un point de oy; l'un des axes de cette ellipse est parallèle à oz, et l'autre est dans le plan des xy.

Les équations de MV sont $\dfrac{x - 1}{-\cos t} = \dfrac{y - \cos t}{1} = \dfrac{z - \sin t}{0}$,

ou

$$x + y\cos t - 1 - \cos^2 t = 0, \qquad z = \sin t.$$

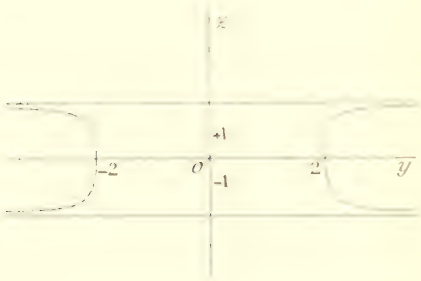
Le lieu de cette droite s'obtient de suite et est

$$y^2(1 - z^2) = (2 - z^2)^2.$$

C'est une surface réglée du quatrième degré; sa trace sur le plan $x = 0$ est la quartique

$$y^2 = \frac{(2 - z^2)^2}{1 - z^2}.$$

Cette courbe est tout entière comprise entre les droites $z = -1$ et $z = +1$, qui sont deux asymptotes; elle est symétrique par rapport aux deux axes et passe au point $z = 0$, $y = 2$. Elle a évidemment la forme ci-contre.



3° Les équations paramétriques de la surface sont

$$x = 1 - \lambda\cos t, \qquad y = \cos t + \lambda, \qquad z = \sin t;$$

elles s'obtiennent en égalant à λ les rapports qui donnent les équations de la droite.

Le plan tangent en un point λ de cette droite est un plan qui passe par la génératrice; il a donc pour équation

$$x + y\cos t - 1 - \cos^2 t + \mu z - \sin t = 0,$$

μ étant déterminé par la condition que ce plan contienne une tangente à l'une des courbes de la surface; cette courbe sera, par exemple, la courbe coordonnée $\lambda = C^{te}$:

$$x = 1 - \lambda\cos t, \qquad y = \cos t - \lambda, \qquad z = \sin t;$$

les paramètres de sa tangente sont donc $x' = \lambda\sin t$, $y' = -\sin t$, $z' = \cos t$.

En écrivant que cette direction est dans le plan $x + y\cos t + \mu z = 0$, nous avons

$$\lambda\sin t - \sin t\cos t + \mu\cos t = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \mu = \sin t - \lambda\,\mathrm{tg}\,t.$$

Le plan tangent est donc finalement

$$x + y\cos t - 1 - \cos^2 t + (\sin t - \lambda\,\mathrm{tg}\,t)z - \sin t = 0$$

Le plan asymptote correspond à $\lambda = \infty$; il a pour équation $z = \sin t$.

Le plan central lui est perpendiculaire; il a pour équation $x + y\cos t - 1 - \cos^2 t = 0$, et correspond à $\lambda = \cos t$.

Les équations de la ligne de striction sont donc

$$x = \sin^2 t, \qquad y = 2\cos t, \qquad z = \sin t\,;$$

c'est une biquadratique, intersection de deux cylindres

$$x - z^2 = 0, \qquad \frac{y^2}{4} + z^2 = 1.$$

Pour avoir l'équation tangentielle de la surface, il suffit de reprendre l'équation d'un plan tangent quelconque

$$x + y\cos t - 1 - \cos^2 t + \mu(z - \sin t) = 0,$$

et de l'identifier au plan courant de l'espace

$$ux + vy + wz + r = 0\,;$$

ceci donne

$$\frac{1}{u} = \frac{\cos t}{v} = \frac{\mu}{w} = \frac{1 + \cos^2 t + \mu \sin t}{-r}\,;$$

par conséquent $\cos t = \dfrac{v}{u}$, $\mu = \dfrac{w}{u}$, et, en égalant les rapports extrêmes,

$$r + u + \frac{v^2}{u} + w\sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}} = 0.$$

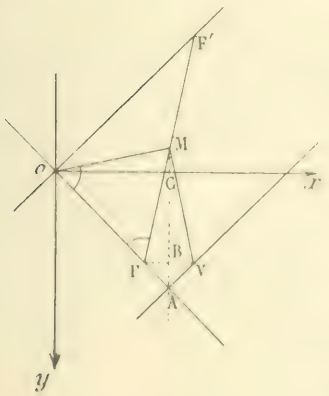
Finalement, cette équation s'écrit

$$(u^2 + v^2 + ur)^2 = w^2(u^2 - v^2).$$

La surface est donc une surface de quatrième classe, dont une infinité de plans tangents doubles sont en évidence ; ce sont ceux qui satisfont aux deux équations $w = 0$ et $u^2 + v^2 + ur = 0$, c'est-à-dire les plans tangents menés à la conique $u^2 + v^2 + ur = 0$ par l'origine.

Bonnes solutions : MM. Paul Villain ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; J. Ottenheimer, lycée de Nancy ; Lambert, à Saint-Etienne ; L. Perrin, à Trévoux ; J. Soubaigné ; G. Lach, à Rodez.

Remarques géométriques. — Puisque le vecteur fixe porte par oz est égal à $-k$, le vecteur MV est horizontal, perpendiculaire à oM (en projection sur le plan de xy) et égal à oM. Le vecteur MF est symétrique par rapport à la parallèle à oy menée par le point M, MA.



Le triangle MoF est isocèle et les deux angles o et F sont égaux ; ils sont égaux chacun à $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\widehat{oMF}}{2}$. Or $\widehat{oMF} = \dfrac{\pi}{2} - \widehat{FMV}$; donc l'angle MoF est égal à $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\widehat{FMV}}{2} = \dfrac{\pi}{4} + \widehat{AMV}$; d'autre part, l'angle Mxo est égal à $\widehat{AMV}$; donc $\widehat{MoF} = \dfrac{\pi}{4} + \widehat{Mxo}$; l'angle xoF est donc constant et égal à $\dfrac{\pi}{4}$. Le lieu du point F est le plan bissecteur du dièdre xoz.

Alors, quand le point M se meut dans le plan de trace MA, parallèle au plan des yz, le point V se meut dans un plan parallèle à xz dont la trace AV est symétrique de oA par rapport à MA.

Si le point M décrit le cercle indiqué, le lieu du point V est donc une courbe plane. Les deux triangles rectangles MoC et MBV sont égaux, $oC = MB$. MB est donc constant et parallèle à xz. Le lieu du point B est le cercle donné auquel on fait subir une translation parallèle à xz et d'amplitude $oC = 1$. Le lieu du point V est sur un cylindre de révolution ayant pour base ce cercle et parallèle à xz. Ce lieu est donc une ellipse.

La surface engendrée par la droite MV contient le cercle donné et deux droites parallèles à xz qui correspondent aux deux points du cercle qui se projettent en C. La section par le plan du cercle est du quatrième ordre ; donc la surface est du quatrième ordre. C'est une surface réglée à génératrices horizontales, qui admet la droite à l'infini du plan des xy comme ligne double. Ceci découle de ce que par chaque point de cette droite il passe deux droites de la surface.

Considérons maintenant une force du champ, MF, et prolongeons-la jusqu'au point de rencontre F' avec

la deuxième bissectrice. Comme $MF = Mo$, le point M est le milieu de l'hypoténuse FF', et la droite MF est tangente en M à une hyperbole équilatère qui admet pour asymptotes les deux bissectrices de l'angle des axes. Les lignes de force sont donc des hyperboles équilatères horizontales ayant pour asymptotes des parallèles aux bissectrices de l'angle des axes qui se croisent sur oz.

Les surfaces de niveau sont alors des cylindres hyperboliques équilatères ayant pour plans asymptotes le plan des zy et le plan des zx.

P. VILLAIN.

CONCOURS DE 1911

ÉCOLE SUPÉRIEURE D'AÉRONAUTIQUE ET DE CONSTRUCTION MÉCANIQUE

1re SESSION

Mathématiques.

I. — Séries. Caractères principaux de convergence et de divergence.

II. — Une équation $x^3 - 2px^2 + qx - r = 0$ a pour racines les longueurs a, b, c des trois côtés d'un triangle ABC. Former l'équation qui a pour racines sin A, sin B, sin C.

III. — **1965**. Intégrer l'équation différentielle

$$a^2 y'' - y = 0.$$

Construire la courbe intégrale qui passe par l'origine et qui en ce point est tangente à Ox.

Exprimer l'aire de cette courbe comprise entre un arc MM_1, l'axe des x et les deux ordonnées MP, M_1P_1.

Exprimer la longueur de l'arc MM_1.

Mécanique.

I. — Forces centrales. Mouvements des planètes.

II. — Un point pesant est attiré par un point fixe O proportionnellement à la distance.

Etudier le mouvement de ce point M abandonné à lui-même sans vitesse initiale dans une position initiale M_0.

On examinera spécialement le cas où M_0 est situé sur la verticale de O, et où par conséquent le mouvement est rectiligne.

QUESTIONS PROPOSÉES

1966. — Trouver le quotient des déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a & b & \end{vmatrix}, \qquad (a = b).$$

N. ABRAMESCU, professeur au Lycée de Galatz (Roumanie).

1967. — Soient P, Q, R les pieds des trois normales à l'ellipse abaissées d'un point M variable de l'ellipse. Les perpendiculaires élevées en M à MP, MQ, MR rencontrent QR, RP, PQ en trois points en ligne droite. Enveloppe de cette droite quand M se déplace sur l'ellipse.

Dr. WERNER-GARDECKE.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT

21e Année. Septembre 1911. N° 12.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES NORMALES A LA PARABOLE

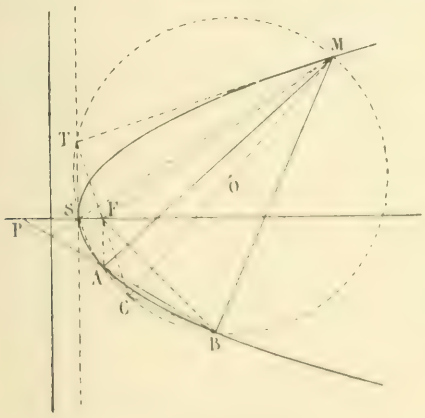
Par M. **Chantrelle**, élève de Mathématiques spéciales au lycée de Dijon.

Je me propose de développer ici quelques propriétés des normales à la parabole qui interviennent dans un grand nombre de problèmes. Toutes les questions de ce genre se simplifient notablement pour cette conique particulière, mais par le fait même qu'elles ne donnent pas lieu à de grandes difficultés de calcul, il est naturel d'essayer d'en présenter autant que possible les résultats par la voie géométrique.

Les questions que je vais traiter ont été proposées sous diverses formes, plus ou moins modifiées ou développées, aux examens oraux de l'Ecole Polytechnique.

Si d'un point fixe P *on mène une sécante variable* PAB *à une parabole et les normales en* A *et* B *qui se coupent en* M, *le calcul montre que le lieu de* M *est une parabole, qui se confond avec la parabole donnée si le point* P *est le symétrique du sommet* S *par rapport à la directrice. Réciproquement, si d'un point* M *de la parabole on mène les normales* MA, MB, *la corde* AB *passe par le point fixe* P.

En effet, le cercle de Joachimsthal MAB relatif aux normales issues de M passe par le point de rencontre C des tangentes en A et B, et son centre O est le milieu de MC. Les cordes SM et AB sont symétriquement inclinées sur l'axe, donc l'ordonnée de M étant y, celle de C est $-\frac{y}{2}$ et celle de O, $\frac{y}{4}$. Le cercle considéré passe donc par le point de rencontre T de la tangente au sommet et de la tangente en M, l'angle MTC est droit et TC passe par le foyer F. Les droites MS et AB, polaires par rapport à la parabole des points T et C, concourent sur la directrice, et par suite AB passe par le symétrique P du sommet S par rapport à la directrice.



L'ordonnée de C étant $-\frac{y}{2}$ et celle de T $\frac{y}{2}$, on a FT = FC ; donc le lieu du point C, qui n'est autre que la polaire de P, est la droite symétrique de la tangente au sommet par rapport au foyer.

Enfin, d'après le théorème de Poncelet, les triangles AFC, CFB sont semblables, et $\overline{FC}^2 = FA.FB$.

De même $\overline{FT}^2 = FS \times FM$, donc $FA.FB = FS.FM$.

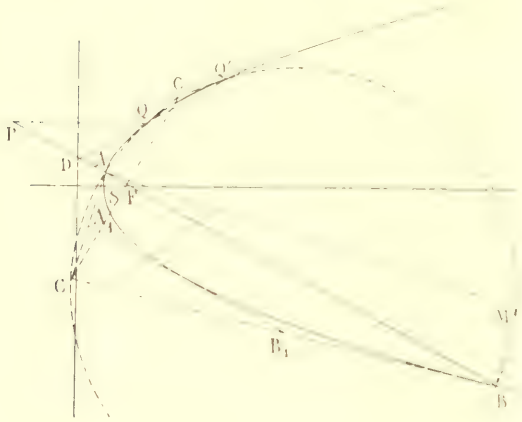
Nous généraliserons plus loin cette propriété.

La propriété du cercle de Joachimsthal MAB de passer par le point S peut, grâce à la propriété précédente, s'énoncer ainsi :

Si du symétrique P *du sommet par rapport à la directrice on mène une sécante variable* PAB *et les normales en* A *et* B *qui se coupent en* M, *le cercle* AMB *passe par un point fixe*

Cette propriété est encore vraie si le point P est le symétrique d'un point quelconque Q de la parabole par rapport à la directrice.

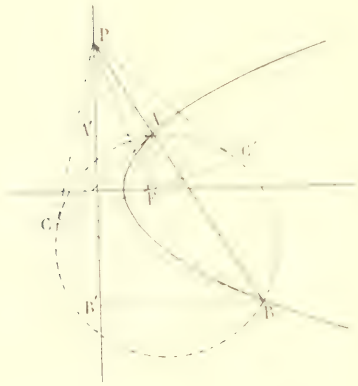
Soit D le point où la sécante PAB rencontre la directrice, la droite DQ coupe la parabole en un second point Q′, et les quatre points A, B, Q, Q′ sont sur un même cercle. Menons les tangentes en A et B qui se coupent en C, en Q et Q′ qui se coupent en C′. La droite CC′ étant la polaire de D par rapport au cercle ABQQ′ comme par rapport à la parabole, la droite FD est un diamètre de ce cercle ; d'autre part AB et QQ′ formant un faisceau harmonique avec la directrice et la parallèle à l'axe passant par D, les points C, C′ et F sont en ligne droite et FC = FC′. Or la droite A_1B_1 joignant les milieux de CA et CB est tangente à la parabole, donc le cercle CA_1B_1 passe par F et le cercle CAB passe par C′ et admet aussi pour diamètre AB. Ce cercle coïncide donc avec le cercle ABQQ′ ; il passe donc par le point fixe Q quand la sécante PAB varie.



On peut remarquer que l'égalité FC = FC′ entraîne FA × FB = FQ × FQ′.

C'est la généralisation que nous avons annoncée ; elle exprime la condition nécessaire et suffisante pour que deux cordes d'une parabole symétriquement inclinées sur l'axe se coupent sur la directrice, ou inversement.

Enfin, *si d'un point* P *de la directrice, on mène une sécante variable* PAB *et les normales en* A *et* B *qui se coupent en* M, *le cercle* AMB *engendre un faisceau dont* P *et* F *sont les points de Poncelet.*



Le cercle AMB est aussi le cercle ACB, C étant toujours le point de rencontre des tangentes en A et B.

Les symétriques A′ et B′ de F par rapport à CA et CB sont sur la directrice et le cercle de centre C, passant par F, qui est tangent en ce point à PF. Donc $\overline{PF}^2 = PA \times PB$.

Nous avons déjà démontré d'autre part que

$$\overline{FC}^2 = FA \times FB = AA' \times BB'.$$

Or si on remplace dans la relation $\overline{PA}^2 = \overline{PA'}^2 + \overline{AA'}^2$ l'un des facteurs de chaque carré par les quantités proportionnelles PB, PB′, BB′, on a la relation

$$PA \times PB = PA' \times PB' + AA' \times BB' = \overline{PF}^2 + \overline{FC}^2 = \overline{PC}^2.$$

Le cercle ABC est donc tangent à PC en C, son centre étant sur PF ; la polaire de P par rapport à ce cercle est la droite fixe CC′, et il engendre bien un faisceau dont P et F sont les points de Poncelet. Au lieu du point fixe de la question précédente nous en avons deux, intersections des droites isotropes des points P et F.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES LIGNES DE COURBURE

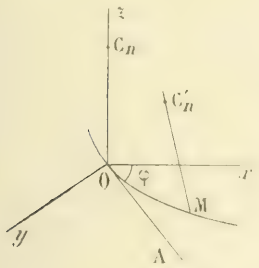
par M. **E. Traynard**, Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lille.

La Revue a publié dernièrement (Décembre 1909) un article où se trouve en particulier démontré ce théorème fort important :

La propriété d'une ligne d'être ligne de courbure d'une surface se conserve par inversion.

La démonstration est faite d'après la méthode classique en s'appuyant sur le théorème de Dupin. M. Demartres emploie dans le cours de Géométrie supérieure de la Faculté des sciences de Lille une méthode toute différente et il a bien voulu me permettre de la présenter aux lecteurs de la Revue. Bien que cette question soit, à mon avis, en dehors du programme de l'Ecole Polytechnique, elle peut former la matière d'un exercice intéressant.

Soit la surface $z = f(x, y)$ tangente au point O au plan xOy, les axes Ox, Oy étant ceux de l'indicatrice. Je trace sur la surface une courbe (C), passant en O, tangente à la droite OA qui fait l'angle φ avec Ox. J'appellerai σ son arc. Soient C_n le centre de courbure de la section normale AOz, R_n son rayon de courbure, C'_n et R'_n les éléments analogues relatifs au point M de la courbe (C) infiniment voisin de O.



La démonstration repose sur la formule classique

$$(1) \qquad \frac{1}{R_n} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}.$$

Je vais d'abord établir la propriété suivante :

Les deux sphères de centres C_n et C'_n et de rayons R_n et R'_n (1) *font un angle infiniment petit ε donné par la formule*

$$(2) \qquad \frac{\varepsilon}{d\sigma} = \cos\varphi \sin\varphi \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

D'après une formule élémentaire,

$$\overline{C_nC'_n}^2 = R_n^2 + R_n'^2 - 2R_nR'_n\cos\varepsilon = (R_n - R'_n)^2 + 4R_nR'_n\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$$

et, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$(3) \qquad \varepsilon^2 = \frac{\overline{C_nC'_n}^2 - (R_n - R'_n)^2}{R_nR'_n} = \frac{\overline{C_nC'_n}^2 - dR_n^2}{R_n^2}.$$

Soient en général a, b, c les cosinus directeurs de la normale à la surface :

$$(4) \qquad a = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad b = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad c = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Les coordonnées de C_n sont en général

$$x + aR_n, \qquad y + bR_n, \qquad z + cR_n,$$

et $\overline{C_nC'_n}^2$ n'est autre que la somme des carrés des différentielles de ces coordonnées.

$$(5) \qquad \begin{aligned} \overline{C_nC'_n}^2 &= (dx + ad\mathrm{R}_n + \mathrm{R}_n da)^2 + (dy + bd\mathrm{R}_n + \mathrm{R}_n db)^2 + (dz + cd\mathrm{R}_n + \mathrm{R}_n dc)^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + \mathrm{R}_n^2(da^2 + db^2 + dc^2) + 2\mathrm{R}_n(dadx + dbdy + dcdz) + d\mathrm{R}_n^2. \end{aligned}$$

En dérivant (4), on obtient

$$\frac{da}{d\sigma} = \frac{pq\dfrac{dq}{d\sigma} - (1+q^2)\dfrac{dp}{d\sigma}}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{db}{d\sigma} = \frac{pq\dfrac{dp}{d\sigma} - (1+p^2)\dfrac{dq}{d\sigma}}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{dc}{d\sigma} = \frac{p\dfrac{dp}{d\sigma} + q\dfrac{dq}{d\sigma}}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(1) On peut dire aussi : les sphères ayant pour grands cercles les cercles osculateurs aux sections normales tangentes à (C) en O et en M.

J'applique ces résultats au point O.

$$x = y = z = 0. \qquad \frac{dx}{d\sigma} = \cos\varphi, \qquad \frac{dy}{d\sigma} = \sin\varphi, \qquad \frac{dz}{d\sigma} = 0.$$

$$p = q = 0. \qquad r = \frac{1}{R_1}, \qquad s = 0, \qquad t = \frac{1}{R_2}.$$

La formule (5) devient alors

$$\overline{C_n C'_n}^2 = d\sigma^2 + R_n^2 d\sigma^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{R_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2^2}\right) - 2R_n d\sigma^2\left(-\frac{\cos^2\varphi}{R_1} - \frac{\sin^2\varphi}{R_2}\right) + dR_n^2.$$

En portant dans (3), j'obtiens

$$\frac{\varepsilon^2}{d\sigma^2} = \frac{1}{R_n^2} + \frac{\cos^2\varphi}{R_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2^2} - 2\frac{1}{R_n}\left(\frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}\right)$$

$$= \frac{\cos^2\varphi}{R_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2^2} - \frac{1}{R_n^2} = \cos^2\varphi\sin^2\varphi\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2.$$

Par conséquent, en choisissant convenablement les signes, la formule (2) est établie.

Il en résulte que, pour un point qui n'est pas un ombilic, l'angle ε est en général du même ordre infinitésimal que l'arc OM ; il est d'ordre supérieur si la courbe (C) est une ligne de courbure ; par conséquent :

Une ligne de courbure est telle que les sphères ayant pour grands cercles les cercles osculateurs aux sections normales tangentes à la ligne en deux points infiniment voisins sont tangentes entre elles.

Cette définition se transformant en elle-même par inversion, le théorème proposé est établi.

NOTE SUR LES IMAGINAIRES ET SOLUTION DU PROBLÈME N° 1923

par M. **E. Keraval**.

Je me propose d'énoncer et de démontrer un certain nombre de propositions concernant les imaginaires. Ce sont des propositions à peu près évidentes mais qui n'ont pas encore été données dans les ouvrages classiques de géométrie analytique. Pourtant leur connaissance me semble indispensable, en particulier pour la solution du problème que j'ai proposé ici même il y a quelques mois sous le n° 1923.

Théorème I. — *Si une droite coupe une droite isotrope à angle droit elle forme avec elle un plan tangent au cercle imaginaire de l'infini.*

Soient Δ, Δ' les deux droites dont les équations sont

$$(\Delta) \qquad \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma},$$

$$(\Delta') \qquad \frac{x - x_0}{\alpha'} = \frac{y - y_0}{\beta'} = \frac{z - z_0}{\gamma'}.$$

Δ est isotrope : $\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$;

Δ, Δ' sont rectangulaires, donc $\qquad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$

Nous supposons que Δ, Δ' ne soient pas parallèles; elles déterminent un plan qui a pour équation

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

Ce plan sera tangent au cercle de l'infini si l'expression

$$H = (\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2$$

est nulle. Or $$H = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) - (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')^2$$
est nulle en vertu des hypothèses faites.

Réciproque. — Elle résulte des calculs précédents, on peut l'énoncer ainsi :

Toutes les droites d'un plan tangent au cercle imaginaire de l'infini sont perpendiculaires à la direction des droites isotropes de ce plan.

Théorème II. — *Deux directions isotropes distinctes ne sont jamais rectangulaires.*

C'est une conséquence immédiate du théorème I. S'il existait deux droites isotropes distinctes passant par un point A et rectangulaires, elles formeraient un plan tangent au cercle imaginaire de l'infini, or dans un tel plan il n'y a qu'une direction de droites isotropes.

Théorème III. — *Etant données deux droites isotropes Δ, Δ', si l'on cherche leur perpendiculaire commune, cette droite est parfaitement déterminée si Δ, Δ' ne sont pas dans un même plan.*

Elle est l'intersection des deux plans tangents au cercle de l'infini qui passent l'un par Δ, l'autre par Δ'.

Le calcul montre que la perpendiculaire commune est bien déterminée; le reste résulte du théorème I.

Génératrices isotropes d'un hyperboloïde à une nappe H. — H coupe en quatre points le cercle imaginaire de l'infini ; par chacun d'eux il passe une génératrice de chaque système. Donc quatre génératrices isotropes dans chaque système, elles se coupent en seize points : les douze ombilics plus les quatre points du cercle de l'infini. Soient A, B, C, D les quatre génératrices isotropes de l'un des systèmes. En les combinant deux à deux on a six couples de droites, auquel il correspond une perpendiculaire commune, donc six droites dont deux seulement sont réelles, celles qui correspondent aux couples de droites conjuguées. Je dis que ces six droites forment les six arêtes d'un tétraèdre T. Ceci résulte du théorème III, les faces de T sont les plans tangents au cercle de l'infini qui passent respectivement par A, B, C, D. On a ainsi deux tétraèdres T, T', qui correspondent aux deux systèmes de génératrices ; ils sont évidemment symétriques par rapport au centre de la quadrique.

Application à la résolution du problème n° 1923. — *Etant donnés un hyperboloïde à une nappe* H *et les génératrices* G *d'un même système de* H *; d'un point* M *de l'espace on abaisse des perpendiculaires sur les droites* G. *Trouver le lieu des points* M *pour lesquels les pieds des perpendiculaires sont dans un même plan. Montrer que le plan est toujours un plan cyclique et que le lieu se compose de six droites qu'on demande de définir géométriquement, voir combien d'entre elles sont réelles. Examiner le cas du paraboloïde hyperbolique ; examiner aussi le cas des hyperboloïdes engendrés par l'intersection de deux plans rectangulaires tournant chacun autour d'une droite fixe.*

1re solution. — Si de M on abaisse des perpendiculaires sur les génératrices du système S, les pieds forment une courbe gauche γ du quatrième degré, manifestement unicursale, qui coupe le plan de l'infini en quatre points, qui sont ceux où les quatre génératrices isotropes A, B, C, D du système S coupent le même plan. Il s'agit donc de trouver les cas de décomposition de la courbe γ. Or si je prends M sur la perpendiculaire commune λ à A et B par exemple, les deux plans M.A et M.B étant tangents au cercle de l'infini, tout point de A ou de B fera partie de la courbe γ. Si on élimine ces deux droites il restera une courbe du second degré, dont les directions asymptotiques C, D seront isotropes. Si cette courbe est plane ce sera un cercle, si elle est formée de deux droites, ce seront deux génératrices isotropes de la surface parallèles à C, D, et comme ce n'est ni C ni D, ce seront C, D génératrices de l'autre système.

Je dis que c'est la première hypothèse qui est la bonne, et que le lieu est un cercle. C'est absolument évident s'il s'agit d'une des deux droites λ qui sont réelles, car il faut bien qu'une partie de la courbe γ soit réelle. Mais on peut le voir autrement, et ceci s'applique à toutes les droites λ. En effet, les plans perpendiculaires en tous les points de D′ par exemple aux génératrices du système S qui passent par ces points iraient passer par M, or nous verrons qu'ils passent par un sommet de T ; ils passeraient tous par la droite λ, qui serait orthogonale à toutes les génératrices du système S. Ces dernières seraient parallèles à un même plan, ce qui est impossible. Ainsi γ se décompose bien en deux droites et un cercle, et ceci montre, ainsi que me l'a fait remarquer M. E. Humbert, que γ n'est pas dans le cas général une biquadratique, sans quoi l'intersection des deux quadriques aurait donné quatre droites.

Nous avons supposé que M n'était pas en un sommet de T ; dans le cas contraire il se produit une nouvelle décomposition. En effet, par ce point passe un troisième plan tangent au cercle de l'infini, et dans ce plan se trouve une troisième génératrice isotrope C qui répond à la question. La courbe γ se compose alors de A, B, C et de la génératrice isotrope D′, parallèle à D, mais de système différent.

Il y a un autre cas de décomposition, c'est celui où M est pris en un point quelconque de A, B, C ou D, on a alors une droite et une cubique.

Vérification par le calcul. — Par un choix d'axes facile à apercevoir on peut prendre H sous la forme

$$(c^2 - a^2)z^2 - 2cdyz + d^2(x^2 + y^2 - a^2) = 0.$$

Pour $z = C^{te}$ on a toujours un cercle, dont l'enveloppe en projection horizontale (sur xOy) est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1 = 0;$$

c'est le contour apparent elliptique ou hyperbolique. Les équations d'une génératrice G peuvent alors s'écrire

$$(G) \qquad x = \frac{2atz + ad(1 - t^2)}{d(1 + t^2)}, \qquad y = \frac{[(c + a)t^2 + (c - a)]z + 2adt}{d(1 + t^2)}.$$

Avec ces équations on a facilement la courbe γ. Je préfère indiquer une autre méthode. Si on laisse z fixe, le plan P perpendiculaire à (G) au point correspondant doit passer par un point fixe lorsque t varie.

Si l'on écrit l'équation de ce plan, après avoir divisé par $1 + t^2$, on trouve

$$t^2\left[\frac{a + c}{d}Y + Z - z - \left(\frac{a + c}{d}\right)^2 z\right] + \frac{2a}{d}t\left(X - c\right) + \left[\frac{c - a}{d}Y + Z - \left(\frac{c - a}{d}\right)^2 z - z\right] = 0,$$

ce qui donne pour le point fixe : $X = c, \qquad Y = \frac{2c}{d}z, \qquad Z = z\left[1 - \frac{c^2 - a^2}{d^2}\right].$

Si z varie, ce point décrit la droite $X = c, \qquad \frac{Y}{Z} = \frac{2cd}{a^2 + d^2 - c^2}.$

C'est l'une des six droites : elle passe par le foyer du contour apparent, c'était bien évident *a priori*.

Je laisse de côté le cas du paraboloïde hyperbolique qui est trop facile ; je vais indiquer une seconde solution du problème dans le cas général.

Seconde solution. — Soient X, Y, Z, L, M, N les six coordonnées d'une droite, je pose pour abréger $\rho = NY - MZ$, $\rho' = LZ - NX$, $\rho'' = MX - LY$.

Donnons-nous un point $A(\alpha, \beta, \gamma)$ et un plan P_λ : $Ax + By + Cz + D = 0$. Les droites Δ telles que le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur Δ soit dans P_λ forment un complexe AP_λ facile à étudier géométriquement et représenté par l'équation

$$D(X^2 + Y^2 + Z^2 + \alpha X + \beta Y + \gamma Z) + A\rho + B\rho' + C\rho'' = 0.$$

Il s'agit donc de trouver les complexes AP_λ auxquels appartiennent un système de génératrices de H :

$$\text{(H)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad a > b.$$

Or, pour un des systèmes de génératrices, on trouve facilement

$$\rho = \frac{a(b^2+c^2)}{bc} YZ, \qquad \rho' = -\frac{b(c^2+a^2)}{ca} ZX, \qquad \rho'' = \frac{c(b^2-a^2)}{ab} XY.$$

Si je remplace ρ, ρ', ρ'' par leurs valeurs dans l'équation du complexe, j'obtiens une relation homogène et du second degré en X, Y, Z, que je dois identifier avec l'équation du cône asymptote, ce qui me donne les relations suivantes où j'ai remplacé α, β, γ par x, y, z qui sont les inconnues, ainsi que A, B, C, D :

$$\left\{\begin{aligned}
&Bz + Cy + A \cdot \frac{a(b^2+c^2)}{bc} = 0,\\
&Cx + Az - B \cdot \frac{b(c^2+a^2)}{ac} = 0,\\
&Ay + Bx + C \cdot \frac{c(b^2-a^2)}{ab} = 0,\\
&\frac{D + Ax}{\frac{1}{a^2}} = \frac{D + By}{\frac{1}{b^2}} = \frac{D + Cz}{\frac{1}{c^2}} = \lambda.
\end{aligned}\right.$$

Or il est évident que l'une des quantités A, B, C doit être nulle, car le plan $Ax + By + Cz + D = 0$ doit être cyclique, étant données les directions asymptotiques de la quartique considérée plus haut. Je prends $A = 0$ et, laissant de côté le cas particulier $D = 0$ qui sera contenu comme cas limite, je peux supposer $D = 1$, alors $\lambda = a^2$,

$$B = \frac{a^2 - b^2}{b^2 y}, \qquad C = -\frac{(a^2+c^2)}{c^2 z}.$$

Les trois autres équations deviennent

$$acxz + b(a^2+c^2)y = 0, \qquad abxy + (a^2-b^2)cz = 0, \qquad c^2(a^2-b^2)z^2 - b^2(a^2+c^2)y^2 = 0,$$

qui donnent deux des six droites, savoir :

$$(\varepsilon = \pm 1) \left\{\begin{aligned}
&x = \frac{\varepsilon}{a}\sqrt{(a^2-b^2)(a^2+c^2)},\\
&\frac{y}{z} = \frac{-c\varepsilon}{b(a^2+c^2)}\sqrt{(a^2-b^2)(a^2+c^2)}.
\end{aligned}\right.$$

Ces deux droites sont réelles puisque j'ai supposé $a > b$. On a les quatre autres droites en supposant $B = 0$ ou $C = 0$.

Bonnes solutions de MM. Vevrines, lycée Louis-le-Grand ; Tarenne, lycée de Versailles.

GÉOMÉTRIE

1926. — *On donne le cercle* C *de centre* O *et de rayon* R *et son diamètre fixe* AA'. M *étant un point variable de ce cercle et* H *sa projection orthogonale sur* AA', *sur la tangente en* M *on prend les points* P *et* P' *tels que* MP = MP' = MH.

Le point M *parcourant le cercle :*

1° *Les points* P *et* P' *décrivent deux sinusoïdes.*

2° *Les tangentes en* P *et* P′ *à ces cardioïdes sont rectangulaires, elles se coupent en* T, *les normales aux mêmes points se coupent en* N. *Le point* T *décrit une épicycloïde à deux rebroussements.*

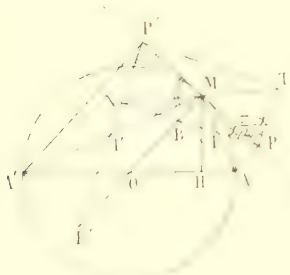
Enveloppe du cercle de diamètre PP′.

Enveloppe de TN *(épicycloïde à deux rebroussements).*

3° *Enveloppes de* PH *et* P′H *(hypocycloïdes à trois rebroussements).*

4° *Enveloppe de* QQ′, Q *et* Q′ *étant les points de contact de* PH *et* PH′ *avec leurs enveloppes (hypocycloïde à quatre rebroussements).*

1. La droite MA étant bissectrice de l'angle HMP, les triangles HMA et AMP sont égaux, puisqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux. On en conclut que le point P est la projection du point A sur la tangente au point M; par suite, le lieu du point P est la podaire du point A par rapport au cercle donné (C). C'est donc une cardioïde (γ) ayant son rebroussement en A et son sommet en A′.



On verrait de même que le lieu de P′ est une cardioïde (γ') qui a son rebroussement en A′ et son sommet en A.

2. La normale à (γ) au point P passe par le milieu I de AM et aussi par la projection B du point A sur le rayon OM; de même la normale à (γ') au point P′ passe par les points analogues I′ et B′. Il est aisé de voir que ces deux normales sont rectangulaires. En effet, les figures APMB, A′P′MB′ étant des rectangles, on a

$$\widehat{MPB} = \widehat{PMA} \qquad \text{et} \qquad \widehat{MP'B'} = \widehat{P'MA'}.$$

Comme les angles PMA et P′MA′ sont complémentaires, les angles MPB et MP′B′ le sont aussi, et par suite l'angle PNP′ est droit.

Le point T, intersection des tangentes en P et P′ aux courbes (γ) et (γ'), est alors le quatrième sommet du rectangle construit sur NP et NP′; et les diagonales de ce rectangle sont PP′ et NT; elles se coupent en M, milieu de PP′.

Posons $\qquad \widehat{HMA} = \widehat{AMP} = \alpha, \qquad \widehat{MPT} = \frac{\pi}{2} - \alpha.$

Nous avons alors $\widehat{TMP} = 2\alpha = \widehat{HMP}$; par suite, le point T est le symétrique du point H par rapport à MP.

Si nous prolongeons OM d'une longueur MD égale à OM, les deux triangles OHM et DMT sont égaux.

Construisons maintenant le cercle (ω) décrit sur MD comme diamètre; on voit immédiatement que l'angle $M\omega T$ vaut deux fois l'angle AOM; donc arc MT = arc AM.

On en conclut que le point T décrit une épicycloïde (E) à deux rebroussements A et A′.

Le cercle de diamètre PP′ a pour centre le point M et passe par le point T; il est donc tangent en ce point à la droite TD, qui est précisément la tangente à l'épicycloïde (E). Il en résulte que l'enveloppe du cercle de diamètre PP′ se compose de cette épicycloïde et de la droite AA′.

On peut encore le voir autrement. Le cercle de diamètre PP′ et le cercle infiniment voisin se coupent d'abord au point H, puis au symétrique de ce point par rapport à la ligne des centres; or cette ligne est la tangente MP. Donc, le second point de rencontre des deux cercles est le point T, symétrique de H par rapport à MP. On en conclut que l'enveloppe du cercle de diamètre PP′ se compose des lieux des points H et T.

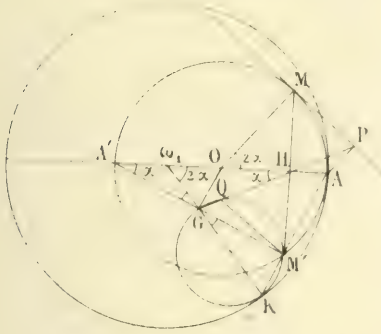
Soit T′ le point diamétralement opposé à T dans le cercle (ω); ce point T′ décrit aussi une épicy-

cloïde (E′) à deux rebroussements F et F′ ; et la droite DT′ est tangente à cette courbe au point T. Or la droite TN est homothétique de DT′, le centre d'homothétie étant le point O, et le rapport d'homothétie étant égal à $\frac{1}{2}$.

On en conclut que l'enveloppe de TN est l'épicycloïde homothétique de (E′) dans les conditions sus-indiquées. Cette courbe a pour rebroussements les milieux de OF et de OF′.

Remarquons d'ailleurs que TN est la normale à (E) au point T ; par suite, l'enveloppe de TN est la développée de (E). On sait que c'est une épicycloïde semblable.

3. Soit M′ le symétrique de M par rapport à AA′ ; les droites HP et A′M′ qui font avec AA′ le même angle α en sens contraires se coupent en un point G qui est le milieu de A′M′. Donc OG est perpendiculaire à A′M′. Soit ω_1 le milieu de OA′ ; ce point est le centre du cercle qui a pour diamètre OA′ ; donc $\omega_1 G = \frac{R}{2}$. Désignons par K le point de rencontre de $\omega_1 G$ et de AM′ ; les deux triangles GOA′ et GM′K sont égaux ; on a $GK = OA' = R$, et $\omega_1 K = \frac{3R}{2}$. Le lieu du point K est un cercle (ω_1) de rayon $\frac{3R}{2}$.



D'autre part, le cercle décrit sur GK comme diamètre passe par le point M′ et rencontre HP en un point Q. On voit aisément que l'angle QGK est égal à 3α, et on en conclut que l'arc QK du cercle (GK) est égal à l'arc AK du cercle (ω_1).

Par suite, le lieu du point Q est une hypocycloïde à trois rebroussements, et la tangente en ce point est précisément la droite HP.

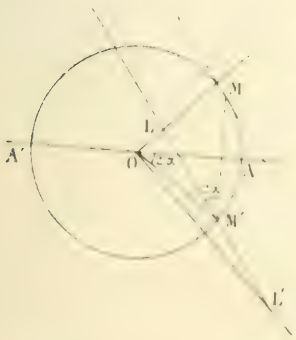
On en conclut que la droite HP enveloppe cette hypocycloïde.

Il est aisé de voir que le point Q est symétrique de P par rapport au point H. En effet $\widehat{QM'G} = \frac{\pi}{2} - 3\alpha$, $\widehat{HM'A'} = \frac{\pi}{2} - \alpha$; donc $\widehat{HM'Q} = \widehat{HM'A'} - \widehat{QM'G} = 2\alpha = \widehat{HMP}$.

On verrait de même que l'enveloppe de HP′ est une hypocycloïde à trois rebroussements, symétrique de la première par rapport au diamètre perpendiculaire à AA′, et que le point Q′ où cette droite touche son enveloppe est symétrique de P′ par rapport à H.

4. Cherchons maintenant l'enveloppe de la droite QQ′.

D'après ce qui vient d'être dit, cette droite est la symétrique de la tangente PMP′ par rapport au point H ; c'est donc la parallèle à cette tangente, menée par le point M′. Prenons sur cette droite la longueur $M'L = ML = OM$. L'angle OM′L est égal à $\frac{\pi}{2} - 4\alpha$, et comme le triangle OM′L est isocèle, on voit aisément que chacun des angles à la base vaut $2\alpha + \frac{\pi}{4}$.



Donc la droite OL fait l'angle $\frac{\pi}{4}$ avec OA, donc cette droite est fixe, et il en est de même de la droite OL′ qui lui est perpendiculaire.

Comme $LL' = 2OM = 2R$, l'enveloppe de LL′ est une hypocycloïde à quatre rebroussements.

MARESCALCHI.

Bonnes solutions par MM. R. Dontot, à Arras ; Charles Guillerme ; G. Lach, à Rodez ; J. Ottenheimer, lycée de Nancy ; Louis Perrin, à Trévoux ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; L. Simon, à Fourmies ; Dotiner.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1912. — *Enveloppe et trajectoires orthogonales des paraboles qui ont même axe et même directrice* (1).

Autre solution de la seconde partie. — Sur la parabole

$$y^2 = 2px - p^2, \tag{1}$$

prenons un point M quelconque. Un déplacement infinitésimal $(\delta x, \delta y)$ effectué, à partir de ce point, sur la parabole satisfait à l'équation

$$y\delta y = p\delta x.$$

Un déplacement (dx, dy) effectué sur la trajectoire orthogonale vérifie donc la suivante :

$$y\,dx = -p\,dy. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) renferment trois variables y, x, p. En éliminant l'une d'elles, on aura une équation différentielle entre les deux autres. Quelle que soit la façon de procéder, on arrive à une équation homogène, donc intégrable par quadratures. Il semble qu'on obtienne les calculs les plus simples et les plus élégants en éliminant y. Pour cela, il faut, au préalable, différentier (1), ce qui donne

$$y\,dy = p\,dx + (x - p)\,dp. \tag{3}$$

Eliminant dy entre (2) et (3), on a

$$y^2\frac{dx}{p} + p\,dx + (x - p)\,dp = 0. \tag{4}$$

Eliminant y^2 entre (1) et (4), il vient

$$2x\,dx + (x - p)\,dp = 0. \tag{5}$$

Posons $p = tx$, l'équation s'écrit

$$\frac{dx}{x} = \frac{(t-1)\,dt}{2 + t - t^2} = \frac{t-1}{(1+t)(2-t)}\,dt = -\frac{1}{3}\left[\frac{2\,dt}{t+1} + \frac{dt}{t-2}\right]. \tag{6}$$

D'où, en appelant C une constante arbitraire,

$$x = C(t+1)^{-\frac{2}{3}}(t-2)^{\frac{1}{3}}. \tag{7}$$

D'autre part, l'équation (1) donne

$$y = x\sqrt{t(2-t)}, \tag{8}$$

ou

$$y = x\sqrt{t(2-t)} = -Ct^{\frac{1}{2}}(t-1)^{-\frac{2}{3}}(2-t)^{\frac{4}{3}}. \tag{9}$$

Il ne serait pas difficile d'éliminer t entre (8) et (7), ce qui donnerait l'équation de la courbe. Mais, c'est inutile pour la construction, car on a x et y en fonction de t. En outre, les dérivées $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dy}{dx}$ sont toutes calculées, en vertu des équations (6) et (2) ; on a

$$\frac{dx}{dt} = x.\frac{t-1}{(1+t)(2-t)} = -Ct^{-\frac{1}{3}}(t-1)(t+1)^{-\frac{5}{3}}(2-t)^{-\frac{2}{3}}. \tag{10}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{p}\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2-t}{t}}\frac{dx}{dt} = Ct^{-\frac{1}{2}}(t-1)(t+1)^{-\frac{5}{3}}(2-t)^{-\frac{1}{6}}, \tag{11}$$

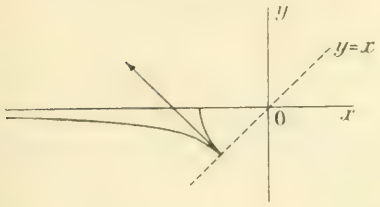
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{p} = -\sqrt{\frac{2-t}{t}}. \tag{12}$$

Remarquons enfin que, d'après (8), t doit rester entre 0 et 2.

De là, on déduit immédiatement le tableau suivant, où l'on suppose $C = 1$:

(1) Cette question a été résolue dans le n° précédent, p. 266.

D'où la courbe ci-contre.



t	0		1		2
x	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	—	$-\frac{1}{\sqrt{4}}$	—	$-\infty$
y	0	—	∞	—	0
$\frac{dx}{dt}$	$-\frac{x}{2}$	+	0	—	$-\infty$
$\frac{dy}{dt}$	$-\infty$	—	0	—	$-\infty$
$\frac{dy}{dx}$	$-\infty$	—	-1	—	0

Il suffit de compléter par symétries pour avoir toute la courbe algébrique.

J. HAAG.

Remarque. — Voici encore une solution fort simple, indiquée dans le tome I des *Exercices d'algèbre, d'analyse et de trigonométrie* de MM. Aubert et Papelier.

Toutes les paraboles considérées sont tangentes aux bissectrices des angles formés par l'axe et la directrice ; si l'on prend ces tangentes comme axes de coordonnées, l'équation générale des paraboles est $x^{\frac{1}{2}} \pm y^{\frac{1}{2}} = C$, et on en déduit aisément que l'équation générale des trajectoires orthogonales est $x^{\frac{3}{2}} \pm y^{\frac{3}{2}} = C$. La construction de ces courbes ne présente alors aucune difficulté.

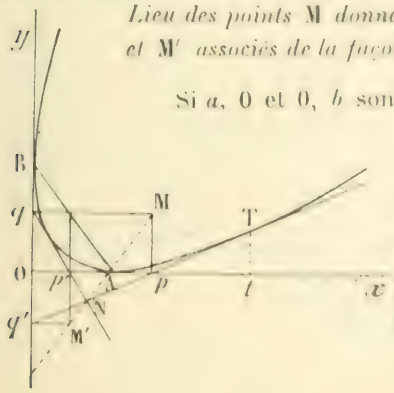
1917. — 1° *Étant donnée une parabole* (P) *tangente aux axes de coordonnées* Ox *et* Oy, *supposés rectangulaires, en* A *et* B, *on considère un point* p *quelconque de* Ox *et la tangente issue de* p *à la parabole autre que* Ox, pT. *On désigne par* t *la projection de* T *sur* Ox ; *montrer qu'à un point* p *correspond en général un point* t *et un seul, et que à un point* t *correspondent deux points* p, p *et* p'. *Le point* p *étant donné, construire* p'. p *et* p' *décrivent une involution.*

2° *On prend un point* M *du plan, projeté sur les axes en* p *et* q. *On mène de* p *et* q *deux tangentes à la parabole* (P) *qui se coupent en* N. *Montrer qu'à un point* M *correspond en général un point* N *et qu'à un point* N *correspondent deux points* M, M *et* M'. M *étant donné, construire* M'. *Cas où* M, M' *sont confondus. Cas où* M *et* N *sont confondus.*

3° *Lieu de* N *si* M *décrit* AB *ou une parallèle à* AB. *Lieu de* M *si* N *décrit* (P). *Trouver des paraboles déduites de* (P) *par translation et telles que le lieu de* M *soit simple si* N *décrit l'une d'elles.*

4° *On prend une hyperbole équilatère* (H) *d'asymptotes parallèles à* Ox *et* Oy, *coupant les axes en deux points situés sur une même parallèle à* AB *et telle de plus qu'elle contienne les deux points* M *et* M'. *Quelles sont les positions successives des hyperboles* (H) *quand* N *décrit* AB *ou une parallèle à* AB ?

5° *On projette un point* M *sur les axes en* p *et* q *et l'on considère la parabole* (P_M) *tangente aux axes de coordonnées en* p *et* q. *Elle admet avec* (P) *une tangente commune* ΔM *différente de* Ox *ou* Oy. *Lieu des points* M *donnant une même droite* Δ_M. *Peut-on trouver sur ce lieu deux points* M *et* M' *associés de la façon indiquée au n° 2 ? Que devient alors le point* N ?



Si a, 0 et 0, b sont les coordonnées de A et B, on sait que l'équation de (P) est

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) + 1 = 0$$

Posons pour simplifier les calculs $x = aX$, $y = bY$; ce qui revient à effectuer une transformation homographique. Le point p pris sur Ox aura une abscisse p_1 et l'on peut poser également $p = aP$. La polaire de ce point a pour équation

$$P(X - Y) - P - (X + Y) + 1 = 0$$

Si l'on en déduit Y, pour avoir l'équation aux X des points de rencontre de cette polaire avec la parabole, on trouve
$$Y = \frac{(P-1)(X-1)}{P+1},$$
et par suite, pour cette équation aux X,
$$[X(P+1)-(P-1)(X-1)]^2 - 2(P+1)[X(P+1)+(P-1)(X-1)] + (P+1)^2 = 0$$
ou, en ordonnant, $X^2 - X(P^2+1) + P^2 = 0$.

Une racine est $X = 1$ comme on devait s'y attendre ; elle redonne le point A ; l'autre, qui est l'abscisse de t, est $X = P^2$, d'où $x = \frac{p^2}{a}$.

A une valeur de p correspond une seule abscisse pour t ; à une abscisse $\frac{p^2}{a}$ correspondent deux valeurs de p égales et de signes contraires p et $p' = -p$. Le point p' se déduit donc du point p par une symétrie par rapport à O. Ces deux points décrivent une involution qui est ici une symétrie.

2° Soient p, q les coordonnées de M ; posons comme ci-dessus $p = aP$, $q = bQ$. La tangente issue de p passe par un point de la parabole d'abscisse $X = P^2$, d'ordonnée
$$Y = \frac{(P-1)(P^2-1)}{P+1} = (P-1)^2.$$

Cette droite, dont on connaît deux points, a par suite pour équation $\frac{X-P}{P^2-P} = \frac{Y}{(P-1)^2}$, ou, en simplifiant, $X(P-1) - YP - P(P-1) = 0$.

De même, pour la tangente issue de q on trouve, $Y(Q-1) - XQ - Q(Q-1) = 0$.

Le point N de rencontre de ces deux droites a pour coordonnées $R = P(1-Q)$, $S = Q(1-P)$, R et S étant liés à l'abscisse et à l'ordonnée r et s de N par les relations $r = aR$, $s = bS$.

A une position de M correspond une seule position de N ; inversement, supposons que l'on se donne N, c'est-à-dire R et S, et cherchons P et Q. Les équations ci-dessus donnent
$$P - R = Q - S = PQ = \alpha,$$
en désignant par α cette valeur commune ; on tire $P = R + \alpha$; $Q = S + \alpha$ avec
$$\alpha = PQ = (R+\alpha)(S+\alpha), \qquad \text{ou} \qquad \alpha^2 + \alpha(R+S-1) + RS = 0.$$

C'est une équation du second degré admettant deux racines α et α'. Il y a donc deux points M et M' ; ayant α et α' on en déduit P, Q et P', Q'. Cherchons comment on peut en déduire M' de M. La droite qui joint ces deux points est en direction
$$\frac{X}{P-P'} = \frac{Y}{Q-Q'} \qquad \text{ou} \qquad \frac{X}{(R+\alpha)-(R+\alpha')} = \frac{Y}{(S+\alpha)-(S+\alpha')}.$$

Les dénominateurs sont les mêmes, donc cette droite est $X = Y$, ou, en revenant aux notations primitives, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$. On peut donc construire aisément cette direction de droite.

En menant par M la parallèle à la médiane du triangle OAB, on a un premier lieu de M'.

Cherchons maintenant les coordonnées du milieu de MM' ; on trouve
$$\frac{P+P'}{2} = \frac{R-S+1}{2}, \qquad \frac{Q+Q'}{2} = \frac{S-R+1}{2}.$$

En ajoutant membre à membre, on en déduit que ce point est sur la droite $X + Y = 1$, qui n'est autre que AB. Donc un second lieu de M' est la droite homothétique de AB par rapport à M dans le rapport 2. Le point M' se construit par l'intersection de deux droites.

On peut remarquer en outre que M, M', N sont trois points en ligne droite. La construction de N résulte immédiatement de la figure.

Si M et M' sont confondus, l'équation en α a une racine double, ce qui donne
$$(R-S)^2 - 2(R+S) + 1 = 0,$$
c'est la parabole (P) qui est alors le lieu de N.

Si M et N sont confondus, on a $R = P$, $S = Q$ et par suite $P = P - PQ$, d'où $PQ = 0$, ce qui donne soit $P = 0$, soit $Q = 0$; on trouve ainsi les deux axes de coordonnées.

3° Si M décrit une parallèle à AB, on a $P + Q = k$. L'élimination de P et Q entre cette relation et

$$R = P(1 - Q), \qquad S = Q(1 - P)$$

donne le lieu de N, de coordonnées R, S. On a $P - Q = R - S$, et $2PQ = R + S - (P + Q) = R + S - k$. En élevant la première équation au carré et ajoutant deux fois la seconde, on trouve le lieu $(R - S)^2 - 2(R + S) + 2k - k^2 = 0$ ou, avec les notations primitives,

$$\left(\frac{r}{a} - \frac{s}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{a} + \frac{s}{b}\right) + 2k - k^2 = 0,$$

parabole déduite de (P) par translation et qui est identique à (P) pour $k = 1$, c'est-à-dire si M décrit AB.

Inversement, supposons que N décrive (P) ou plus généralement une parabole déduite de (P) par une translation parallèle à son axe, parabole que l'on peut définir, comme on le verra facilement, en remplaçant dans (P), X et Y par $X + \alpha$ et $Y + \alpha$:

$$(X - Y)^2 - 2(X + Y) - 4\alpha + 1 = 0.$$

Le lieu du point M s'obtient en remplaçant X par $P(1 - Q)$ et Y par $Q(1 - P)$, ce qui donne

$$(P - Q)^2 - 2(P + Q) + 4PQ + 1 = 4\alpha, \qquad \text{ou} \qquad (P + Q - 1)^2 = 4\alpha.$$

On a deux droites parallèles à AB et réelles ou imaginaires suivant le signe de α. Ce résultat est la réciproque de celui qui a été établi dans le cas où M décrit une parallèle à AB.

4° Avec les coordonnées X et Y déjà définies, l'équation des hyperboles (H) est $XY - mX - nY - p = 0$. En écrivant que les points où elles coupent les axes sont sur une parallèle à AB, on trouve aisément $m = n$. De plus, devant passer par les points M et M', elle doit passer par tous les points communs aux deux hyperboles équilatères $R = X(1 - Y) = X - XY$, $S = Y(1 - X) = Y - XY$, lieux de P, Q déjà donnés. On en déduit que l'hyperbole (H) est $2XY - (X + Y) + R + S = 0$.

Si N décrit une parallèle à AB, l'on a $R + S = k$, et par suite, pour (H), $2XY - (X + Y) + k = 0$; toutes ces hyperboles ont donc mêmes asymptotes et sont homothétiques par rapport à leur centre commun quand R et S varient de façon quelconque ; mais si N décrit une parallèle à AB, l'hyperbole (H) ne change pas. Elle est d'ailleurs réduite à deux droites pour $k = \frac{1}{2}$, ce qui correspond à la droite homothétique de AB par rapport à O dans le rapport $\frac{1}{2}$.

5° La tangente à la parabole (P) issue d'un point d'abscisse α de Ox a pour équation (Voir 2°)

$$\frac{x}{a}\left(\frac{\alpha}{a} - 1\right) - \frac{y}{b}\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha}{a}\left(\frac{\alpha}{a} - 1\right) = 0.$$

Si l'on cherche le point d'ordonnée β où elle coupe Oy, on trouve la relation $\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{b} - 1 = 0$.

On retrouve une propriété connue : si l'on projette un point de la corde des contacts AB, sur OA et OB, la droite joignant les deux projections est une tangente à la parabole, et réciproquement toute tangente à (P) peut être ainsi définie.

Ici, en désignant par p, q les coordonnées de (M), quantités qui jouent pour (P_α) le même rôle que a, b pour (P), on voit que la droite Δ_α doit couper les axes en des points d'abscisse et d'ordonnée α, β, tels que

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} - 1 = 0.$$

Ces deux équations définissent comme on le sait un système unique de valeurs pour α et β. Si la droite Δ_α est fixe, α et β le sont, et p, q décrit la courbe

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} - 1 = 0,$$

ou $xy - \alpha y - \beta x = 0$, hyperbole équilatère passant à l'origine.

En revenant aux coordonnées X, Y, ($x = aX$, $y = bY$), cette équation devient

$$abXY - \gamma bY - \beta aX = 0.$$

Posons, pour la symétrie des notations, $\alpha = aA$, $\beta = bB$, en remarquant que, par suite, on a la condition $A + B = 1$: l'hyperbole lieu de M devient

$$XY - AX - BY = 0.$$

Pour qu'on puisse trouver sur ce lieu deux points M et M', il faut que cette hyperbole puisse appartenir au faisceau des deux hyperboles

$$XY - X + R = 0, \qquad XY - Y + S = 0.$$

En multipliant la première équation par S et en retranchant la seconde multipliée par R, on en déduit par identification :

$$A = \frac{S}{S - R}, \qquad B = \frac{R}{R - S}.$$

qui vérifie bien

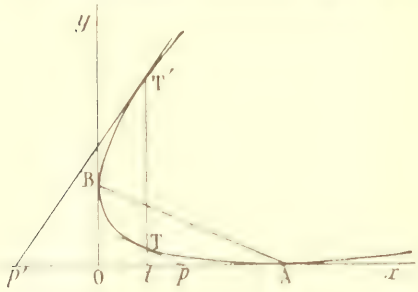
$$A + B = 1.$$

A et B étant connus, on voit que R et S sont soumis à une seule condition; on peut la mettre sous la forme symétrique

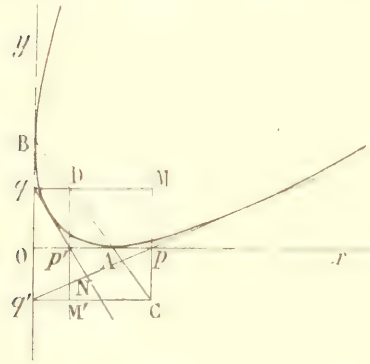
$$AR - BS = 0.$$

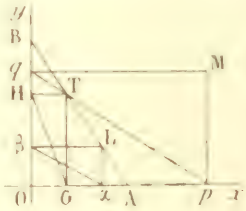
ou, avec les anciennes notations, $\frac{\alpha r}{a^2} + \frac{\beta s}{b^2} = 0$, ce qui exprime que le lieu de N est le diamètre conjugué par rapport à l'ellipse de centre O, de sommets A et B, de la droite joignant l'origine au point de AB qui a pour coordonnées α, β.

Remarques géométriques. — 1° Il est bien évident, d'après la figure même, qu'à un point p ne correspond qu'un point t; mais qu'à un point t correspondent deux points T et T', et par suite deux points p, p', qui forment une involution. Considérons les quatre tangentes fixes à (P) : Tp, T'p', Oy et la droite de l'infini. Le rapport anharmonique qu'elles interceptent sur une tangente quelconque est constant. En prenant la tangente infiniment voisine de Oy et remarquant que TT' est parallèle à Oy, on en déduit que ce rapport est -1. Donc si nous coupons par Ox tangente à (P) on voit que O est le milieu de pp', ce qui montre que l'involution de ces deux points est une symétrie.



2° La figure montre immédiatement qu'à un point M correspond un seul point N et à un point N deux points M. Si l'on remarque que toute tangente à P, pq', est telle que p et q' soient les projections sur les axes d'un point C de AB, on voit que MCM'D est un rectangle dont AB est une diagonale ; on en déduit immédiatement la construction de M' connaissant M, telle qu'elle a été donnée ci-dessus. On sait de plus que, dans un rectangle tel que MCM'D, les trois diagonales de MCM'D, pCq'O et qOp'D sont concourantes; donc N est sur MM'.





Si M et M' sont confondus, ils sont sur AB, et p, p' sont confondus ainsi que q, q'. Les deux tangentes pq', $p'q$ étant confondues, leur point de rencontre est leur point de contact ; donc N décrit (P).

Si M et N sont confondus, pM et pN étant confondus, pN est une tangente verticale à (P). On trouverait de même la tangente horizontale à (P), résultats déjà obtenus par le calcul.

3° On sait que si l'on projette un point quelconque L de AB sur les axes en α et β, la droite $\alpha\beta$ est tangente à la parabole bitangente aux axes en A et B. De même pour tout point de la droite pq. Si donc on veut une tangente commune autre que les axes, ou la droite de l'infini, aux deux paraboles de l'énoncé, il suffira de prendre le point de rencontre de AB et pq, T, et de le projeter sur les axes, en G, H. GH est Δ_M.

Si cette droite est fixe, T l'est aussi, et par suite pq passe par un point fixe T. On en déduit qu'il y a correspondance homographique entre p et q, et que par suite M décrit une hyperbole équilatère de directions asymptotiques Ox, Oy.

A. S. L.

Bonnes solutions : MM. J. Ottenheimer, lycée de Nancy ; G. Fouchy, à Reims ; P. Villain ; Dolidez ; Ch. Guillemot ; R. Dontot, élève de l'Ecole normale supérieure ; G. Lach à Rodez ; A. Courtois ; Jambert ; J. Soubaigne.

MÉCANIQUE

1918. — 1° *On considère un point* M *mobile dont la trajectoire est la cubique gauche* Γ, $x = at$, $y = bt^2$, $z = ct^3$, a, b, c *étant les coordonnées d'un point* P *fixe et* t *désignant le temps. On suppose* a, b, c *positifs et non nuls. On suppose dans la suite que le point* P *reste sur une surface* (S) *telle que pour les valeurs ainsi définies de* a, b, c, *le vecteur-vitesse en chaque point de* Γ *fasse un angle constant, que l'on calculera, avec une droite* Δ *convenablement choisie.*

P *étant fixe, étudier en chaque point de* Γ *la vitesse. Hodographe. (On déterminera en vraie grandeur les éléments de l'hodographe.)*

2° *Calculer en chaque point de* Γ *l'accélération totale et l'accélération tangentielle du mobile. Déduire de leur comparaison le rayon de courbure de* Γ. *Variations de ce rayon de courbure.*

3° *A chaque point* P *de* S *correspond un certain mouvement.* P *étant supposé arbitraire sur* S, *y a-t-il un nombre fini ou infini de mouvements faisant passer le point* M *par un point* Q *donné de l'espace (deux mouvements distincts pouvant d'ailleurs correspondre à une même trajectoire). Discuter suivant la position de* Q.

4° *Étant donné un point* Q *on considère le mouvement qui fait passer* M *en* Q *au temps* t', *le temps* 0 *correspondant au passage du mobile à l'origine. On suppose que ce mobile quitte sa trajectoire en* Q *suivant la tangente avec une vitesse uniforme égale précisément à sa vitesse au passage par* Q. *Lieu des points* Q′ *occupés dans cette hypothèse par le mobile au temps* $t' + 1$ *quand* Q *occupe toutes les positions possibles (On suppose que* t' *a une valeur fixe donnée).*

1° Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la direction cherchée : l'angle V de la tangente à Γ avec cette direction est donné par

$$\cos^2 V = \frac{(a\alpha + 2bt\beta + 3ct^2\gamma)^2}{a^2 + 4b^2t^2 + 9c^2t^4}.$$

Ce rapport doit être indépendant de t ; en particulier les termes en t et t^3 doivent disparaître au numérateur, ce qui donne, a, b, c ne pouvant pas être nuls, $\alpha = \gamma = 0$, ou $\beta = 0$. La première hypothèse ne convient pas. La seconde donne, en écrivant que les divers coefficients sont proportionnels au numérateur et au dénominateur,

$$\alpha^2 = \frac{6ac\alpha\gamma}{4b^2} = \gamma^2.$$

On a $\alpha = \gamma$, ou $\alpha = -\gamma$. Mais a, b, c devant être positifs, on en déduit $\alpha = \gamma$, ce qui fixe la direction demandée et l'angle V (45°) ; on trouve en outre la condition

$$3ac = 2b^2,$$

équation d'un cône qui est le lieu cherché de P. P étant sur ce cône (S), toute la cubique Γ y est également, comme on le vérifie aisément.

La vitesse en un point de Γ est donnée par $X = a$, $Y = 2bt$, $Z = 3ct^2$. L'hodographe est la parabole du plan $X = a$, d'équation $Y^2 = \frac{4b^2}{3c} Z$ ou $Y^2 = 2aZ$.

Le paramètre est a.

La grandeur de ce vecteur vitesse est donnée par

$$v^2 = a^2 + 4b^2t^2 + 9c^2t^4 = (a + 3ct^2)^2$$

ou, en valeur absolue, $v = a + 3ct^2$; on étudierait sans peine les variations de la vitesse.

2° L'accélération totale est donnée par $A^2 = 4b^2 + 36c^2t^2$. L'accélération tangentielle est $6ct$, et par suite l'accélération normale est $2b$. Comme elle est égale d'autre part à $\frac{v^2}{R}$, on en déduit

$$R = \frac{1}{2b}(a + 3ct^2)^2.$$

On en déduit immédiatement les variations de ce rayon de courbure.

3° Cherchons si le point Q (α, β, γ) de l'espace peut être atteint par un des mouvements considérés au bout d'un certain temps θ, l'origine du mouvement étant un point P(a, b, c) à déterminer. On doit avoir $\alpha = a\theta$, $\beta = b\theta^2$, $\gamma = c\theta^3$, d'où l'on tire

$$a = \frac{\alpha}{\theta}, \qquad b = \frac{\beta}{\theta^2}, \qquad c = \frac{\gamma}{\theta^3}.$$

Si l'on exprime que P doit être sur (S) on en déduit $2\beta^2 = 3\alpha\gamma$, qui exprime que Q doit être aussi sur (S), ce qui est évident si l'on remarque que toutes les cubiques sont sur (S). Si ceci a lieu, on voit qu'il y a une infinité de valeurs de a, b, c répondant à la question : il suffit de donner à θ une valeur arbitraire. Mais toutes ces trajectoires sont les mêmes, car, en posant $\theta = \frac{1}{t}$, on voit que P est sur la cubique gauche $x = \alpha t$, $y = \beta t^2$, $z = \gamma t^3$, trajectoire commune à tous les mouvements, qui ne diffèrent donc que par la loi suivant laquelle elle est parcourue.

4° Il suffit de prendre dans le calcul ci-dessus $\theta = t'$ pour avoir les valeurs de a, b, c cherchées ; la loi du mouvement est alors, en tenant compte de ces valeurs de a, b, c,

$$x = at = \alpha\frac{t}{t'}, \qquad y = bt^2 = \beta\frac{t^2}{t'^2}, \qquad z = ct^3 = \gamma\frac{t^3}{t'^3}.$$

Au temps t', le vecteur vitesse est $\frac{\alpha}{t'}$, $\frac{2\beta t}{t'^2} = \frac{2\beta}{t'}$, $\frac{3\gamma t^2}{t'^3} = \frac{3\gamma}{t'}$. Au temps $t' + 1$, les coordonnées du point seront $x = \alpha + \frac{\alpha}{t'}$, $y = \beta + 2\frac{\beta}{t'}$, $z = \gamma + \gamma\frac{3}{t'}$, de la forme $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$.

L'élimination de α, β, γ entre ces relations et $2\beta^2 = 3\alpha\gamma$ donne le lieu

$$2ACy^2 = 3B^2xz,$$

équation d'un cône analogue au premier, ou, en développant,

$$2(t' + 1)(t' + 3)y^2 = 3(t' + 2)^2xz,$$

que l'on peut écrire

$$t'^2(2y^2 - 3xz) + 4t'(2y^2 - 3xz) + 6(y^2 - 2xz) = 0.$$

L'enveloppe est, pour ce cône,

$$4(2y^2 - 3xz)^2 - 6(2y^2 - 3xz)(y^2 - 2xz) = 0,$$

qui se décompose en deux :

$$2y^2 = 3xz \qquad \text{et} \qquad y^2 = 0.$$

On trouve un plan tangent fixe (ce que l'on peut vérifier immédiatement) et la surface (S) à laquelle ce cône est tangent. Il y a d'ailleurs deux génératrices de contact fixes, qui sont les axes Ox et Oz.

A. S. L.

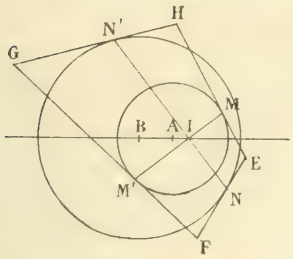
Bonnes solutions : MM. A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; G. Lach, à Rodez ; L. Perrin, à Trévoux ; Ch. Guillerme ; J. Soubaigné, à Mont-de-Marsan ; A. Courtois ; Jambert, à Saint-Étienne ; P. Villain ; J. Ottenheimer.

CONCOURS DE 1911 *(Suite.)*

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires (1).

1° Si l'on mène à une ellipse (C) de centre C deux cercles bitangents, l'un (A) ayant son centre A sur l'axe focal, l'autre (B) ayant son centre B sur l'axe non focal, le point d'intersection I des cordes de contact MM′ et NN′ est un point limite pour le système des deux cercles. (On demande aux candidats une démonstration indépendante de la théorie des pôles et polaires dans les coniques ; s'ils emploient l'équation de la droite AB, rapportée aux axes de l'ellipse, pour montrer d'abord que le point I est sur cette droite, ils établiront géométriquement les formules qui expriment $\overline{CA}$ et $\overline{CB}$ au moyen des coordonnées $\overline{CP}$ et $\overline{CQ}$ du point I. Ils pourront donner *subsidiairement* une démonstration fondée sur la théorie des pôles et polaires dans les coniques).



2° On donne deux cercles (A) et (B), de centres A et B, dont l'un (A) est intérieur à l'autre ; soit I celui des deux points limites du faisceau (A, B) qui est intérieur aux deux cercles. (Ce choix du point I a pour but d'écarter une discussion que les candidats n'auraient pas le temps de faire convenablement).

Si l'on mène par I deux cordes rectangulaires MM′ et NN′ appartenant respectivement aux deux cercles, il existe une ellipse (C) doublement tangente aux deux cercles, les cordes de contact étant MM′ et NN′ ; le démontrer. Les cordes variant, les pôles R et S de ces cordes sont sur une droite fixe Δ perpendiculaire à la droite AB en un point J ; les circonférences qui ont pour diamètres les segments RS sont orthogonales à la circonférence de diamètre AB qui est le lieu des centres des ellipses (C) ; les carrés a^2 et b^2 des demi-axes des ellipses (C) sont, les uns et les autres, proportionnels aux distances CD des centres C à la droite Δ : les ellipses (C) sont, par suite, semblables entre elles.

3° Les données restant les mêmes, les tangentes en M et M′ sont rencontrées par les tangentes en N et N′ aux points E, F, G, H. Désignant par λ l'angle que fait IM avec le prolongement de BA, on établira les *six* relations qui déterminent en fonction des constantes de la figure $\left(r,\ R,\ \frac{IA}{r} = A,\ \frac{IB}{R} = B\right)$ et du paramètre λ les éléments essentiels du quadrilatère IMEN, à savoir les angles $IME = \alpha$, $INE = \beta$, les côtés IM et IN, les côtés EM et EN ; les deux dernières de ces relations sont

$$EM \sin\alpha + EN \cos\beta = \frac{R \sin(\beta - \lambda)}{\cos\lambda},$$

$$EM \cos\alpha + EN \sin\beta = \frac{-r \cos(\alpha + \alpha)}{\sin\lambda}.$$

Vérifier au moyen de ces relations l'égalité $\frac{EM}{EN} = \frac{B}{A}$, et en déduire que le quadrilatère EFGH reste inscrit à un cercle fixe (O) du faisceau (A, B) lorsque les cordes MM′ et NN′ varient. On déterminera la position du centre O de ce cercle en fonction des longueurs IA, IB, JA, JB, JI, en calculant successivement $\frac{OA}{OB}$, OA, OB ; on calculera aussi la distance JO, on interprétera géométriquement la formule obtenue, et l'on en déduira une conséquence pour les circonférences décrites sur les segments RS comme diamètres.

Comparant deux expressions différentes de la valeur du rapport $\frac{ME}{MH}$ en fonction des quantités IE, IH, $\widehat{MIE} = \gamma$, $\widehat{MIH} = \delta$, on obtiendra $\gamma = \delta$, et on interprétera ce résultat en considérant les diagonales EG et FH. De quelle nature est la correspondance entre les droites EG et FH ?

Mathématiques spéciales.

1968. — On considère dans un plan la parabole (P) et la droite (D) dont les équations sont, en coordonnées rectangulaires,

$$y^2 - 2px = 0, \qquad y - a = 0.$$

(1) Des solutions étudiées de la question de mathématiques élémentaires sont publiées dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*.

1. Une droite variable (Δ), issue de l'origine O, rencontre (P) en un point A et (D) en un point B ; trouver le lieu (C) des points M et M′ symétriques par rapport à l'origine et conjugués harmoniques par rapport à A et B, M étant supposé constamment entre A et B.

Les tangentes en M et M′ à (C) rencontrent respectivement en I et I′ la tangente en A à (P) ; construire le lieu (Γ) des points I et I′ et distinguer sur ce lieu les arcs qui correspondent à I des arcs qui correspondent à I′.

Construire les tangentes en M à (C) et en I à (Γ).

2. D'un point I de (Γ) on peut mener à (C) trois tangentes, chacune d'elles rencontrant (C) en un point autre que le point de contact ; montrer que les tangentes à (C) aux trois points ainsi définis concourent en un point J dont on exprimera les coordonnées en fonctions de celles de I ; reconnaître si les tangentes menées de I ou de J à (C) sont réelles.

Du point I on mène à (P) une tangente autre que IA ; soit T son point de contact ; du point I on mène à (C) deux tangentes autres que IM ; soient T_1 et T_2 les points, autres que les points de contact, où elles rencontrent (C) ; trouver le lieu du centre de gravité du triangle TT_1T_2.

3. Par l'origine, on mène deux droites également inclinées sur les axes et rencontrant une tangente en un point M de (C) en des points Q et Q′ ; l'axe OY rencontre cette même tangente en R ; trouver le lieu des points Q et Q′ tels que la somme des inverses des longueurs OQ, OQ′ soit égale à l'inverse de la longueur OR.

Ce lieu comprend une partie d'une branche d'une courbe algébrique ; trouver l'aire comprise entre cette branche et son asymptote.

Calcul différentiel et intégral.

1. Soit Δ une droite donnée, O un point fixe sur cette droite.

Déterminer les surfaces S telles que la trace du plan tangent en un point quelconque M, sur le plan ΔOM, coupe le rayon vecteur OM sous un angle donné α.

La recherche des surfaces S se ramène à l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles E ; indiquer comment on peut engendrer les surfaces S à l'aide d'une caractéristique choisie de cette équation.

2. Les surfaces Σ qui coupent les rayons vecteurs issus d'un point donné O sous un angle donné α sont les intégrales d'une équation F aux dérivées partielles du premier ordre.

1° L'équation F admet-elle des surfaces S comme solutions particulières ?

2° Déterminer les surfaces Σ.

Comment une surface Σ peut-elle être engendrée à l'aide d'une caractéristique choisie, par seul déplacement du plan de cette courbe ? Quelles sont ses lignes de courbure ?

3° Une surface Σ déterminée peut être engendrée d'une infinité de façons comme enveloppe de surfaces S ou Σ particulières.

On peut toujours choisir la famille d'enveloppées de telle sorte qu'en tout point de contact l'enveloppe et l'enveloppée aient mêmes centres de courbure principaux.

4° Toute surface Σ peut être obtenue comme intégrale commune à l'équation F et à une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre dont l'origine est analogue à celle de l'équation E.

Mécanique.

Une boule pesante rencontre le sol supposé horizontal. On demande d'étudier son mouvement ultérieur à partir du moment où la boule touche le sol.

1. On supposera la boule sphérique et homogène. On négligera la résistance de l'air et les frottements de roulement et de pivotement. On admettra l'hypothèse de Newton d'après laquelle la composante verticale de la vitesse du point M de la boule qui vient en contact avec le sol se trouve multipliée immédiatement après la rencontre avec le sol par un facteur négatif $(-e)$, qui ne dépend que de la nature des surfaces en contact, avec $0 < e < 1$.

2. La discussion devra mettre surtout en évidence s'il y a glissement ou non glissement dans les contacts. Elle montrera que la forme de la trajectoire du centre c de la boule dépend essentiellement (pour des substances données) de l'angle aigu θ_1 de la verticale descendante avec la vitesse initiale du point M *fixe sur la boule,* qui vient en contact avec le sol.

3. On appellera m la masse de la boule, ρ son rayon, f le coefficient de frottement de glissement de la boule contre le sol. On prendra comme origine des axes fixes la position initiale o du centre c de la boule quand elle arrive au sol et comme axe oz une verticale ascendante. On appellera α_1, β_1, γ_1, p_1, q_1, r_1 les projections de la vitesse de c et de la vitesse angulaire de rotation instantanée de la boule au moment où elle touche

le sol ; α'_1, β'_1, γ'_1, p'_1, q'_1, r'_1 les valeurs de ces projections après la rencontre ; v_1 et v'_1 les valeurs initiale et finale, au moment de la rencontre avec le sol, de la composante horizontale de la vitesse du point M, $\left[\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{v_1}{(-\gamma_1)}\right]$.

Comme application de la discussion, on pourra indiquer, en supposant $e = \frac{1}{2}$, $f = \frac{2}{7}$, les formes de la trajectoire de c pour $\operatorname{tg}\theta_1 = 1$, $\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{5}{2}$ ou $\operatorname{tg}\theta_1 = 4$. On pourra aussi examiner le cas où $\beta_1 = p_1 = 0$, $\operatorname{tg}\theta_1 < \frac{3}{2}$ et $\left(v_1 - \frac{7}{2}\alpha_1\right)$ nul ou très petit.

QUESTIONS PROPOSÉES

1969. — Démontrer que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & (\alpha-\beta)^4 & (\alpha-\gamma)^4 & (\alpha-\delta)^4 \\ (\alpha-\beta)^4 & 0 & (\beta-\gamma)^4 & (\beta-\delta)^4 \\ (\alpha-\gamma)^4 & (\beta-\gamma)^4 & 0 & (\gamma-\delta)^4 \\ (\alpha-\delta)^4 & (\beta-\delta)^4 & (\gamma-\delta)^4 & 0 \end{vmatrix}$$

est divisible par le carré du déterminant de Vandermonde

$$V = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \beta & \beta^2 & \beta^3 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 \\ 1 & \delta & \delta^2 & \delta^3 \end{vmatrix}.$$

Trouver le quotient.

Démontrer que ce quotient a un signe constant et qu'il ne s'annule que lorsque trois des quatre quantités α, β, γ, δ sont égales. Ch. Biehler.

1970. — On considère la surface

(S) $$c^2z^2 = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2).$$

1° On demande de déterminer ses lignes asymptotiques et de faire voir qu'on peut exprimer x^2, y^2, z^2 en fonctions rationnelles de paramètres α, β tels que α reste constant sur chaque ligne asymptotique de la première famille et β sur chaque ligne de la seconde famille.

2° Quand un point M décrit une ligne asymptotique de (S), le plan tangent en M est également tangent au cône de sommet M d'un complexe tétraédral. Ce complexe varie quand on change de ligne asymptotique, mais le tétraèdre du complexe ne varie pas : il est formé des trois plans de coordonnées supposés rectangulaires et du plan de l'infini. E. Kerayal.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

1924. — 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$y''(1 + x)(1 - 2x) - 2xy' - 2y + 2 = 0$$

par les séries et trouver ainsi toutes les fonctions y qui satisfont à cette équation et sont nulles pour $x = 0$.

2° *Déterminer celle de ces fonctions y qui est minimum pour $x = 0$ et maximum pour $x = 1$.*

Étudier les variations de cette fonction. Calculer l'ordonnée du maximum et la racine positive de cette fonction avec l'approximation que comportent les tables de logarithmes.

Posons $$y' = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots;$$
nous aurons
$$y'' = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots, \qquad y''' = 2a_2 + 3.2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots$$

En écrivant l'identité $$y'''(2x^2 + 3x + 1) - 2xy'' - 2y' - 2 = 0.$$
nous aurons d'abord $$-2a_0 + 2a_2 - 2 = 0,$$
d'où $$a_2 = a_0 - 1,$$
puis $$6a_3 + 6a_2 + 2a_1 - 2a_1 = 0, \qquad a_3 = -a_2,$$
et, d'une façon générale,
$$2n(n-1)a_n + 3(n-1)na_{n+1} + (n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n - 2a_n = 0.$$

Or nous avons $a_3 = -a_2$; si nous admettons que de même $a_4 = -a_3$, ... etc., $a_{n+1} = -a_n$, cette égalité deviendra
$$3n(n+1)a_{n+1} - 2n(n-1)a_{n+1} - 2na_{n+1} + 2a_{n+1} + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0,$$
ou $$(n^2 + 3n + 2)a_{n+1} + (n+2)(n-1)a_{n+2} = 0.$$

Nous avons donc aussi $a_{n+2} = -a_{n+1}$, et cette relation est générale à partir de a_3. Le développement de y' est donc
$$y' = a_0 + a_1x + (a_0 - 1)(x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots), \qquad y' = 1 + Ax + B(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots).$$

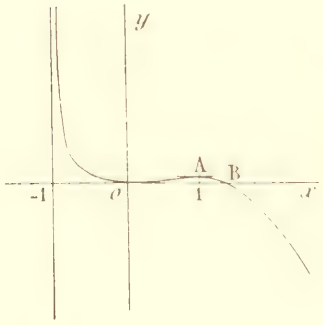
Les fonctions y' sont donc $$y' = 1 + Ax + \frac{B}{1+x}.$$
et les fonctions y demandées, $$y = x + \frac{Ax^2}{2} + BL(1+x).$$

Pour que y soit minimum pour $x = 0$ et maximum pour $x = 1$, il faut que la dérivée soit nulle pour 0 et 1, ce qui donne $B = -1$ et $1 + A + \frac{B}{2} = 0$, $A = \frac{1}{2}$. La fonction y demandée est donc $y = x - \frac{x^2}{4} - L(1+x)$, et sa dérivée est $y' = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{1+x}$, nulle pour $x = 0$ et pour $x = 1$.

De -1 à 0 cette fonction décroît depuis $+\infty$ jusqu'à 0; ensuite elle croît jusqu'à $\frac{3}{4} - L2$, valeur qu'elle atteint pour $x = 1$; puis elle décroît constamment, quand x varie de 1 à $+\infty$. Pour $x = +\infty$, y prend une forme indéterminée.

Mais cette indétermination est facile à lever, car on sait que le logarithme croît infiniment moins vite que le nombre; donc y devient infini comme le terme $-\frac{x^2}{4}$. Par conséquent y devient égal à $-\infty$ et la courbe a une branche parabolique dans la direction négative de oy.

Il est dès lors aisé de figurer cette fonction et de construire la courbe représentative. On remarquera que l'ordonnée est petite au point maximum et pour tous les points compris entre 0 et 1.



La racine est comprise entre 1 et 2; car pour $x = 2$, on a $y = 1 - L3$ et $L3$ est plus grand que 1.

Pour faire les calculs numériques, on remarquera que
$$\log x = Lx \,.\, \log e, \qquad \text{donc} \qquad Lx = \frac{\log x}{\log e}.$$
On trouve ainsi
$$L2 = \frac{0{,}30103}{0{,}43429} = 0{,}69315 \qquad \text{et} \qquad \frac{3}{4} - L2 = 0{,}05685;$$
c'est l'ordonnée du maximum.

En appliquant trois fois la méthode de Newton aux nombres 2, 1,704 et 1,629, on arrive finalement à 1,623 pour valeur approchée de la racine.

Bonnes solutions : MM. A. Courtois, 147e d'infanterie à Sedan ; R. Théry, lycée de Nantes ; M. Nicolas, à Lille ; J. Ottenheimer, lycée de Nancy ; Wladimir Sturtz, à Nice ; G. Lach, à Denain ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1908. — *Soient* M *un point quelconque d'une ellipse de centre* O, Δ *la perpendiculaire élevée en* M *à* OM, P *et* Q *les points où les parallèles menées par* O *à la tangente et à la normale en* M *rencontrent* Δ.

Construire les courbes lieux de P *et de* Q. *L'aire de la courbe* Q *est la somme des aires de l'ellipse donnée et de sa développée.*

1. Considérons l'ellipse de centre O rapportée à ses axes. Tout point M de cette ellipse a pour coordonnées

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi,$$

a et b étant les longueurs des demi-axes et φ l'anomalie du point. La perpendiculaire Δ au rayon OM a pour équation

$$y - b\sin\varphi = -\frac{a\cos\varphi}{b\sin\varphi}(x - a\cos\varphi)$$

ou (1) $$by\sin\varphi + ax\cos\varphi - a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi = 0.$$

D'ailleurs la parallèle menée par O à la tangente en M à l'ellipse a pour équation

(2) $$\frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\sin\varphi}{b} = 0.$$

On aura l'équation du lieu de leur intersection en éliminant φ entre (1) et (2). En tirant de ces équations $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ et ajoutant la somme des carrés, on trouve, après transformations,

$$(a^2 - b^2)^2x^2y^2(a^2y^2 + b^2x^2) - (a^2y^2 + b^2x^2)^2 = 0.$$

Le lieu cherché est ainsi une courbe du sixième ordre ayant pour directions asymptotiques doubles les axes et pour asymptotes imaginaires celles de l'ellipse. D'autre part le lieu comporte à l'origine un point quadruple isolé à tangentes imaginaires et confondues deux à deux.

Pour construire ce lieu, nous nous servirons des valeurs de x et de y, en fonction du paramètre variable φ. On trouve, après diverses transformations,

$$x = a\cos\varphi + \frac{ab^2}{(a^2 - b^2)\cos\varphi}, \qquad y = b\sin\varphi - \frac{a^2b}{(a^2 - b^2)\sin\varphi}.$$

Sur les équations de la courbe, nous reconnaissons immédiatement des symétries par rapport aux axes. Il nous suffira donc de construire les points de la courbe qui sont dans un des quadrants. On fera, par exemple, varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Dérivons x et y par rapport à φ pour avoir le sens de la variation :

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a\sin\varphi + \frac{ab^2\sin\varphi}{(a^2 - b^2)\cos^2\varphi} = a\sin\varphi\left(-1 + \frac{b^2}{(a^2 - b^2)\cos^2\varphi}\right),$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = b\cos\varphi + \frac{a^2b\cos\varphi}{(a^2 - b^2)\sin^2\varphi} = b\cos\varphi\left(1 + \frac{a^2}{(a^2 - b^2)\sin^2\varphi}\right).$$

Il est visible sur ces équations que y' ne peut pas s'annuler sauf pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Quant à x', il

s'annule pour $\varphi = 0$ et pour une autre valeur si $\frac{b^2}{a^2 - b^2} < 1$, ou $b^2 < a^2 - b^2$, ou $b\sqrt{2} < a$.

On a donc les tableaux suivants où φ_0 désigne la valeur de φ qui annule x' :

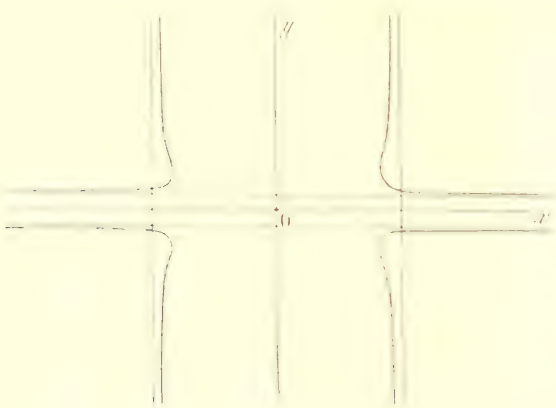
φ	x'	y'	x	y
0	0	$+\infty$	$\frac{a^3}{a^2 - b^2}$	$-\infty$
	—		décr.	
φ_0	0	+	$\frac{ab}{c}$	cr.
	+		cr.	
$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$	0	$+\infty$	$\frac{-b^3}{a^2 - b^2}$

$b\sqrt{2} < a$.

φ	x'	y'	x	y
0	0	$+\infty$	$\frac{a^3}{a^2 - b^2}$	$-\infty$
	+		cr.	cr.
$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$	0	$+\infty$	$\frac{-b^3}{a^2 - b^2}$

$b\sqrt{2} > a$.

On en déduit les deux formes correspondantes de courbes figurées ci-dessous.



2. Cherchons maintenant le lieu du point d'intersection de la droite Δ d'équation

$$ax \cos\varphi + by \sin\varphi - a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi = 0$$

avec la parallèle menée par O à la normale en M, soit la droite

$$\frac{x \sin\varphi}{b} - \frac{y\cos\varphi}{a} = 0.$$

En éliminant φ par un procédé analogue à celui employé dans la première partie de la question, on trouve l'équation

$$(a^2x^2 + b^2y^2)^3 - (a^2x^2 - b^4y^2)^2 = 0.$$

La courbe Q est encore une courbe du sixième ordre à directions asymptotiques imaginaires triples, à point quadruple isolé à l'origine, et symétrique par rapport aux deux axes.

Pour la construire d'une manière précise, tirons x et y en fonction de l'angle variable φ. Nous trouvons, après calculs,

$$x = \frac{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)\cos\varphi}{a}, \qquad y = \frac{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)\sin\varphi}{b}.$$

Nous ferons varier φ comme précédemment, de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Nous aurons

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{1}{a}(-3a^2\cos^2\varphi\sin\varphi - b^2\sin^3\varphi + 2b^2\sin\varphi\cos^2\varphi),$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{b}(3b^2\sin^2\varphi\cos\varphi - a^2\cos^3\varphi - 2a^2\sin^2\varphi\cos\varphi),$$

ou

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{1}{a}\sin\varphi(2b^2 - 3a^2\cos^2\varphi - 3b^2\sin^2\varphi), \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{b}\cos\varphi(3b^2\sin^2\varphi + 3a^2\cos^2\varphi - 2a^2),$$

ou enfin

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{1}{a}\sin\varphi[3(a^2 - b^2)\cos^2\varphi + b^2], \qquad \frac{dy}{d\varphi} = +\frac{1}{b}\cos\varphi(-3(a^2 - b^2)\sin^2\varphi + a^2).$$

Il est visible sur ces équations que x' ne peut s'annuler que pour $\varphi = 0$. Quant à y' il ne peut s'annuler que si $\cos\varphi = 0$ ou pour une valeur intermédiaire entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, si

$$a^2 < 3(a^2 - b^2), \qquad \text{ou} \qquad 2a^2 > 3b^2, \qquad \text{ou enfin} \qquad a\sqrt{2} > b\sqrt{3}.$$

On a selon ces deux cas les tableaux suivants :

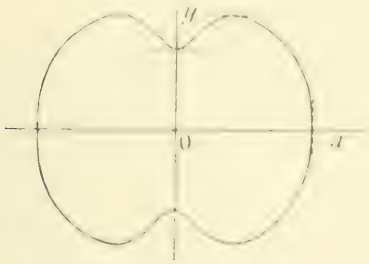
φ	x'	y'	x	y
0	0	$\frac{a^2}{b}$	a	0
		+		cr.
φ_0	—	0	décr.	Max.
		—		décr.
$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{b^2}{a}$	0	0	b

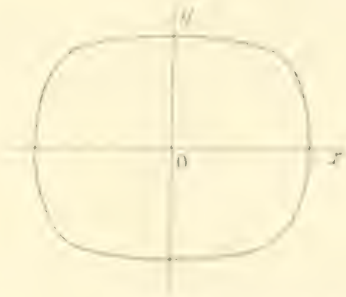
$a\sqrt{2} > b\sqrt{3}$.

φ	x'	y'	x	y
0	0	$\frac{a^2}{b}$	a	0
	—	+	décr.	cr.
$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{b^2}{a}$	0	0	b

$a\sqrt{2} < b\sqrt{3}$.

On en déduit les deux formes correspondantes de courbes suivantes :





3. Démontrons que l'aire de cette dernière courbe est la somme de l'aire de l'ellipse donnée et de sa développée. Nous évaluerons les aires dans le premier quadrant.

L'aire de la courbe précédente est déterminée par $S = \frac{1}{2}\int_0^{x_0} x\,dy - y\,dx$.

Or, après des calculs faciles, on trouve $xdy - ydx = \frac{1}{ab}(a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi)^2$.

L'intégration se fait sans difficulté en la ramenant au calcul de l'intégration des sinus et cosinus des multiples de φ; on trouve

$$S = \frac{\pi}{16ab}\left[\frac{3}{2}(a^4 + b^4) + a^2b^2\right].$$

D'ailleurs les équations paramétriques de la développée de l'ellipse sont

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3\varphi, \qquad y = \frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3\varphi.$$

On en déduit l'aire du quart de cette courbe par une intégrale facile à calculer, et on trouve

$$S' = \frac{3\pi}{32ab}(a^2 - b^2)^2.$$

D'autre part, l'aire du quart de l'ellipse est $S'' = \frac{\pi}{4}ab$.

On constate alors que $S = S' + S''$. C. Q. F. D.

P. CHANGEY, à Dijon.

Bonnes solutions : MM. A. Courtois, à Sedan ; G. Oliier ; A. Marescalchi ; P. Villain ; D. Clement ; L. Naulette ; G. Lach ; A. Rousseau ; Jambert ; L. Perrin ; R. Théry, à Nantes ; M. Nicolas ; J. Ottenheimer ; Jan de Peyrax ; L. Simon ; J. Soubaigne ; J. Dessirier.

QUESTIONS PROPOSÉES

1971. — Démontrer que les cercles conjugués aux quatre triangles formés par les côtés d'un quadrilatère complet font partie d'un faisceau de cercles conjugué du faisceau déterminé par les cercles décrits sur les trois diagonales comme diamètres, et que les points communs à ces quatre cercles sont les centres des deux hyperboles équilatères inscrites dans le quadrilatère considéré.

J. G. Nicolesco.

1972. — On considère le cercle C tangent en un point M d'une ellipse et qui passe par le centre O de cette ellipse. Trouver les lieux suivants avec leurs aires :

1° Lieu du centre C de ce cercle ;

2° Lieu du point de rencontre P de MC avec le cercle C ;

3° Enveloppe de la corde d'intersection QS du cercle C et de l'ellipse ;

4° Lieu du milieu de QS ;

5° Lieu de la projection de O sur QS ;

6° Lieu du pôle de QS par rapport à l'ellipse ;

7° Lieu du point de rencontre de QS avec OM ;

8° Du point C on abaisse les trois autres normales à l'ellipse dont les pieds forment un triangle Δ. Lieux du centre de gravité, du centre du cercle circonscrit, de l'orthocentre et du centre du cercle des neuf points de Δ ;

9° De P on abaisse les trois autres normales à l'ellipse dont les pieds forment le triangle Δ'. Trouver les mêmes lieux que ceux du triangle Δ.

Dr. Werner Gaedecke.

1973. — Deux barreaux aimantés B_1 et B_2, fixés parallèlement et suspendus horizontalement à un fil sans torsion, oscillent sous l'action de la terre avec une durée d'oscillation de 3 secondes. On retourne l'un d'eux bout pour bout; la durée d'une petite oscillation devient 5 secondes. Enfin on les croise à angle droit; quelle est la nouvelle durée d'oscillation du système ?

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

22e Année. — No 1. Octobre 1911.

PREMIÈRE PARTIE

SUR L'IDENTITÉ $fu + gv = 1$

par M. G. Fontene.

Théorème de Bezout. — *Si deux polynomes $f(x)$ et $g(x)$ sont premiers entre eux, il existe un polynome u de degré inférieur à celui de g et un polynome v de degré inférieur à celui de f tels que l'on ait l'identité*

$$fu + gv \equiv 1.$$

Soit par exemple $f = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, $g = b_0x^2 + b_1x + b_2$.

Le résultant R, pris sous la forme donnée par la méthode de Sylvester, est

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

l'ordre du déterminant étant $3 + 2$. Si l'on remplace chaque élément de la dernière colonne par la somme des produits obtenus en multipliant les éléments correspondants des colonnes successives par x^4, x^3, x^2, x, 1, on a

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & x^2f \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & xf \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & x^2g \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & xg \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & g \end{vmatrix},$$

ou

$$fU + gV = R, \qquad f\frac{U}{R} + g\frac{V}{R} = 1,$$

U et V étant des degrés 1 et 2.

D'une manière générale, si les polynomes f et g sont des degrés m et n, l'ordre du déterminant est $m + n$, et les multiplicateurs sont $x^{m+n-1}, \ldots$; le polynome U qui multiplie f est donc du degré $n - 1$, le polynome V qui multiplie g est du degré $m - 1$.

Les polynomes qui figurent dans la dernière colonne du déterminant sont les polynomes de Sylvester.

SUR L'INTÉGRALE $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n+1}}\,dx$

par M. **G. Fontené**.

Si l'on pose
$$X = ax^2 + bx + c, \qquad \Delta = 4ac - b^2,$$
on a
$$\int \frac{\Delta}{X^{n+1}}\,dx = \frac{2ax+b}{nX^n} + \frac{2n-1}{n}\,2a\int \frac{1}{X^n}\,dx,$$
ou
$$\int \frac{\Delta}{X^{n+1}}\,dx = \frac{\Delta(2ax+b)}{nX^n} + \frac{2n-1}{n}\,2a\int \frac{\Delta}{X^n}\,dx.$$

On déduit de là

$$(1)\qquad \int \frac{\Delta}{X^{n+1}}\,dx = 2ax+b\left[\frac{\Delta}{nX^n} + \frac{2n-1}{n(n-1)}\,2a\frac{\Delta}{X^{n-1}} + \frac{(2n-1)(2n-3)}{n(n-1)(n-2)}\,(2a)^2\frac{\Delta}{X^{n-2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{2n-1}{n(n-1)}\frac{(2n-3)\ldots 1}{(n-2)\ldots 1}\,(2a)^{n-1}\int \frac{dx}{X}\right.$$

Pour $n > 1$, le dernier terme dans le crochet est
$$\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3}{n(n-1)\ldots 2\ldots 1}\,(2a)^{n-1}\,\frac{1}{X}.$$

Pour $n = 1$, il n'y a qu'un terme dans le crochet.

On établit ordinairement la formule (1) pour la forme canonique $X = x^2 + h$; le calcul précédent me semble préférable.

SUR CERTAINES FAMILLES DE COURBES PLANES

par M. **J. Haag**, chargé de cours à la Faculté des sciences de Clermont-Ferrand.

Dans le n° de juin dernier, M. Jamet se pose une question qui est visiblement un cas particulier de la suivante :

Soient une courbe (C), M un point de cette courbe, N le centre de courbure correspondant, P et P′ deux points divisant le segment MN dans des rapports donnés, (Γ) le cercle de diamètre PP′. Déterminer (C) pour que (Γ) reste orthogonal à un cercle fixe (O), quand M décrit cette courbe.

Si l'on suppose P′ en M et $\frac{MP}{MN} = -1$, on retrouve l'énoncé de M. Jamet. Si l'on suppose P′ en N et $\frac{MP}{MN} = -1$, on retombe sur la question 1740, proposée par l'auteur de cette note, et résolue dans le n° d'octobre 1909. La méthode employée pour la solution de cette dernière s'étend très aisément au problème général énoncé ci-dessus.

Soient x, y les coordonnées de M, α l'angle polaire de la demi-tangente positive en M à (C), R la mesure algébrique de (MN) sur la demi-droite d'angle polaire $\alpha + \frac{\pi}{2}$. L'équation du cercle (Γ) est de la forme
$$(X - x + mR\sin\alpha)^2 + (Y - y - mR\cos\alpha)^2 - n^2R^2 = 0,$$
m et n désignant deux constantes données, telles que l'on ait
$$(1)\qquad \overline{MP} = R(m+n), \qquad \overline{MP'} = R(m-n).$$

Si l'on appelle a le carré du rayon du cercle (O), on a la condition
$$(2)\qquad x^2 + y^2 + (m^2 - n^2)R^2 + 2mR(-x\sin\alpha + y\cos\alpha) = a.$$

La parenthèse $(-x\sin\alpha - y\cos\alpha)$ suggère l'idée de chercher la courbe par ses tangentes (Cf. la solution de la question 1740). Soit

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \tag{3}$$

l'équation d'une telle tangente, p étant une fonction inconnue de α. Si l'on prend $\alpha = \alpha + \frac{\pi}{2}$, on a

$$\begin{aligned} R &= -p + p'', \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha &= p', \\ x^2 + y^2 &= p^2 + p'^2. \end{aligned} \tag{4}$$

L'équation (2) devient alors, en posant $m^2 - n^2 = k = \frac{\overline{MP}\cdot\overline{MP'}}{R^2}$,

$$p^2 + p'^2 + kR^2 - 2mRp = a. \tag{5}$$

Si l'on remarque que la dérivée de $(p^2 + p'^2)$ est $-2p'R$, on est conduit à différentier cette équation par rapport à α; il vient ainsi

$$-p'R + kRR' - mRp' - R'(p) = 0$$

ou

$$(m - 1)Rdp + kRdR - mpdR = 0. \tag{6}$$

Cette équation s'intègre par quadratures, soit en remarquant qu'elle est homogène en R et p, soit en observant qu'elle est linéaire par rapport à p et $\frac{dp}{dR}$. Ayant R en fonction de p, l'équation (4) donnera p' en fonction de p, d'où p^2, par une quadrature, et enfin α par une nouvelle quadrature. Nous laisserons au lecteur le soin de développer les calculs, qui semblent n'offrir aucune difficulté particulière, et d'étudier les différentes espèces de courbes qui en résultent. Nous nous bornerons ici à faire quelques remarques qui nous semblent intéressantes.

Quels que soient les nombres m et k, l'équation (6) admet toujours une solution de la forme $R = \lambda p$, λ étant une constante déterminée par l'équation du premier degré

$$(2m - 1)\lambda + k\lambda^2 = 0. \tag{7}$$

Les courbes (C_0) correspondantes sont caractérisées par le fait que *leur rayon de courbure est proportionnel à la distance de leur tangente au centre* (Art. 1). Leur détermination se ramène à l'intégration de l'équation classique

$$p'' + (1 + \lambda)p = 0.$$

L'équation (7) montre qu'à une valeur donnée de λ correspondent une infinité de nombres m et k et, par suite, une infinité de manières de choisir les points P et P'. Ceci s'explique aisement par le fait qu'à chaque courbe (C_0) correspond un cercle, de centre O, qui découpe sur les normales des cordes égales à $2\sqrt{1 + \lambda}\,p$.

Les courbes parallèles à une courbe (C_0) *sont des courbes* (C_0) *dans le cas où* $\lambda = -1$, c'est-à-dire où le cercle (Γ) a son centre en M. L'intégrale générale de (6) est alors

$$R = \frac{p}{m} + C^{m}.$$

On a donc affaire aux courbes parallèles aux courbes (C_0) : si, en outre, $m = 1$, on retrouve la question 1740.

Comme autres valeurs remarquables de m et k, citons $m = 1$, *le cercle* (Γ) *devient concentrique au cercle de courbure ;* les courbes correspondantes sont les cercles du plan, toutes les courbes (C_0).

Pour $k = 0$, *le cercle* (Γ) *doit être tangent en* M à O. L'équation (6) admet pour solution générale

$$R = Cp^{\lambda} \qquad \left(\lambda = \frac{1}{m} - 1\right) \tag{8}$$

Ensuite, ρ est donné par

$$\rho = \sqrt{\Lambda - 2\lambda \cos p} :$$

d'où

$$(9) \qquad \rho^2 = \Lambda - 2\lambda \cos p = \frac{2\lambda}{\lambda - 1} \rho^{\lambda+1} = \Lambda - 2\lambda \sin p^{\frac{1}{\lambda}} + C, \qquad (C = C)$$

d'où

$$\theta = \int \frac{dp}{\sqrt{C - \Lambda + 2\lambda \sin p^{\frac{1}{\lambda}}}}.$$

Dans le cas examiné par M. Amsler, on a $m = -\frac{1}{2}$. La quadrature précédente s'effectue alors sans difficulté et donne $\rho = \sqrt{\frac{C}{2} - \Lambda \cos 2\theta}$, en posant $\Lambda = \sqrt{\lambda^2 + \frac{C^2}{4}}$ et en négligeant une rotation autour de O. La courbe (C) est alors une conique qui a pour équation tangentielle

$$u^2\left(\Lambda - \frac{C}{2}\right) + v^2\left(\frac{C}{2} - \Lambda\right) - w^2 = 0.$$

Les carrés de ses demi-axes sont donc $\Lambda - \frac{C}{2}$ et $\frac{C}{2} - \Lambda$; son cercle orthoptique a pour rayon $\sqrt{C}$ et coïncide bien avec le cercle (O), comme on le voit en comparant les formules (5) et (9), qui donnent $\rho = C$.

ALGÈBRE

1922. *On considère la fonction*

$$y = (x+1)(x-2),$$

dans laquelle x désigne un nombre positif donné.

1° *Montrer que cette fonction satisfait à la relation*

$$xy' = y(x+1)(x-1).$$

En déduire une relation entre $y^{(n)}$ et $y^{(n+1)}$, et calculer les premiers termes du développement en série de la fonction y, au voisinage de $x = 1$, par rapport à la variable $z = x - 1 = t$. En déduire la forme de la courbe représentative au voisinage du point correspondant.

2° *Étudier les variations de cette fonction, d'abord dans les deux cas fournis par les diverses valeurs positives de x. Cas particuliers. Cas généraux.*

La fonction

$$y = (x+1)(x-2),$$

divisée par x^x, donne naissance à la relation

$$y x^{-x} = (x+1)(x-2) x^{-x};$$

celle-ci, dérivée par rapport à x, conduit à la nouvelle équation

$$y' x^{-x} - x y x^{-x-1} = \left(\frac{x+1}{x} + \log x - 1\right) x^{-x},$$

qu'il suffit de multiplier par x^{x+1} pour obtenir l'équation différentielle annoncée :

$$xy' = y(x+1)(x-1).$$

En dérivant cette équation une fois, deux fois, etc., on obtient successivement

$$xy'' + (1 - x)y' = (x+1)(x-1) + x - 1,$$

$$xy''' + (2 - x)y'' = (x+1)(x-1) + 2x - 2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$xy^{(n+1)} + (n - 1 - x)y^{(n)} = (x+1)(x-1) + (n-1)x - n + 2 = x^2 + (n-1)x - n + 1.$$

Telle est la relation qui donne $y^{(n)}$ en fonction de $y^{(n-1)}$: elle a lieu pour toutes les valeurs de n supérieures à 2. L'équation différentielle établie au début donne y' en fonction de y, et la première et celles que nous en avons déduites donne y'' en fonction de y'.

Pour $x = 1$, nous avons $y = -1$, $y' = \alpha - 1$; puis, $y'' = \alpha^2 - \alpha - (\alpha - 1)(\alpha - 1)$, c'est-à-dire $y'' = 2\alpha^2 - \alpha$; ensuite

$$y''' = \alpha^2(\alpha - 1) + (\alpha - 1)(2\alpha^2 - \alpha) = 3\alpha^3 - 6\alpha^2 + 2\alpha, \quad \text{etc.}$$

Les premiers termes du développement de y en série, à partir de la valeur 1, sont donc

$$y = -1 + (\alpha - 1)(x - 1) + \frac{2\alpha^2 - \alpha}{2}(x - 1)^2 + \frac{3\alpha^3 - 6\alpha^2 + 2\alpha}{6}(x - 1)^3 + \ldots$$

Rien n'est plus simple dès lors que d'étudier la courbe au voisinage du point $(x = 1, y = -1)$: il suffit de comparer l'y de la courbe à celui de la tangente, qui est

$$Y = -1 + (\alpha - 1)(x - 1).$$

La différence entre les deux est

$$y - Y = \frac{2\alpha^2 - \alpha}{2}(x - 1)^2 + \frac{3\alpha^3 - 6\alpha^2 + 2\alpha}{6}(x - 1)^3 + \ldots$$

pour les valeurs positives de α autres que $\frac{1}{2}$, il suffit de garder le premier terme et de prendre

$$y - Y = \frac{2\alpha^2 - \alpha}{2}(x - 1)^2 ;$$

pour $\alpha = \frac{1}{2}$, nous prendrons le terme suivant, et nous poserons simplement

$$y - Y = -\frac{1}{48}(x - 1)^3.$$

Supposons d'abord α compris entre 0 et $\frac{1}{2}$: le coefficient angulaire de la tangente sera compris entre -1 et $-\frac{1}{2}$, et la différence $y - Y$ sera négative pour les petites valeurs de $(x - 1)$: nous aurons donc la figure 1, qui donne en même temps la position de la courbe par rapport à la droite $y = -x$ et à la droite $y = -1$.

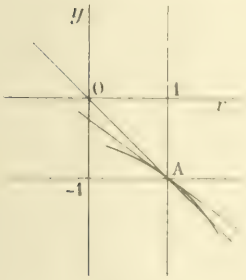


Fig. 1

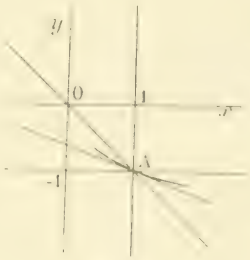


Fig. 2

Supposons maintenant α compris entre $\frac{1}{2}$ et 1 : le coefficient angulaire de la tangente sera compris entre $-\frac{1}{2}$ et 0, et la différence $y - Y$ sera positive pour les petites valeurs de $(x - 1)$: nous aurons la figure 2, qui donne en même temps aussi la position de la courbe par rapport aux droites $y = -x$ et $y = -1$.

Si nous supposons enfin $\alpha > 1$, le coefficient angulaire de la tangente sera positif, la différence $y - Y$ positive aussi, et nous aurons la figure 3.

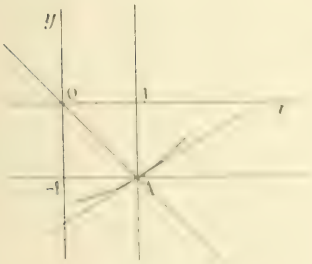


Fig. 3

Fig. 4

Il ne reste plus qu'à étudier les cas particuliers où $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 1$.

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, le coefficient angulaire de la tangente est $-\frac{1}{2}$: la différence $y - Y$ a pour partie principale $-\frac{1}{48}(x - 1)^3$: elle est positive à gauche et négative à droite, et y a un point d'inflexion au point A, et l'on a la figure 5.

Pour $\alpha = 1$, on a une disposition analogue à celles des figures 2 et 3, seulement la tangente est horizontale.

2° Les remarques que nous venons de faire contribuent évidemment à l'étude de la fonction. Nous allons en ajouter d'autres avant de prendre la dérivée et d'étudier ainsi vraiment l'allure de la fonction dans les divers intervalles où elle est définie.

Il importe d'abord d'observer que la fonction n'est définie que pour les valeurs positives de x, et, pour x infiniment petit, qu'elle est elle-même infiniment petite dans tous les cas, puisque α est positif et qu'ainsi le produit $x^\alpha Lx$ tend toujours vers 0 quand x tend vers 0.

Pour x infini, nous écrirons ainsi la fonction :

$$y = x^\alpha(Lx - 1),$$

et nous voyons que la parenthèse tend vers -1 quand α est plus petit que 1, et grandit indéfiniment quand α est supérieur ou égal à 1. La fonction y est donc égale à $-x$, comme la fonction $y = -x$, quand α est plus petit que 1, et égale à $+\infty$ quand α est supérieur ou égal à 1. Dans ce dernier cas, le rapport $\frac{y}{x}$ devient infini aussi, et la courbe admet une branche parabolique dans la direction Oy ; tandis que dans le premier cas, il y a une branche parabolique dans la direction $y = -x$, entre cette droite et l'axe des x. Ce dernier point résulte de l'égalité

$$y + x = x^\alpha(Lx - 1),$$

qui nous montre que $y + x$ est négatif à gauche de $x = 1$, positif à droite et infiniment grand avec x.

Prenons maintenant les deux premières dérivées. Nous avons

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}(Lx - 1) + x^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}(\alpha Lx - \alpha + 1),$$

puis

$$y'' = (\alpha - 1)x^{\alpha-2}(\alpha Lx - \alpha + 1) + \alpha x^{\alpha-1}\frac{1}{x} = x^{\alpha-2}(\alpha^2 Lx - \alpha^2 + 2\alpha - 1),$$

ensuite

$$y''' = x^{\alpha-3}(\alpha^3 Lx - \alpha^3 + 3\alpha^2 - 3\alpha + 1 + \alpha - 1) = x^{\alpha-3}(\alpha^3 Lx - \alpha^3 + 3\alpha^2 - 2\alpha).$$

Le signe de y' est très facile à étudier. Nous commencerons à étudier les signes de y''.

1er *cas* : $\alpha < 1$. Alors le facteur

$$-\alpha^2 + 2\alpha - 1 = -(\alpha - 1)^2,$$

le seul qui ne soit pas nécessairement positif, part de $-\infty$, croît, s'annule pour

$$\alpha = 1,$$

puis devient positif et croît indéfiniment.

La dérivée première est donc d'abord décroissante, passe par un minimum, puis croît indéfiniment. Elle part de -1, atteint un minimum négatif et croît ensuite jusqu'à $+\infty$; elle s'annule donc une seule fois pour un nombre visiblement compris entre 0 et 1. En joignant à ceci toutes les remarques antérieures, il est facile de tracer la courbe représentative de la fonction (*fig. a*).

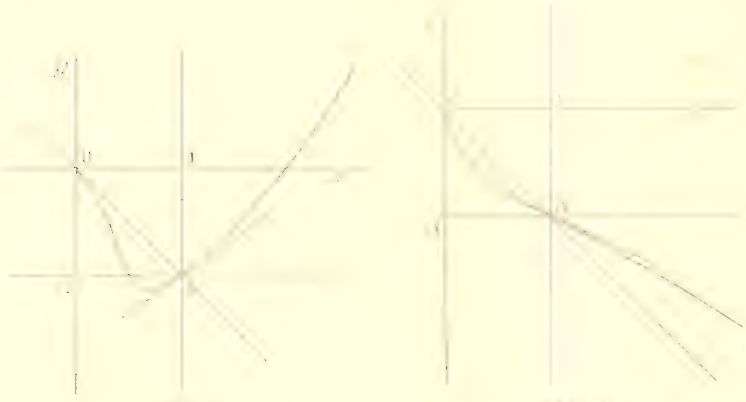


Fig. a Fig. b

Cette figure nous montre encore que la fonction s'annule pour une valeur de x plus grande que 1 ; cette valeur est comprise entre 1 et e.

2e *cas* : $\alpha > 1$. Alors y' part de $+\infty$, s'annule pour

$$x = e^{\frac{\alpha-1}{\alpha}},$$

et décroît continuellement depuis $+\infty$ jusqu'à $-\infty$. La fonction y part de $-\infty$, augmente jusqu'à un certain maximum, et décroît jusqu'à -1. Le signe du maxi-

mum nous intéresse donc essentiellement : il est fourni par

$$\mu = 1 - \frac{1-\alpha}{\alpha^2} e^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Quand α est égal à $\frac{1}{2}$, $\mu = -1$; quand α est très voisin de 1, μ est voisin de 1, et enfin, quand α est infiniment petit, μ est encore voisin de 1.

Etudions d'abord le cas où $\alpha = \frac{1}{2}$. Alors y reste toujours négatif ; la fonction décroît toujours. La courbe tourne sa concavité vers les y positifs à gauche de $x = 1$, et, vers les y négatifs à droite. Elle est représentée dans la figure (b) ; elle présente un point d'inflexion au point $A(1, -1)$.

Pour achever l'étude de la fonction, il est nécessaire d'étudier les variations de μ, quand α varie de 0 à 1. La dérivée de μ est

$$\mu' = -e^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{\alpha^2 - 3\alpha + 1}{\alpha^3};$$

elle s'annule pour

$$\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2};$$

le premier nombre est sensiblement égal à 0.38 ; le second est plus grand que 1. La fonction μ est donc positive de $\frac{1}{2}$ à 1, et la fonction μ croît, dans cet intervalle, de -1 à -1 ; elle s'annule donc pour un nombre α_1 compris entre $\frac{1}{2}$ et 1.

Supposons d'abord α compris entre $\frac{1}{2}$ et α_1. Alors la fonction μ est négative, la dérivée y' de y reste toujours négative et la fonction y est décroissante. La courbe y tourne sa concavité vers les y positifs, tant que x est plus petit que $e^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$, nombre plus grand que 1 ; ensuite, elle tourne sa concavité vers les y négatifs, et les renseignements que nous avons accumulés antérieurement nous permettent de tracer la courbe représentative sans difficulté. Elle est tracée dans la figure (c).

Fig. c

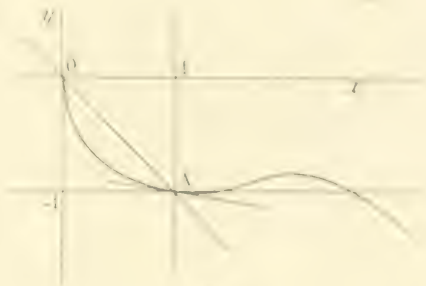


Fig. b

Si α est égal à α_1, on a le même aspect général ; seulement la tangente d'inflexion est horizontale.

Si α est compris entre α_1 et 1, μ est positif ; la fonction y' est d'abord négative, croît, s'annule, passe par un maximum positif, décroît, s'annule encore et redevient négative. Les valeurs de x pour lesquelles y' s'annule sont toutes deux plus grandes que 1, et, dans cette région, la fonction présente un minimum et un maximum ; le point d'inflexion est compris entre les deux (fig. d).

Voyons enfin ce qui arrive quand α est compris entre 0 et $\frac{1}{2}$. Alors μ', d'abord négatif, s'annule

pour $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et reste ensuite positif : μ part de 1 et décroît jusqu'à un certain minimum, puis croît depuis ce minimum jusqu'à -1. Il s'annule donc une fois, pour une valeur α_2 comprise entre 0 et $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Lorsque α est compris entre 0 et α_2, y' est d'abord négative, croît, s'annule, passe par un maximum positif, décroît, s'annule encore et redevient négative. Les valeurs de x pour lesquelles y' s'annule sont de part et d'autre de $e^{\frac{1}{2}\frac{\alpha_2}{1-\alpha^2}}$; elles sont toutes deux plus petites que 1, et, dans cette

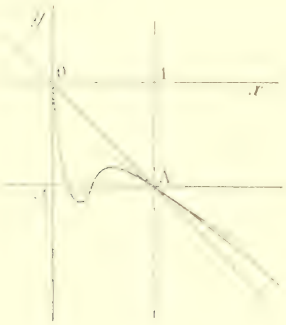


Fig. *e*

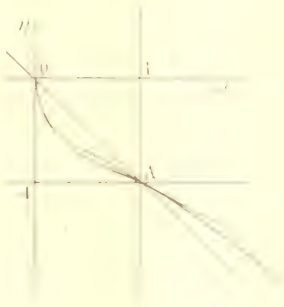


Fig. *f*

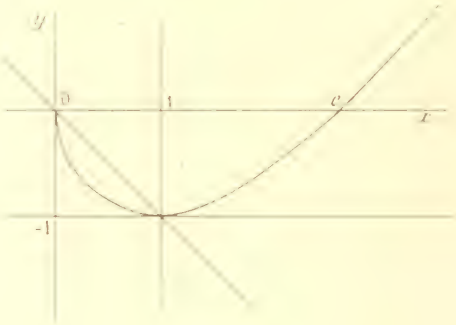


Fig. *g*

région, la fonction y passe par un minimum, puis par un maximum ; le point d'inflexion de la courbe représentative est compris entre les deux (*fig. e*).

Si $\alpha = \alpha_2$, le minimum et le maximum viennent se confondre en une inflexion à tangente horizontale.

Lorsque α est compris entre α_2 et $\frac{1}{2}$, μ est négatif, y' est toujours négative et y toujours décroissante ; l'inflexion persiste pour une valeur $x = e^{\frac{1}{2}\frac{\alpha}{1-\alpha^2}}$ plus petite que 1, et l'on a la figure (*f*).

Il n'y a plus qu'à étudier le cas de $\alpha = 1$.

Dans ce cas $y = x\mathrm{L}x - x$, $y' = \mathrm{L}x$; la fonction décroît à gauche de 1, croît à droite, et la courbe présente la forme (*g*), qui découle aussi des remarques déjà faites. Elle rencontre Ox au point $x = e$.

Solutions satisfaisantes : MM. J. Sauvaire, à Mont-de-Marsan ; G. Lagot, à Rodez ; Ch. Guillermo, à Cosnac ; J. Ottenheimer, lycée de Nancy ; A. Rousseau.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

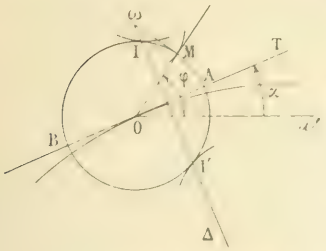
1927. — *On considère un cercle Γ dont l'équation dépend d'un seul paramètre : il existe une famille de courbes, qui sont les trajectoires orthogonales de ce cercle variable. On demande :*

1° *Le lieu des points d'inflexion de ces trajectoires ;*

2° *Le lieu des centres de courbure des trajectoires aux points où elles coupent orthogonalement le cercle variable dans l'une de ses positions.*

1° et 2°. Soient a, b les coordonnées du centre O du cercle mobile, R son rayon : ces trois quantités

sont fonctions d'un même paramètre. On peut supposer que ce paramètre est l'arc s de la courbe décrite par O.



Soient alors M un point du cercle O, φ l'angle que fait le rayon OM avec Ox', parallèle à l'axe des x. Les coordonnées de M sont $x = a + R\cos\varphi$, $y = b + R\sin\varphi$, et leurs dérivées par rapport à s :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{da}{ds} + \cos\varphi\,\dfrac{dR}{ds} - R\sin\varphi\,\dfrac{d\varphi}{ds}, \\[2ex] \dfrac{dy}{ds} = \dfrac{db}{ds} + \sin\varphi\,\dfrac{dR}{ds} + R\cos\varphi\,\dfrac{d\varphi}{ds}. \end{cases}$$

Pour que le lieu de M soit une trajectoire orthogonale du cercle, il faut et il suffit que φ soit une fonction de s, choisie de façon que ces deux dérivées soient proportionnelles à $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$; la tangente en M à la trajectoire de M sera alors le rayon OM.

L'équation
$$\sin\varphi\,\frac{dx}{ds} - \cos\varphi\,\frac{dy}{ds} = 0$$
se réduit à
$$\sin\varphi\,\frac{da}{ds} - \cos\varphi\,\frac{db}{ds} = R\,\frac{d\varphi}{ds}.$$

Si l'on appelle α l'angle que la tangente en O à la trajectoire de O fait avec l'axe des x, elle peut s'écrire
$$\sin\varphi\cos\alpha - \cos\varphi\sin\alpha = R\,\frac{d\varphi}{ds},$$
ou
$$(2)\qquad \sin(\varphi - \alpha) = R\,\frac{d\varphi}{ds}.$$

C'est l'équation qu'il faudrait intégrer pour déterminer les trajectoires orthogonales; α et R y représentent des fonctions connues de s.

Soient alors σ l'arc de la trajectoire que décrit M, et ρ son rayon de courbure au point M. L'équation (2) peut s'écrire
$$\sin(\varphi - \alpha) = R\,\frac{d\varphi}{d\sigma}\,\frac{d\sigma}{ds}.$$
or $\dfrac{d\sigma}{d\varphi} = \rho$, donc
$$(3)\qquad \rho\sin(\varphi - \alpha) = R\,\frac{d\sigma}{ds}.$$

D'autre part, remplaçons dans les équations (1) $\dfrac{dx}{ds}$ et $\dfrac{dy}{ds}$ par $\dfrac{ds}{ds}\cos\varphi$ et $\dfrac{ds}{ds}\sin\varphi$, $\dfrac{da}{ds}$ et $\dfrac{db}{ds}$ par $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, et ajoutons les deux équations membre à membre après avoir multiplié la première par $R\cos\varphi$, la seconde par $R\sin\varphi$, nous obtiendrons
$$(4)\qquad R\cos(\varphi - \alpha) = R\,\frac{dR}{ds} + R\,\frac{d\varphi}{ds}.$$

L'élimination de $R\dfrac{d\varphi}{ds}$ entre cette équation et l'équation (3) donne
$$(5)\qquad R\cos(\varphi - \alpha) - \rho\sin(\varphi - \alpha) = -R\,\frac{dR}{ds}.$$

Cette équation résout la question posée : le second membre est une fonction de s seul, indépendante de φ, or le premier membre est la projection sur OI du contour $OM\omega$, M étant le point de la trajectoire, ω le centre de courbure en ce point.

L'équation (5) exprime donc ce théorème :

Les centres de courbure des trajectoires orthogonales de tous les points du cercle dans une de ses positions, sont sur une droite Δ perpendiculaire à la tangente au lieu du centre ; l'abscisse de cette perpendiculaire par rapport au centre, mesurée sur la tangente, le sens positif étant celui du mouvement, est $-R\frac{dR}{ds}$.

Le lieu des centres de courbure est donc la partie de cette droite extérieure au cercle.

Les points du cercle qui passent par des points d'inflexion de leurs trajectoires orthogonales sont les points A et B où la tangente au lieu du centre coupe le cercle. Leurs lieux sont donnés par les équations paramétriques

$$x = a + R\cos\alpha, \qquad y = b + R\sin\alpha, \qquad \text{pour l'un,}$$

$$x = a - R\cos\alpha, \qquad y = b - R\sin\alpha, \qquad \text{pour l'autre.}$$

a, b, R, α sont des fonctions connues de s.

Si la droite Δ coupe le cercle en deux points I et I', c'est-à-dire si

$$\left|R\frac{dR}{ds}\right| \leq R \qquad \text{ou} \qquad \left|\frac{dR}{ds}\right| \leq 1,$$

I et I' sont des points de rebroussement sur leurs trajectoires orthogonales ; ce sont donc les points où le cercle mobile touche son enveloppe.

La droite Δ, lieu des centres de courbure, est donc l'axe radical du cercle O et du cercle infiniment voisin. (A. D.)

Solutions satisfaisantes : MM. R. Dostor, P. Vilain et Dressel.

1930. — *On considère la congruence de droites*

$$y = \lambda x + \mu - \lambda^2, \qquad z = \mu x + \lambda(\mu - \lambda^2),$$

qui dépendent de deux paramètres arbitraires.

1° *Montrer que par tout point de l'espace il passe une de ces droites et une seule, en général. Trouver le lieu des points par lesquels il en passe plus d'une.*

2° *Montrer que dans tout plan de l'espace il passe trois de ces droites. Trouver l'enveloppe de ceux pour lesquels deux de ces droites sont confondues. Trouver l'enveloppe des plans pour lesquels les trois droites sont confondues.*

3° *Déterminer* μ *en fonction de* λ *de façon que cette droite engendre une développable. Montrer que l'une de ces surfaces coïncide avec la précédente.*

1° Considérons le système d'équations en λ et μ,

$$(1) \qquad y = \lambda x + \mu - \lambda^2, \qquad z = \mu x + \lambda(\mu - \lambda^2).$$

Nous en déduisons en multipliant la première par $(x - \lambda)$,

$$(2) \qquad y(x - \lambda) = \lambda(x - \lambda^2) + \mu(x - \lambda), \qquad z = \mu(x - \lambda) + \lambda(\mu - \lambda^2)$$

en remarquant que la condition pour que $\lambda = -x$ soit solution du système (1) et du système (2) est la même, $z = x^3$, on peut dire qu'au point de vue des valeurs de λ, (2) est bien équivalent à (1).

Nous allons pouvoir nous servir de (2) pour déterminer ces valeurs.

$$y(\lambda + x) = \mu x + \lambda(\mu + \lambda x - \lambda^2), \qquad z = \mu(x - \lambda) + \lambda(\mu - \lambda^2).$$

Retranchons membre à membre ; il vient $y(\lambda + x) - z = \lambda x^2$, d'où, en supposant $x^2 \neq y$, on déduit $\lambda = \frac{z - xy}{y - x^2}$. La première des équations du système (1) donne alors μ sans ambiguïté, ainsi on trouve

$$\mu = \frac{z(x - z) + y(y^2 - 3xz)}{(y - x^2)^2}.$$

Donc par tous les points non situés sur le cylindre parabolique $y = x^2$, il y a une droite de la congruence et une seule en général.

λ est indéterminé si l'on a en même temps

(3) $$z = xy, \qquad y = x^2,$$

c'est-à-dire si le point est situé sur la cubique gauche $z = x^3$, $y = x^2$, qui est une partie de l'intersection des deux quadriques représentées par les équations (3), l'autre partie se composant d'une droite rejetée à l'infini dans le plan $x = 0$.

Cela posé, cherchons la condition pour que la droite $y = ax + p$, $z = bx + q$ rencontre la cubique précédente. On obtiendrait l'équation du complexe ainsi formé en éliminant x_0 entre les équations

(4) $$x_0^2 = ax_0 + p, \qquad x_0^3 = bx_0 + q,$$

ou bien entre les équations

(5) $$x_0^2 = ax_0 + p \qquad \text{et} \qquad px_0 = (b - a^2)x_0 + q - pa.$$

La deuxième des équations du système (5) peut s'écrire

(6) $$x_0(p - b + a^2) = q - pa.$$

On pourra supposer par exemple a, b, p, q fonction de trois quantités α, β, γ considérées comme paramètres. L'élimination de x_0 dans (5) donne

$$(q - ap)^2 - a(q - pa)(p - b + a^2) - p(p - b + a^2)^2 = 0,$$

l'abscisse x_0 correspondant à une droite α_0, β_0, γ_0 du complexe est donnée par l'équation (6).

Si cette droite rencontre la cubique en un autre point d'abscisse x_1, on aura encore

(7) $$x_1(p - b + a^2) = q - pa.$$

(6) et (7) montrent que pour cela il faut $p - b + a^2 = 0$, $q - pa = 0$, équations qui déterminent une congruence de droites.

Posons $a = \lambda$, $b = \mu$; on en tire

$$p = \mu - \lambda^2, \qquad q = \mu\lambda - \lambda^3;$$

la congruence de droites devient, en remplaçant p et q par leurs valeurs,

$$y = \lambda x + \mu - \lambda^2, \qquad z = \mu x + \lambda\mu - \lambda^3.$$

C'est la congruence donnée.

La congruence donnée est donc formée par l'ensemble des droites rencontrant en deux points la cubique

$$y = x^2, \qquad z = x^3.$$

2° Considérons le plan $ux + vy + z + r = 0$. Pour que ce plan contienne la droite $y = ax + p$, $z = bx + q$, il faut et il suffit que u, v, r vérifient les deux équations

$$u + va + b = 0, \qquad vp + q + r = 0,$$

ou, en remplaçant p, a et b, q par leurs valeurs en fonction de λ et μ,

$$u + v\lambda + \mu = 0, \qquad v(\mu - \lambda^2) + \lambda(\mu - \lambda^2) + r = 0,$$

ou, en éliminant μ, $$-(u + v\lambda + \lambda^2)\lambda + r = 0.$$

Posons $v + \lambda = -t$, $t(u + t\lambda + t^2) + r = 0$ ou bien

(I) $$t^3 + vt^2 + ut + r = 0.$$

D'autre part si on cherche les points d'intersection du plan $ux + vy + z + r = 0$ avec la cubique, on aura, pour l'équation aux abscisses,

(II) $$x^3 + vx^2 + ux + r = 0,$$

équation identique à (I).

Pour que (II) ait une racine double, c'est-à-dire pour que deux des trois droites soient confondues, il suffira d'écrire que

(III) $$x^3 + vx^2 + ux + r = 0, \qquad 3x^2 + 2vx + u = 0$$

ont une racine commune : le plan passe par la tangente à la cubique, et l'enveloppe dans ce cas est la cubique elle-même. On aurait aisément son équation tangentielle en éliminant x entre les deux équations (III).

Pour que les trois droites soient confondues, c'est-à-dire pour que (II) ait une racine triple, il suffit d'écrire que $x + \lambda y + \mu z + r = 0$, $3(x + 2\lambda y + \mu z) = 0$, $6(x + 2\lambda y + \mu z) = 0$ ont une racine commune. Le plan u, v, w est alors osculateur : les équations tangentielles de l'enveloppe (qui est une développable) seront

$$-\frac{v^2}{3} + uw = 0, \qquad 2v^3 - 9uvw - 27w^2 = 0.$$

On sait d'ailleurs que la caractéristique du plan osculateur est la tangente à la courbe et que son enveloppe est la développable formée par les tangentes à la courbe.

3° On sait que la condition pour que la droite $(y = ax + p,\ z = bx + q)$ engendre une surface développable est que l'on ait $da\,dq - db\,dp = 0$.

Appliquant cela à la droite $(y = \lambda x + \mu,\ z = \mu x + \lambda\mu - r)$, on trouve l'équation différentielle

$$\left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)^2 + \frac{3\mu}{\lambda} - \frac{r}{\lambda^3} = 0$$

qui donne les deux solutions

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = -\frac{3\mu}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{12r + 3\mu^2}, \qquad \frac{d\mu}{d\lambda} = -\frac{3\mu}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{12r + 3\mu^2}.$$

On peut les écrire, en abrégé, $\frac{2\mu + 3\lambda\mu}{\sqrt{4r + 3\mu^2}} = \pm 1$. Elles s'intègrent aisément et donnent

$$\sqrt{4r + 3\mu^2} \pm (\mu + \lambda\mu) = C,$$

d'où $(4\mu - 3\lambda)^2 = (C \pm \lambda)^2$ et $\sqrt{4r + 3\mu^2} \mp (\mu + \lambda\mu) = 0$, les signes $-$ et $+$ se correspondant.

On voit donc que par toute droite de la congruence donnée passent deux surfaces développables dont les génératrices font partie de la congruence, la constante C est déterminée par les valeurs λ_0, μ_0 correspondant à la génératrice donnée.

Mais on peut remarquer que les équations (I) admettent la solution singulière $4r = 3\mu^2$, que l'on trouve aisément en cherchant l'enveloppe de la famille

$$4r - (\mu + \lambda\mu - C)^2 = 0,$$

où C est un paramètre variable.

Or l'équation de la développable correspondante sera obtenue en éliminant λ entre

$$y = \mu + \frac{\mu^2}{4}, \qquad z = \mu + \frac{\mu^3}{4}.$$

Mais ces équations si on y pose $\mu = 2x$ sont celles de la tangente à la cubique trouvée précédemment; la développable sera donc formée des tangentes à cette cubique, c'est la surface trouvée dans la deuxième partie.

Géométriquement, on peut remarquer que puisque la congruence est formée par les droites ayant deux points communs avec la courbe donnée $y = x^2$, $z = x^3$, on aura immédiatement le nombre de droites de cette congruence passant par un point donné A.

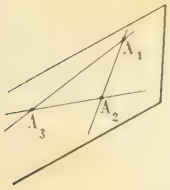
En effet, projetons la cubique sur un plan quelconque en prenant A comme point de vue ; la projection sera une cubique unicursale, elle aura donc un point double ; il y aura donc une des droites passant par A et une seule qui coupera la courbe en deux points, ces deux points se projetant au point double.

Par un point de la courbe, il en passera une infinité ; il suffira de choisir arbitrairement un autre point de la même courbe.

Si on considère un plan, ce plan rencontrera la cubique en trois points A_1, A_2, A_3.

Pour qu'une droite située dans ce plan fasse partie de la congruence, il faut et il suffit qu'elle passe par deux de ces trois points. On aura donc trois droites en tout.

Pour que deux des droites se confondent, deux des points devront se confondre ; le plan sera tangent à la courbe : l'enveloppe sera la courbe elle-même.



Si les trois droites se confondent, il en sera de même des trois points, le plan sera osculateur à la courbe, et son enveloppe sera la développable formée par les tangentes à la cubique.

Les tangentes à la cubique faisant partie de la congruence, on devra trouver, en cherchant à grouper les droites de la congruence de façon à obtenir des développables, la surface précédente enveloppe des plans osculateurs.

DEPERRAIS (Charles).

Bonnes solutions : MM. Ch. Guillemé ; G. Lach, à Redez ; J. [illegible], à Nancy ; J. [illegible] Perrin à Marseille ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppe ; J. Soubaigné, à Mont-de-Marsan ; P. Vallin.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1911)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

I. — Algèbre et Analyse.

8112. — Calculer $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}$.

8113. — Calculer la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique.

8114. — Somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres.

8115. — Calculer $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\ldots+1000.1001.1002$.

8116. — Calculer les déterminants

$$\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} yz & zx & xy \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a & a & a & \ldots & a \\ -1 & x & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & \ldots & 0 \\ \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \; x \end{vmatrix}$$

8117. — Étant donnée la fonction $y=1+x+x^2+x^3$, on donne à x la valeur 2. Quel accroissement h faut-il donner à x pour que l'accroissement de y soit plus petit que $\frac{1}{1000}$?

8118. — La fonction logarithmique est continue.

8119. — Étudier les séries qui ont pour termes généraux :

$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n}$, $\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{n}$, $\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{n}-\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{x}{\sqrt{n}}$, $\frac{x^n}{\sqrt{n}}$, $\frac{x^n}{n(n-1)}$, $\frac{x^n}{1+x^n}$, $\frac{x}{n}$,

e^n, e^{-n^2}, $e^{\frac{1}{n}}$, $x^n e^{-\sqrt{n}}$, $\frac{x}{\sqrt[n]{n^n-x}}$, $\sin\frac{x}{n}$, $1-\frac{n-\sqrt{n^2+2n-1}}{n+1}$, $\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]$, $\frac{\log n}{n}$.

8120. — Calculer les sommes des séries qui ont pour termes généraux :

$\frac{1}{n(n+1)}$, $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $\frac{2n+3}{(n-1)(n+2)}$, nx^{n-1}, $\frac{x}{1+x}$, $\frac{x}{(n+1)x}$, $\frac{1}{(n+1)x}$, $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

8121. — Étudier la série formée par les ordonnées maxima et minima de la courbe $y=\frac{\sin x}{x}$.

8122. — Étant donnée la série à termes positifs $u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$ on sondbet D. [illegible] que a pour terme général $v_n=\frac{u_{n+1}u_{n+2}}{u_n}$, et on demande de comparer les natures des deux séries.

8123. — Comparer les deux séries qui ont pour termes généraux u_n et $\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$.

8124. — Étudier les variations des fonctions :

$\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$, $\frac{e^x-1}{x}$, $x-1-\operatorname{ch}x$, $\cos\sqrt{x}$, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $\left(x+\frac{x}{2}\right)$, $x^2-\log x$, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, x^x, $x\log x$.

8125. — Des variations de la fonction $x - \log_a x$ reconnaître si un nombre peut être égal à son logarithme.

8126. — On donne un cercle, un point A sur ce cercle, et un point O sur la tangente au point A. Par le point O on mène une droite variable rencontrant le cercle aux points P et Q. Étudier les variations de $\overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2$.

8127. — On donne un cercle, un point A de ce cercle et une droite D perpendiculaire au diamètre qui passe par le point A. Par ce point on mène une sécante qui rencontre le cercle en M et la droite D en N. Étudier les variations de la longueur MN.

8128. — Calculer la différentielle totale de la fonction

$$\arccos \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} + \arccos \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2zx} + \arccos \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy},$$

les arc cosinus étant compris entre 0 et π.

8129. — Trouver pour $x = 0$ les limites des fonctions :

$$x^2 \mathrm{L}x, \qquad x^m \mathrm{L}x, \qquad \frac{1 + x\sqrt{x^2 - 1}}{x}, \qquad (1 + 3\sin 4x)^{\frac{1}{x}}, \qquad \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, \qquad x^{\frac{1}{x}}.$$

8130. — Trouver pour x infini les limites des fonctions

$$\frac{x\cos x - e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{x^2 + x}, \qquad x\left[1 - \left(\frac{x}{x+1}\right)^x\right], \qquad \left[1 - \left(\frac{\mathrm{L}x}{\mathrm{L}(x+1)}\right)\right] x\mathrm{L}x, \qquad x^{\frac{1}{x}}.$$

8131. — Limite pour m infini des fonctions :

$$m\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m - e\right], \qquad \left[1 + \mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right]^m, \qquad \frac{e^m - 1}{m}, \qquad \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}}{\mathrm{L}m}, \qquad m\sin\frac{3}{m}.$$

8132. — Limite de $\frac{x^m}{m!}$ pour m infini. Trouver le maximum de cette fonction quand m varie par valeurs entières.

8133. — Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + ax^2 + bx + c}$; trouver la limite de $f(x+1) - f(x)$ quand x augmente indéfiniment.

8134. — Trouver pour x infini la limite du produit $x\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{3}\right)\cdots\left(1 + \frac{x}{p}\right)e^{-x}$.

8135. — Développer en série les fonctions

$$\mathrm{L}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad \arcsin x^2, \quad \arcsin x\sqrt{2}, \quad (\mathrm{L}(1+x))^2, \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x}, \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{m+x}{1-mx}, \quad \frac{1}{x^2 - 3x + 2}, \quad \sin x \cos x.$$

8136. — Développer en série $\arccos x$. Calculer à $\frac{1}{100}$ près la valeur du développement pour $x = \frac{1}{2}$.

8137. — Établir la formule

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left[1 + \frac{1}{2.3}\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1.3}{2.4.5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \cdots\right]$$

8138. — Limite de $\left(\frac{m-x}{m-y}\right)^{\frac{1}{x}}$ pour m infini. En déduire la formule $e^x = \lim\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$.

8139. — Dans un triangle ABM on donne $AB = r$, $\widehat{ABM} = \omega$ et $BM = \rho$; on suppose que ρ est infiniment petit, et on demande de développer l'inverse de la longueur AM suivant les puissances de ρ.

8140. — Ordre infinitésimal de $\sqrt{1 + \sin x} - 1$.

8141. — Calculer les premiers termes du développement en série de la fonction $\frac{x}{1 - e^x} - \frac{x}{2}$.

8142. — Trouver la limite de $\frac{f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x)}{hk}$ quand h et k tendent vers zéro.

8143. — Dans la formule des accroissements finis et dans la formule de Taylor à un nombre quelconque de termes, trouver la limite de θ quand h tend vers zéro.

8144. — Étant donnée la formule

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a + \theta h),$$

développer θ suivant les puissances de h.

8145. — Étant donnée la formule des accroissements finis

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x + \theta h),$$

quelles sont les fonctions $f(x)$ pour lesquelles θ a une valeur constante.

8146. — Ordre infinitésimal de $f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)$.

8147. — Calculer $\sin 1^\circ$ à $\frac{1}{1000}$ près.

8148. — Combien de chiffres a le nombre $e^x - e^{2x} + e^{3x}$ pour $x = 20$.

8149. — Calculer $\operatorname{arc\,th}\frac{1}{2}$.

8150. — Etant donné $\operatorname{th}\frac{a}{2} = b$, calculer $\operatorname{sh}\frac{a}{3} = x$.

8151. — Etant donnée l'expression $L\,\frac{\sin x \sin x + 2h)}{\sin^2(x + h)}$ qui a pour limite zéro quand h tend vers zéro, on demande la partie principale de cet infiniment petit, h étant l'infiniment petit principal.

8152. — Calculer $\sin i$, $\cos i$.

8153. — Trouver un nombre imaginaire z tel que l'on ait $\sin z = a + bi$.

8154. — On pose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ et $z = r + a\cos\theta$. Démontrer que l'on a

$$x^2\frac{d^2z}{dx^2} + 2xy\frac{d^2z}{dxdy} + y^2\frac{d^2z}{dy^2} = 0.$$

8155. — Etudier les équations

$$x^3 - 3x + 1 = 0, \qquad 6x^4 - 17x^3 + 10x - 1 = 0, \qquad x^3 - 1 = 0, \qquad x^4 - 1 = 0$$

$$\sqrt{x + a} + \sqrt{x + b} \pm \sqrt{x + c} \pm \sqrt{x + d} = 0, \qquad x - x^{-1} - 2x + 2 = 0,$$

$$C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^n a^n = 0, \qquad \sqrt{1 + \frac{2}{3}x} - \sqrt{1 - \frac{2}{3}x} = 1,$$

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 7 = 0, \qquad \sqrt{x(a - x)} + \sqrt{x(b - x)} = 1, \qquad x^3 - 3x + 3 = 0.$$

8156. — Calculer les racines commensurables des équations

$$x^5 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 630 = 0, \qquad 6x^4 + 17x^3 + 9x + 2 = 0.$$

8157. — Etudier les équations

$$\sin x - \frac{x}{4} = 0, \qquad x\,\mathrm{L}x = a, \qquad 3\operatorname{arc\,tg} x - x = a, \qquad x\,\mathrm{L}x = 3, \qquad \sin 3x - 3\sin x = a,$$

$$\sin 3x - 4\sin^2 x = 0, \qquad x\,\mathrm{L}x + x^2 - x - 7 = 0, \qquad \sin 2x + a\sin x - 1 = 0,$$

$$x = \frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x, \qquad \cos^3 x + \sin^3 x = 1.$$

8158. — Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ \dfrac{x^3 + y^3}{x^3 - y^3} = \dfrac{121}{43}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 7x + 3y, \\ y = 7y + 3x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 8y - 24 = 0, \\ y + 8x - 24 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = ax + by, \\ y^2 = ay + bx; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\cos\varphi + y\sin\varphi = a\sin 2\varphi, \\ x^2 + y^2 = a^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3 - y^3 - x^2y + xy^2 = a(x^2 - y^2), \\ x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = b(x + y). \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x + y^2}{y + x^2} = a, \\ \dfrac{y + x^2}{x + y^2} = b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + yz + z^2 = a^2, \\ z^2 + zx + x^2 = b^2, \\ x^2 + xy + y^2 = c^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \\ yz + zx + xy = c^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2x}{1 - x^2} = y, \\ \dfrac{2y}{1 - y^2} = z, \\ \dfrac{2z}{1 - z^2} = x. \end{cases}$$

8159. — Déterminer a, b, c de façon que ces nombres soient les racines de l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

8160. — Discriminant d'une équation algébrique. Application à l'équation du troisième degré.

8161. — Discuter la réalité des racines des équations

$$x^3 + px + q = 0, \qquad x^4 + px^2 + q = 0, \qquad x^5 + px + q = 0, \qquad x^n + px + q = 0.$$

8162. — Déterminer a de façon que dans l'équation $x^3 + 4x - a = 0$ la somme de deux racines soit égale à deux fois leur produit.

8163. — Former l'équation qui admet pour racines les diverses valeurs de $x = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} a\right)$. Trouver une transformation homographique transformant les racines. Montrer qu'il n'y en a que deux.

8164. — Déterminer z de façon que l'équation $5x^4 - 20x^3 + 18x^2 - 18x + 4 = 0$ ait une racine double, puis résoudre l'équation.

8165. — Soient a, b, c les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$. Développer par rapport aux puissances de z la fonction $e^{az} + e^{bz} + e^{cz}$. Cas où $p = 0$, $q = -1$.

8166. — Etant donné le polynome $x^3 + px + q$ qui n'a pas de racines multiples et sa dérivée $3x^2 + p$, montrer qu'il existe un polynome f_4 du premier degré et un polynome f_2 du second tel que l'on ait $(x^3 + px + q)f_2 + (3x^2 + p)f_4 = x$, et trouver les deux polynomes.

8167. — Démontrer que toute transformation rationnelle portant sur les racines d'une équation du troisième degré peut se ramener à une transformation de la forme $y = ax^2 + bx + c$.

8168. — Tout polynome du quatrième degré à coefficients réels peut être décomposé en un produit de deux polynomes du deuxième degré à coefficients réels. Décomposer les polynomes $x^4 - y^4 + 1)^2 - 1$, $(x^2 + b - 1)^2 - x^2$.

8169. — Etant donnée l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$, et les deux transformations $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$, $z = Ax^2 + Bx + C$, déterminer A, B, C de façon que les deux transformations soient identiques.

8170. — Calculer un polynome du quatrième degré $f(x)$ prenant les mêmes valeurs que $\sin x$ pour les valeurs de x égales à 0, $\frac{\pi}{2}$, π. Construire les courbes $y = \sin x$ et $y = f(x)$.

8171. — Discuter le nombre de racines réelles de l'équation

$$x^3 - 2x^2 - 3(x + ab) = 0,$$

suivant la position du point a, b dans le plan.

8172. — Conditions pour que l'équation [illegible] ait deux racines dont le produit soit égal à 1.

8173. — Conditions pour que les racines de l'équation [illegible] du quatrième degré soient en progression arithmétique.

8174. — Condition pour que l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ait deux racines dont le produit soit égal à 1.

8175. — Trouver un polynome $f(x)$ du troisième degré tel que l'on ait

$$f(-2) = 3, \qquad f(-1) = 7, \qquad f(1) = 7, \qquad f(2) = 3.$$

8176. — Éliminer x entre les équations $ax^2 + bx + c = 0$, $a'x^2 + b'x + c' = 0$.

8177. — Discuter l'équation $x^4 - 2x^2 - 1 = m$. Déterminer m pour que l'équation $x^4 - px^2 - 1 = 0$ ait deux racines dont le produit soit égal à 1.

8178. — Déterminer un polynome du troisième degré $f(x)$ tel que l'on ait $f(a) + f(b) + f(c) = 0$, $f'(a) + f'(b) + f'(c) = 0$, $f''(a) + f''(b) + f''(c) = 0$, a, b, c étant les racines de l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

8179. — Condition pour que dans l'équation $x^3 + px + q = 0$ l'une des racines soit égale au carré d'une autre.

8180. — Si l'on a $a + b + c = 0$, on a aussi [illegible]

8181. — Éliminer x entre les équations [illegible]

8182. — Quelles relations doit-il exister entre les coefficients d'une équation du cinquième degré pour qu'en désignant par a, b, c, d, e les cinq racines, a, b, c soient en progression arithmétique, b, c, d en progression géométrique et c, d, e en progression harmonique ?

8183. — On suppose qu'une racine a d'un polynome $f(x)$ annule $f''(x)$ et n'annule pas $f'(x)$. Montrer qu'il existe une relation entre a et les autres racines. Cas particulier où $f(x)$ est du troisième degré.

8184. — Discuter la réalité des racines de l'équation $x^3 - 6x^2 + 9x - a = 0$. Résoudre l'équation trigonométriquement au moyen des deux transformations $x = y + 2$, $y = 2z$.

8185. — Soient α, β, γ les racines de l'équation [illegible] Trouver l'équation qui a pour racines $\alpha - \beta^2$, $\beta - \gamma^2$, $\gamma - \alpha^2$, a étant une constante donnée.

8186. — Former l'équation aux sommes ou aux produits des racines deux à deux de l'équation du quatrième degré.

8187. — Soient α, β, γ, δ les racines de l'équation [illegible] sur un axe orienté Ox on porte des points A, B, C, D tels que l'on ait $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$, $OD = \delta$. Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que ces quatre points forment une division harmonique est

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0.$$

8188. — Calculer les intégrales :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + 2ax + a^2x^2}, \quad \int \frac{x\,dx}{x - x^2}, \quad \int_{-1}^{1} \frac{x^2\,dx}{1 + x}, \quad \int_0^{1} x\sqrt{\frac{1 - x}{1 - a}}\,dx,$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x - 1}}\,dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx, \quad \int \frac{dx}{[illegible]}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x - \sqrt{1 - x}}},$$

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - ax + x}}, \quad \int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - ax + x}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x - x^2}}, \quad \int_0^{1} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\int_1^{1} x\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\cos 2x - \cos x}, \quad \int \frac{dx}{\cos\frac{x}{2} - \cos x + \sqrt{2}}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}, \quad \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x},$$

$$\int \frac{\sin 3x}{\sin x}\,dx, \quad \int \frac{\cos x\,dx}{1 - \alpha^2 - 2\alpha\cos x}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x\,dx}{[illegible]}, \quad \int \frac{dx}{\sin x - \sin a}, \quad \int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos x},$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{5 + 4\cos x}, \quad \int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \cos^4 x \sin^2 x\,dx, \quad \int \frac{\cos^3 x\,dx}{1 + \sin^2 x}, \quad \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\cos x - \cos a},$$

$$\int \frac{1 - \cos x}{1 - 4\cos x}\,dx, \quad \int \cos^n x\,dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}, \quad \int \operatorname{tg}^n x\,dx, \quad \int \sin^n x\,dx;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x}, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} a}, \quad \int \frac{dx}{[illegible] - 2\cos x}, \quad \int \arcsin x\,dx, \quad \int x \sin x\,dx,$$

$$\int_1^{+\infty} x \operatorname{Lt} x\,dx, \quad \int x \operatorname{Lt} x\,dx, \quad \int \arcsin\sqrt{1 - x}\,dx, \quad \int \frac{x\,dx}{\cos x}, \quad \int x^2 \operatorname{arc\,tg} x\,dx, \quad \int \sqrt{a^2 - (x - 1)^2}\,dx,$$

$$\int \frac{\sin 4x}{\sin x}\,x\,dx, \quad \int \operatorname{L}\frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x}\,dx, \quad \int \operatorname{L}[1 - 2x\cos x + x^2]\,dx.$$

8189. — Etant donnée la quantité $\int_{u}^{v} f(x)dx$, calculer la dérivée de cette expression par rapport à u ou à v.

8190. — On pose $J_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(k\varphi - r\sin\varphi)d\varphi$, et on demande de vérifier l'égalité $kJ_k = \frac{r}{2}(J_{k-1} + J_{k+1})$.

8191. — Calculer le volume d'un ellipsoïde de révolution, d'un ellipsoïde quelconque, d'une calotte sphérique, d'un tore.

8192. — Etant donné un demi-cercle de diamètre AB, on divise l'arc AB en n parties égales par les points $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$. Calculer la limite de la moyenne arithmétique des quantités AM_i quand n augmente indéfiniment.

8193. — Même question en supposant que les projections des points M_i sur le diamètre AB divisent ce diamètre en n parties égales.

8194. — Résoudre les mêmes problèmes en remplaçant le cercle par une cycloïde.

8195. — Calculer le moment d'inertie d'un tore par rapport à son axe, d'un tétraèdre régulier par rapport à une hauteur, d'un ellipsoïde quelconque par rapport à un axe.

8196. — Intégrer les équations différentielles :

$$x(y^2 + ax^2)\frac{dy}{dx} + by^2 + cx^2 = 0, \qquad y' - y = e^x, \qquad xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad dx - (1 - x^2)(y^2)dx = dy - (1 - x^2)^2 dy,$$

$$(3xy^2 + 2y^3)y' + y^4 = 0, \qquad y' = \frac{xy - y^2}{1 - x}, \qquad \frac{dy}{dx} = ay + by^2, \qquad \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}$$

$$y' = y + y^3 x, \qquad \frac{dy}{dx}\cos^2 x = 3y^2 - 8y - 3, \qquad y'(1 + x^2) - xy = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

8197. — Intégrer l'équation $a^2\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 2z\frac{dz}{dy} + a^2 z^2 = 0$, et construire les courbes intégrales.

8198. — Intégrer les équations :

$$y'' - my = 0, \qquad y'' - y' - 2y = 0, \qquad y'' - 3y' + 2y = (x^2 + 1)^2, \qquad y'' - y = e^x, \qquad y'' - y' - 2y = x^2,$$

$$3y'' + 4y' = \cos x + \sin x, \qquad y'' + 9y = 2\cos 3x + 5\sin 2x, \qquad y'' - 4y' + 4y = x^2 + 1, \qquad y'' + ay' + by = x^2 + 1,$$

$$y'' - 2y' + y = x^2 e^x, \qquad y'' - 4y' + y = 3\cos x + x - 5, \qquad 3y'' - 2y' - y = \cos x, \qquad y'' + 4y = \sin 2x.$$

$$9y'' - 6y' + y = 0, \qquad y'' + 2y' + y = 8e^x, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + a^2 y = 4e^x, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - 2a\frac{dx}{dt} + a^2 x = k\sin t$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\sin x, \qquad y'' - y = x\sin x + \cos x, \qquad y'' + a^2 y = x\sin ax, \qquad 4y'' + 4y' + 1 = 4e^{-\frac{x-1}{2}},$$

$$4y'' + 4y' = 3y, \qquad y'' + x^2 y = 2x.$$

8199. — Intégrer le système $\frac{dx}{dt} = y + z, \quad \frac{dy}{dt} = z + x, \quad \frac{dz}{dt} = x + y.$

8200. — Intégrer l'équation $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + by = 0$, en faisant le changement de variables $x = e^t$.

II. — Trigonométrie.

8201. — Simplifier $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$.

8202. — Calculer $\sin\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{\pi}{5}$.

8203. — Simplifier $2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$.

8204. — Simplifier $\sum_{1}^{n} \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{a^2 + x(x+1)}$.

8205. — Trouver la limite pour n infini du produit $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$. En déduire la somme de la série $u_n = \operatorname{L}\cos\frac{x}{2^n}$.

8206. — Calculer $\sin\frac{a}{5} = x$ connaissant $\sin a = b$. Discuter graphiquement l'équation obtenue en appliquant le théorème de Rolle.

8207. — Si l'on a $a_1\cos\alpha + a_2\cos 2\alpha + \cdots + a_n\cos n\alpha = 0$, et $a_1\sin\alpha + a_2\sin 2\alpha + \cdots + a_n\sin n\alpha = 0$, on a aussi, quel que soit λ, $a_1\cos(\alpha + \lambda) + a_2\cos(2\alpha + \lambda) + \cdots + a_n\cos(n\alpha + \lambda) = 0$. Interprétation géométrique.

8208. — Construire les points dont les coordonnées vérifient l'équation $x\cos\alpha + y\sin\alpha = a\cos 2\alpha$.

8209. — Simplifier $4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \frac{\pi}{4}$.

8210. — Résoudre les équations

$$\operatorname{tg}(x + a) + \operatorname{tg}(x - a) = \operatorname{tg} 2x, \qquad \sin 2x = k\operatorname{tg} x, \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

8211. — Résoudre le système $\cos x + \cos y = a$, $\cos x - \cos y = b$. Discuter.

8212. — Calculer algébriquement et trigonométriquement $\sqrt{i}$, $\sqrt{1+i}$, $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$, $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt{1-i}$.

8213. — Résoudre $x^6+1=0$, $x^5+1=0$.

8214. — Résoudre un triangle connaissant : 1° les trois hauteurs ; 2° les angles et le produit $h_a h_b h_c$; 3° a, h_a, r ; 4° a, A, $h+c$.

8215. — Résoudre un triangle connaissant $a+b$ et sachant que B = 3A.

8216. — On donne un triangle isoscèle ABC, AB = AC, et on mène la médiane BM. Connaissant l'angle ABM, calculer l'angle MBC.

8217. — Dans un triangle rectangle en A, on a $\sin B = \frac{1}{2}$. Quelle relation existe-t-il entre a et b ?

8218. — Si trois nombres positifs a, b, c et trois angles compris entre 0 et π, A, B, C, vérifient les relations $A+B+C=\pi$, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$, ces quantités sont les éléments d'un triangle.

8219. — Dans tout triangle on a

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

8220. — Simplifier les expressions suivantes, fonctions des éléments d'un triangle :

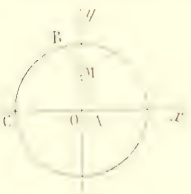
$$a-a\sin\frac{A}{2}-a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},\qquad 2\frac{b-c}{p}\cos A.$$

III. — Géométrie analytique à deux dimensions.

8221. — Construire les longueurs $x=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$, $y=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$.

8222. — Angle de deux droites imaginaires.

8223. — Étant données deux équations du deuxième degré $px^2+qx+r=0$, $p'x^2+q'x+r'=0$, on considère les points A, B et A′, B′ de l'axe des x qui ont pour abscisses les racines des deux équations. Former l'équation du deuxième degré qui a pour racines les abscisses des points qui divisent harmoniquement les segments AB et A′B′.



8224. — Étant donné un cercle et deux diamètres rectangulaires Ox, Oy, placer une droite AB de façon qu'elle coupe Oy en M, soit OM = OA, et que OA = AB.

8225. — On donne deux droites Ox, Oy et deux points P et Q. Par le point P on mène une sécante rencontrant Ox en A_1, Oy en B_1, puis le point Q qui rencontre Ox en A_2, puis A_2P qui rencontre Oy en B_2, puis B_2Q qui rencontre Ox en A_3, etc. La longueur de la ligne brisée $A_1B_1A_2B_2\ldots$ a-t-elle une limite ?

8226. — Construire les courbes représentées par les équations suivantes en coordonnées rectilignes :

$$y=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}},\qquad y=x+\sqrt{x^2+1},\qquad x^2+y^2=1,\qquad y^2=\sqrt{x}+\sqrt{x},\qquad y=\frac{2+\sqrt{1-x}}{x},$$

$$y=2-\sqrt{x}-\sqrt{1-x},\qquad y=x-1+\sqrt{\frac{x}{x-1}},\qquad x^2+(y-1)^2=y,\qquad y=\sqrt{x+\sqrt{1-x}},$$

$$y=x\ln x,\qquad y=\frac{1+x}{1-x}\ln\frac{1+x}{1-x},\qquad y=\ln(1+x),\qquad y=\frac{-1+x}{x},\qquad y=\int\frac{x+t}{\sqrt{a+bt}},$$

$$y=x^{\frac{1}{x-1}},\qquad y=\sin\left(\frac{1}{x}\operatorname{tg}\sin\frac{1}{x}\right),\qquad y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

$$y^2=\frac{1}{x^2-1+ax},\qquad y=\ln x,\qquad y=\frac{\sin x}{\cos^2 x},\qquad y=e^{1-x^2},$$

$$y=\frac{\sin x}{x},\qquad y=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}.$$

$\sin y=\sin x+a$. $\quad x\ln x=y\ln y$ points d'inflexion. $\quad \ln(1+x)$. $\quad x+\ln x=y$. $\quad \operatorname{ch}x-\operatorname{ch}y=a$.

$y^2x+y^2-yx^2-x^2=0$. $\quad xy=a(x+y)$. $\quad y^2-x^2+4x=0$. $\quad xy^2-y^2-3x+1=0$.

$(x-a)^2+(y-b)^2=k^2$. $\quad x^2x=y^2+2y-2$. $\quad x^2+y^2+2y=0$. $\quad x^2+y^2-2ay=0$;

$$\begin{cases}x=\cos t+\cos t,\\ y=\sin^3 t+\sin t;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a\cos t;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\frac{1}{t}-\frac{2}{t-1}-\frac{1}{t+1},\\ y=\frac{2}{t}-\frac{3}{t+1}-\frac{1}{t-1}.\end{cases}$$

8227. — Construire les courbes représentées par les équations suivantes en coordonnées polaires :

$\rho=\operatorname{tg}\omega+\frac{1}{\operatorname{tg}\omega}$. $\quad \rho=a\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$ équation rectiligne ; $\quad \rho=a\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}$. $\quad \rho=\frac{1}{\cos\frac{\omega}{4}}$. $\quad \rho=a\sqrt{\sin 2\omega}$.

$$\rho = \frac{\operatorname{tg}\omega}{1 - 2\sin\omega}, \quad \rho = \frac{\cos\omega}{2\cos\omega - 1}, \quad r = a + b\sin 2\theta, \quad \rho = \frac{a}{\cos\omega + \sin\omega}, \quad \rho = \frac{1}{\cos\omega + \sin\omega},$$

$$\rho^2 \cos\omega - 2\rho\sin\omega + \cos\omega = 0, \quad \rho^2 = -\rho^{\prime 2}\sin^2\omega + k^2.$$

8228. — Etudier les coniques :

$$x = 2y - 3 + \frac{5}{2 - y} \text{ (sommets et foyers)}, \quad (3y - 2x)(y - 1), \quad x = y - 3\sqrt{2 - x} \text{ (foyers)},$$

$$x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 2y - 1 = 0, \quad x^2 + 4xy + 7y^2 - 8x + 12y + 4 = 0 \text{ (axes)}, \quad x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 1 = 0.$$

8229. — Trouver la partie principale de la distance d'un point à une courbe à la tangente au point infiniment voisin.

8230. — Entre deux nombres imaginaires z et z' on établit la relation $z = z'^2$. On suppose que le point z' décrit un cercle tangent à l'origine à Oy; quel est le lieu décrit par le point z ?

8231. — On donne une courbe plane rapportée à deux axes rectangulaires et un point P dans son plan; M étant un point variable sur la courbe, déterminer le maximum ou le minimum de la longueur PM. Distinguer le maximum du minimum.

8232. — Trouver les trajectoires orthogonales des tangentes à une parabole, à une chaînette.

8233. — Développante de la chaînette.

8234. — Enveloppe des polaires d'un point fixe par rapport aux cercles qui passent par un point fixe et sont tangents à une droite fixe (*).

8235. — Enveloppe des droites

$$(ax + by)\operatorname{ch} t + (ax - by)\operatorname{sh} t = 1,$$

où t désigne un paramètre variable.

8236. — Lieu du symétrique d'un point fixe par rapport aux tangentes à la courbe $y^2 = x^3$.

8237. — On donne une courbe C, et par un point M de cette courbe on mène une droite dont la direction dépend de la position du point M sur la courbe. Sur cette droite on prend une longueur MP égale à une constante l. Peut-on définir la loi de la direction de MP pour que la tangente en P au lieu de ce point soit toujours la droite MP ? Cas particulier où la courbe C est un cercle.

8238. — On donne dans un plan un point A et une droite D, et on considère tous les cercles qui passent par le point A et qui ont leurs centres sur la droite D. Combien passe-t-il de ces cercles par un point M du plan ? Tangente au point M. Equation différentielle de la famille de cercles.

8239. — Construire la courbe $\rho^2\cos\omega - 2\rho\sin\omega + \cos\omega = 0$. Calculer l'aire comprise entre cette courbe et les rayons vecteurs $\omega = \frac{\pi}{4}$, $\omega = \alpha$ $\left(\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

8240. — Enveloppe de la droite $Y - f(x) = f'(x)(X - x)$ quand x varie.

8241. — Etudier la courbe $r = a\sqrt{\sin 2\theta}$. Est-elle unicursale ? En trouver une représentation paramétrique. Condition pour que quatre points de la courbe soient sur un cercle. Cercle osculateur en un point.

8242. — On donne une courbe passant par l'origine et tangente à l'origine à Ox. Développer les coordonnées d'un point M de cette courbe, voisin de l'origine, suivant les puissances ascendantes de l'arc $OM = s$.

8243. — Enveloppe de la droite $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ sachant qu'on a $a + b = k$.

8244. — Construire l'une des courbes intégrales de l'équation différentielle $y'' - 2y = 2(\cos 2x - 1)\sin 2x$.

8245. — Trouver les trajectoires orthogonales des cercles de rayon constant passant par un point fixe.

8246. — Développée de la parabole. Intersection avec la courbe. Aire comprise entre la parabole et sa développée.

8247. — Construire la courbe $x^4 + y^4 - a^2(x^2 + y^2) = 0$. Passer aux coordonnées polaires. Aire comprise entre la courbe et deux rayons vecteurs.

8248. — Sur la normale en un point M d'une courbe $y = f(x)$ on prend un point fixe A; on joint le point A à un point N variable sur la courbe et on étudie les variations de $AN^2 = u$. Quand N est en M, u est minimum ou maximum. Peut-on distinguer le cas qui se présente ?

8249. — Enveloppe de la droite $y = mx + \frac{d}{1 - m^2}$.

8250. — On considère la courbe $y = f(x)$ et deux points M et M' de cette courbe ayant pour abscisses x et $x + h$. Soit T le point de rencontre des tangentes en M et M' ; calculer la partie principale de l'aire du triangle TMM', en prenant h comme infiniment petit principal.

8251. — On donne un point O, un cercle fixe (O) et on considère tous les cercles homothétiques de (O) par rapport au point O ; on leur mène des tangentes par un point fixe. Lieu des points de contact.

8252. — On donne un cercle de diamètre AB ; M étant un point quelconque du cercle, on prend sur AB un point N tel que AN = AM. Lieu du milieu de MN. Construire la courbe. Aire de la boucle.

8253. — Asymptotes de la courbe $x^2y - y^3 + xy^2 + 2x^2 + 2y^2 - 2xy - x - y = 0$. Condition pour qu'il ait deux asymptotes parallèles réelles.

(*) Voir *Journal de Mathématiques élémentaires*, n° du 1er mars 1914, p. 53.

CONCOURS DE 1911 *(Suite.)*

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

(Cours spéciaux et places réservées aux sous-ingénieurs et conducteurs.)

Algèbre et Analyse.

I. — **1974** 1° Comment faut-il choisir les nombres réels a et b pour que l'équation

(1) $$x^2 - 2ax + b = 0$$

n'ait qu'une seule racine réelle et que cette racine soit comprise entre 0 et 1 ?

2° Quelle relation doit-il exister entre a et b pour que l'équation (1) ait une racine double d'une autre ?

3° Cette relation rentre-t-elle dans les conditions obtenues au 1° ? Pouvait-on prévoir qu'elle y rentrerait ou qu'elle n'y rentrerait pas ?

4° Prenant $b = 6$, résoudre l'équation (1) lorsque l'une de ses racines est le double d'une autre.

II. — 1° Etudier la fonction

$$y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$$

entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

2° Evaluer avec deux décimales, de préférence par la formule de Poncelet qui donne une limite de l'erreur commise, l'intégrale définie

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx,$$

puis, avec une décimale, la valeur moyenne de $\sqrt{\operatorname{tg} x}$ dans l'intervalle considéré.

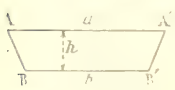
Nota. — Pour faire ce calcul, on se servira des tables indiquant les lignes trigonométriques naturelles avec 5 ou 6 décimales et des tables donnant les carrés des nombres ; on partagera l'intervalle de 78° à 88° en 10 parties égales ; on considérera comme exactes les valeurs de $\sqrt{\operatorname{tg} x}$ obtenues avec 3 décimales par défaut ou par excès au moyen des tables des carrés ; enfin on prendra 0,01745 comme rapport de la longueur de l'arc de 1° à la longueur du rayon.

(Durée : 4 heures.)

Géométrie et Mécanique.

Sur un plan incliné de $\alpha = 45°$ un disque pesant glisse à plat avec une vitesse moyenne initiale, $V = 5^m,00$ par seconde, ascendante, et faisant un certain angle avec l'horizontale du plan. Ralenti par le frottement $f = 0,10$, ce disque s'arrête en revenant à son niveau de départ. Calculer la longueur l de la trajectoire courbe décrite par son centre de figure.

Le trapèze isocèle AA'BB' à bases horizontales représente un fil sans pesanteur accroché à deux points A, A' fixes et portant en B, B' deux poids égaux p, p.



Sachant que $a = 3^m$, $b = 2^m$, $h = 1^m$, calculer la durée d'une petite oscillation simple du système dans le plan AA'.

(Durée : 4 heures.)

Epure de perspective.

Une coupole supposée creuse, opaque et d'épaisseur négligeable est constituée par un cylindre de révolution à axe vertical de $3^m,50$ de rayon et de $5^m,40$ de hauteur reposant sur le géométral et surmonté par une demi-sphère de même rayon.

On pratique dans cette coupole des ouvertures en la coupant par quatre plans verticaux dont les traces horizontales forment un carré circonscrit au cercle de 3^m de rayon ayant un même centre X que la base de la coupole. Chacune de ces ouvertures est prolongée vers l'extérieur par un berceau dont elle constitue la section droite, ces berceaux de 2^m de long, étant, comme la coupole, constitués par une surface opaque et d'épaisseur négligeable.

15^m

Le point de vue, projeté en O sur la droite XX' à une distance $OX = 15^m$ du centre, se trouve à $2^m,50$ au-dessus du géométral.

$\frac{h}{6}$

On demande de faire la perspective de l'ensemble formé par la coupole et les berceaux prolongeant ses ouvertures, de telle sorte que l'échelle du plan de front du point A soit de 1^{cm} par mètre, et que la direction OX soit perpendiculaire au tableau.

On fera coïncider la ligne d'horizon avec le grand axe de la feuille, et on placera le point de fuite principal à 10cm du bord gauche de la feuille.

La perspective sera strictement limitée aux parties vues dessinées en noir ; les lignes de construction seront tracées en rouge.

[illegible]

QUESTIONS PROPOSÉES

1975. — On considère une conique T tangente aux côtés d'un quadrilatère et un point P.

Trouver le lieu des centres des coniques qui passent par le point P, par deux des sommets opposés du quadrilatère et par les points de contact des tangentes issues du point P à T, lorsque la conique T varie.

Bourguignon-Neal.

1976. — Etant donnés trois axes rectangulaires $Oxyz$, un point mobile M (x, y, z) de masse 1 est sollicité par un point A, de masse 1, par une force attractive $F = -\mu^2 \times AM$, pendant que le point A décrit l'axe des x d'un mouvement uniforme de vitesse k ; au temps $t = 0$, le point A est en O et le point M part du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ avec une vitesse initiale dont les composantes sont a, b, c. 1° Trouver les expressions de x, y, z en fonction du temps ; 2° démontrer que l'hodographe du mouvement est une courbe plane, et trouver sur quelle ligne doit être le point M_0 pour que cet hodographe soit une circonférence ; 3° trouver la condition que doivent remplir les conditions initiales pour que la trajectoire soit une courbe plane ; dans le cas particulier où le plan de cette trajectoire est le plan des xz, et où on a en outre $\mu = 1$, $k = a$, $x_0 = 2a$, $z_0 = a$, et $c = 0$, construire la trajectoire.

A. M. [illegible]

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

1914. — *En prenant x comme infiniment petit principal, déterminer la partie principale des infiniment petits*

$$\frac{e^x + 1}{2} \times \frac{x}{e^x - 1} - 1, \qquad \frac{e^x - 4e^{\frac{x}{2}} + 1}{6} \times \frac{x}{e^x - 1} - 1, \qquad \frac{e^x - 3e^{\frac{x}{3}} - 3e^{\frac{2x}{3}} - 1}{8} \times \frac{x}{e^x - 1} - 1,$$

$$\frac{7e^x - 32e^{\frac{x}{4}} - 12e^{\frac{x}{2}} - 32e^{\frac{3x}{4}} - 7}{90} \times \frac{x}{e^x - 1} - 1$$

(Les coefficients numériques sont ceux des premières formules de quadrature de Cotes.)

La fraction $\dfrac{x}{e^x - 1}$ est égale à

$$\frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \cdots}$$

Le dénominateur sera donc toujours le même, à un facteur numérique près. En développant alors le numérateur en série et réduisant chaque expression au même dénominateur, on aura successivement les diverses parties principales ; il suffira de prendre à chaque fois le quotient des termes de plus petit degré.

On trouve ainsi :

$$\frac{x^2}{12}, \qquad \frac{x^3}{2880}, \qquad \frac{x^4}{6480}, \qquad \frac{x^5}{1935360}.$$

A. COURTOIS et A. NÉGRE.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1925. — *Soient* AB *un diamètre fixe d'un cercle* O, M *un point variable sur la circonférence*, C *et* C′ *deux points sur* AM, *tels que* $CM = C'M = k$:

1° *Le lieu des centres de similitude du cercle* O *et du cercle de diamètre* AM *est une sinusoïde droite* ;

2° *Le lieu des centres de similitude du cercle de diamètre* AM *et du cercle de diamètre* BM *est composé de deux courbes du troisième degré. Les construire.*

3° *Le lieu des centres de similitude du cercle* O *et du cercle de diamètre* MC (*ou* MC′) *se compose de deux courbes du quatrième degré. Les construire et calculer leurs aires.*

Soient $C(a, b)$ et $C'(a', b')$ les centres de deux cercles, r et r' leurs rayons ; le centre d'homothétie externe S de ces deux cercles est situé sur la droite CC′ et défini par l'égalité $\frac{\overline{SC}}{\overline{SC'}} = +\frac{r}{r'}$.

On en conclut que les coordonnées de ce point sont

$$(S)\qquad x = \frac{a - \frac{r}{r'}a'}{1 - \frac{r}{r'}} = \frac{ar' - a'r}{r' - r}, \qquad y = \frac{b - \frac{r}{r'}b'}{1 - \frac{r}{r'}} = \frac{br' - b'r}{r' - r}.$$

Pour le centre d'homothétie interne S_1, on a $\frac{\overline{S_1C}}{\overline{S_1C'}} = -\frac{r}{r'}$, et les coordonnées de ce point sont

$$(S_1)\qquad x = \frac{a + \frac{r}{r'}a'}{1 + \frac{r}{r'}} = \frac{ar' + a'r}{r' + r}, \qquad y = \frac{b + \frac{r}{r'}b'}{1 + \frac{r}{r'}} = \frac{br' + b'r}{r' + r}.$$

Nous allons utiliser ces formules dans les trois parties de la question.

1. Nous désignerons par R le rayon du cercle O, et nous prendrons comme origine le point A, comme axe des x le diamètre AB et comme axe des y la tangente au point A.

Soit φ l'angle de AM avec AB. Le rayon du cercle de diamètre AM est $R\cos\varphi$; le centre O′, milieu de AM, a pour coordonnées polaires $\omega = \varphi$, $\rho = R\cos\varphi$ et par suite pour coordonnées rectilignes $R\cos^2\varphi$ et $R\cos\varphi\sin\varphi$.

Nous aurons donc les coordonnées des points S et S_1 en appliquant les formules précédentes, et en posant $a = R$, $b = 0$, $r = R$, $a' = R\cos^2\varphi$, $b' = R\cos\varphi\sin\varphi$, $r' = R\cos\varphi$.

On trouve pour les coordonnées du point S

$$(1)\qquad x = -R\cos\varphi, \qquad y = R\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1 - \cos\varphi},$$

et pour celles du point S_1 $\qquad x = -R\cos\varphi, \qquad y = R\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1 + \cos\varphi}$.

Celles-ci se déduisent des formules (1) en changeant φ en $\pi + \varphi$. Par suite, les points S et S_1 décrivent la même courbe algébrique, dont nous aurons l'équation en éliminant φ entre les équations (1). Nous en tirons

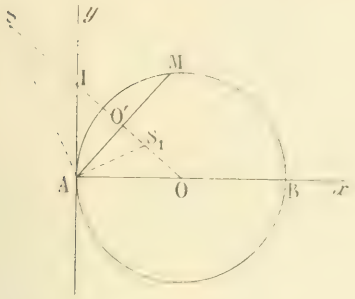
$$\cos\varphi = -\frac{x}{R} \qquad \text{et} \qquad y^2 = \frac{R^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(1 - \cos\varphi)^2} = \frac{R^2\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)\frac{x^2}{R^2}}{\left(1 - \frac{x}{R}\right)^2}$$

ou, en divisant haut et bas par $1 + \frac{x}{R}$,

$$(x^2 + y^2)x - R(x^2 - y^2) = 0.$$

On reconnaît l'équation d'une strophoïde droite qui a pour point double le point A et pour sommet le point O.

La solution géométrique est d'ailleurs très simple. Il suffit de remarquer que les points S et S_1 sont les points de rencontre le la droite OO′ et des bissectrices de l'angle OAO′. On a donc $\widehat{O'AS_1} = \widehat{S_1AO}$.



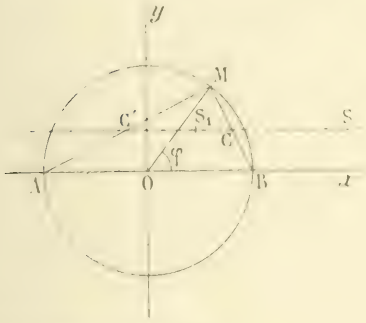
D'autre part

$$\widehat{IS_1A} = \widehat{OAS_1} + \widehat{AOO'}, \qquad \widehat{IAS_1} = \widehat{S_1AO'} - \widehat{O'AI},$$

on en conclut $\widehat{IAS_1} = \widehat{IS_1A}$; par suite le triangle IAS_1 est isocèle, on a $IA = IS_1$, et on verrait de même que $IA = IS$. Ce qui montre que les points S et S_1 décrivent une strophoïde droite.

2. Dans cette question, il sera préférable de prendre comme axe des x le diamètre AB et comme axe des y le diamètre perpendiculaire. Le point M sera bien défini par l'angle φ que fait le rayon OM avec Ox.

Nous aurons alors, pour le cercle de diamètre BM,



$$r = R\sin\frac{\varphi}{2}, \qquad a = R\cos^2\frac{\varphi}{2}, \qquad b = R\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$$

et, pour le cercle de diamètre AM,

$$r = R\cos\frac{\varphi}{2}, \qquad a = -R\sin\frac{\varphi}{2}, \qquad b = R\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$$

Les coordonnées du point S sont alors

$$(2) \qquad x = \frac{R\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}}, \qquad y = R\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2},$$

et celles du point S_1

$$(3) \qquad x_1 = \frac{R\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}}, \qquad y_1 = R\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Si dans les formules (2) on change φ en $\pi - \varphi$, x se change en x_1 et y en $-y_1$; on en conclut que le lieu des points S et S_1 se compose de deux courbes symétriques par rapport à Ox, ces courbes ayant pour équations paramétriques les équations (2) et (3).

Nous allons construire la courbe définie par les équations (2). Nous en tirons $\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{y}{R}$,

puis successivement $\quad x^2\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 = R^2\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^2$,

$$x^2\left[\cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2} - 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right] = R^2\left[\cos^4\frac{\varphi}{2} + \sin^4\frac{\varphi}{2} - 2\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]$$

$$x^2\left[1 - 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right] = R^2\left[\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^2 - 3\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\left(\sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2}\right)\right.$$

$$\left. - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\right].$$

$$x^2\left[1 - 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right] = R^2\left[1 - 3\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\right]$$

En remplaçant $\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$ par $\frac{y}{R}$, nous avons

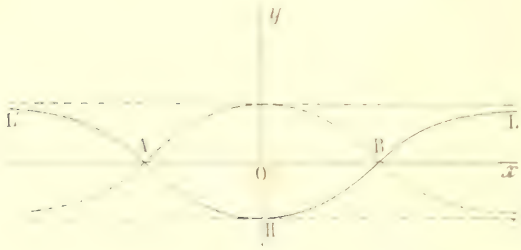
$$x^2\left(1-\frac{2y}{R}\right)=R^2\left(1-\frac{3y^2}{R^2}+\frac{2y^3}{R^3}\right).$$

ou
$$x^2(R-2y)=2y^3-3Ry^2+R^3,$$

ou
$$2y(x^2+y^2)-Rx^2-3y^2-R^2=0.$$

Le lieu se compose de cette cubique et de la cubique symétrique par rapport à Ox.

La construction de ces courbes ne présente aucune difficulté.

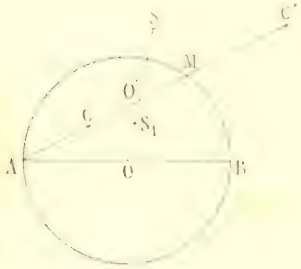


En résolvant par rapport à x^2 on a

$$x^2=\frac{(2y-R)(y-R)^2}{R-2y};$$

à chaque valeur de y comprise entre $-\frac{R}{2}$ et $+\frac{R}{2}$ correspondent deux valeurs réelles de x égales et de signes contraires, et quand y croît de $-\frac{R}{2}$ à $+\frac{R}{2}$ la valeur positive de x croît de 0 à $+\infty$, en passant par la valeur R pour $y=0$. On obtient ainsi la branche de courbe HBL, et sa symétrique HAL′ par rapport à Oy.

Le lieu cherché se compose de cette cubique et de la cubique symétrique par rapport à Ox.



3. Cette troisième partie peut se résoudre analytiquement comme les précédentes; nous nous bornerons à donner une solution géométrique.

Soit O′ le milieu de CM, et S et S_1 les centres d'homothétie du cercle O et du cercle de diamètre CM. Nous avons

$$\frac{\overline{SO}}{\overline{SO}}=\frac{R}{O'M}=\frac{2R}{k}\quad\text{ou}\quad\frac{\overline{SO}}{\overline{SO}-\overline{OO}}=\frac{2R}{k},\quad\text{et}\quad\frac{\overline{SO}}{\overline{OO}}=\frac{2R}{k-2R},$$

et enfin
$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OO}}=\frac{2R}{2R-k}.$$

Puisque O′M est constant et égal à $\frac{k}{2}$, le point O′ décrit un limaçon de Pascal; par suite, le point S décrit un limaçon homothétique, le centre d'homothétie étant le point O et le rapport d'homothétie étant égal à $\frac{2R}{2R-k}$.

De même, nous avons

$$\frac{\overline{S_1O}}{\overline{S_1O}}=-\frac{R}{O'M}=-\frac{2R}{k},\quad\frac{\overline{S_1O}}{\overline{S_1O}-\overline{OO}}=\frac{-2R}{k},\quad\frac{\overline{S_1O}}{\overline{OO}}=\frac{-2R}{2R+k}$$

et enfin
$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OO}}=\frac{2R}{2R+k}.$$

ce qui montre que le point S_1 décrit l'homothétique du limaçon lieu de O′, le rapport d'homothétie étant cette fois $\frac{2R}{2R+k}$.

Pour le cercle de diamètre MC′, on a les mêmes lieux, car le milieu de MC′ décrit le même limaçon que le point O′.

Le calcul des aires de ces limaçons est une question classique.

R. GUÉLER, à Dordives (Loiret).

Bonnes solutions par MM. André Courtois, à Sedan; Doligez, 91e de ligne; L. Gabeaud, lycée de Bordeaux; G. Lach, à Rodez; Maresgalchi; Jean Ottenheimer, lycée de Nancy; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes; L. Simon, à Fourmies; J. Soubaigné.

1928. — *Par un point P du plan d'une parabole, on peut mener quatre cordes d'une même longueur donnée. Le lieu des points P tels que deux de ces cordes soient rectangulaires est une cubique; calculer l'aire totale comprise entre la cubique et son asymptote.*

La parabole ayant pour équation $y^2 - 2px = 0$, si QR est une des cordes passant par P, de longueur l, et si (α, β) sont les coordonnées de P, l'équation de cette corde est $y - \beta = m(x - \alpha)$.

On en déduit l'équation aux ordonnées y_1 et y_2 de Q et R,

$$my^2 - 2py + 2p\beta - m\alpha = 0,$$

d'où (1)
$$y_1 + y_2 = \frac{2p}{m}, \qquad y_1 y_2 = \frac{2p\beta - m\alpha}{m}.$$

Or $l^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \left(\frac{y_1^2}{2p} - \frac{y_2^2}{2p}\right)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \frac{(y_1 - y_2)^2 [(y_1 - y_2)^2 + 4p^2]}{4p^2}$,

ou (2)
$$l^2 = \frac{[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2][(y_1 + y_2)^2 + 4p^2]}{4p^2}.$$

En substituant les valeurs (1) dans (2), on obtient $l^2 = \frac{4p^2(m^2 - 1)(2\alpha m^2 - 2m\beta + p)}{m^4}$, d'où

donc l'équation du quatrième degré en m, donnant les coefficients angulaires des quatre cordes de longueur l passant par P :

(3)
$$(8p\alpha - l^2)m^4 - 8p\beta m^3 - 4p(2\alpha - p)m^2 - 8p\beta m - 4p^2 = 0.$$

Il faut chercher la condition pour que si m_1, m_2, m_3, m_4 sont les quatre coefficients angulaires, racines de (3), l'on ait

(4)
$$m_1 m_2 = -1.$$

Or, soit en général l'équation $Am^4 + Bm^3 + Cm^2 + Dm + E = 0$.

On a les relations entre les coefficients et les racines

(5)
$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = -\frac{B}{A}$$

(6)
$$(m_1 + m_2)m_3 + m_4 + m_1 m_2 = \frac{C}{A}$$

(7)
$$m_1 m_2 (m_3 + m_4) + m_3 m_4 (m_1 + m_2) = -\frac{D}{A}$$

(8)
$$m_1 m_2 m_3 m_4 = \frac{E}{A}.$$

(8) devient, d'après (4),
$$m_3 m_4 = -\frac{E}{A}.$$

(6) et (7) deviennent par suite

(9)
$$(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) = \frac{A - C + E}{A}$$

(10)
$$A(m_1 + m_2) + E(m_3 + m_4) = D.$$

(5) et (10) donnent
$$m_1 + m_2 = \frac{(BE - AD)}{A(E - A)}, \qquad m_3 + m_4 = \frac{B + D}{E - A}.$$

Ces valeurs, portées dans (9), donnent la relation

(11)
$$(B + D)(BE - AD) = (E - A)^2(A - C + E).$$

Or, ici, dans l'équation (3),

$$A = 8p\alpha - l^2, \qquad B = -8p\beta, \qquad C = -4p(2\alpha - p), \qquad D = -8p\beta, \qquad E = -4p^2.$$

En portant ces valeurs dans (11), on obtient pour le lieu du point P, la cubique

(12)
$$128p^2\beta^2(8p\alpha - 4p^2 - l^2) = (8p\alpha - l^2 - 4p^2)^2(16p\alpha - 8p^2 - l^2).$$

Écrivons-la ainsi
$$\beta = \frac{(8p\alpha - l^2 - 4p^2)}{8p\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(16p\alpha - 8p^2 - l^2)}{8p\alpha - 4p^2 - l^2}}.$$

ou
$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[x - \frac{l^2 - 4p^2}{8p}\right]\sqrt{\frac{-2\left[x - \frac{8p^2 - l^2}{16p}\right]}{x - \frac{4p^2 - l^2}{8p}}}.$$

En posant

$$(13)\qquad x_1 = \frac{4p^2 - l^2}{8p}, \qquad x_2 = \frac{l^2 - 8p^2}{16p}, \qquad x_3 = \frac{l^2 - 4p^2}{8p},$$

l'équation de la cubique devient

$$(14)\qquad y = \frac{x - x_2}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2(x - x_3)}{x - x_1}} = (x - x_2)\sqrt{\frac{x_1 - x}{x - x_3}}.$$

La courbe a pour asymptote la droite $x = x_1$, pour sommet le point $(x = x_3,\ y = 0)$, et pour point double le point $(x = x_2,\ y = 0)$. Les tangentes en ce point double ont pour coefficients angulaires

$$\frac{y}{x - x_2} = \pm\sqrt{\frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3}} = \frac{\sqrt{16p^2 + l^2}}{4p}\sqrt{-1},$$

et sont imaginaires. Le point double est donc isolé et quelle que soit la valeur de l, la courbe n'a qu'une branche réelle, de sommet $(x = x_3,\ y = 0)$, asymptote à la droite $x = x_1$. On a toujours $x_3 < x_1$.

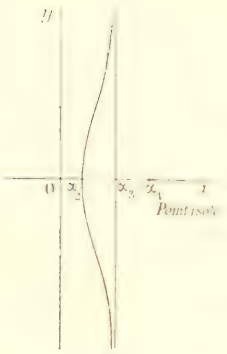
L'axe des y rencontre la courbe aux points

$$x = 0, \qquad y = \frac{x_2}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2x_3}{x_1}} = \frac{4p^2 - l^2}{8p\sqrt{2}}\sqrt{\frac{8p^2 - l^2}{l^2 - 4p^2}}.$$

Ces points ne seront réels que si

$$2p\sqrt{2} < l < 2p.$$

Aire de la courbe. — Cherchons l'aire avec l'équation (14). Posons $\frac{x - x_3}{x - x_1} = \sin^2\varphi$, d'où



$$x = x_1\cos^2\varphi + x_3\sin^2\varphi, \qquad \frac{dx}{d\varphi} = 2(x_1 - x_3)\sin\varphi\cos\varphi,$$

et, d'après (14),
$$y = (x_1 - x_2)\cos\varphi - (x_3 - x_2)\sin\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

La dérivée de l'aire est

$$\frac{dU}{d\varphi} = y\frac{dx}{d\varphi} = 2(x_1 - x_3)\sin\varphi\cos\varphi\,(x_1 - x_2 - (x_1 - x_3)\sin^2\varphi),$$

$$\frac{dU}{d\varphi} = 2(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)\sin\varphi\cos\varphi - 2(x_1 - x_3)^2\sin^3\varphi\cos\varphi.$$

Or, l'aire totale s'obtient en intégrant de $\varphi = 0$ à $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et doublant.

Donc

$$U = 4(x_1 - x_3)\left[(x_1 - x_2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi - (x_1 - x_3)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi\right].$$

$$U = 4(x_1 - x_3)\left[(x_1 - x_2)\frac{1}{4} - (x_1 - x_3)\frac{3}{16}\right].$$

$$(15)\qquad U = \frac{(x_1 - x_3)^2}{4}(4x_1 - 4x_2 - 3x_1 + 3x_3) = \frac{(x_1 - x_3)^2}{4}(x_1 + 3x_3 - 4x_2).$$

Mais, d'après (13), $x_1 - x_2 = \frac{l^2}{16p}$, $x_1 + 3x_3 - 4x_2 = \frac{164p^2 - l^2}{16p}$.

On a donc

(16) $$U = \frac{\pi p^2(64p^2 - l^2)}{1024p^2}. \quad (^1)$$

Cas particuliers. — 1° Si $l = 0$, on a $U = 0$. Le lieu est alors le point de rencontre de deux tangentes rectangulaires, c'est-à-dire la directrice $2x + p = 0$, car (12) s'écrit alors

$$(2x + p)(4y^2 + (2x - p)^2) = 0.$$

2° Si $l = p$, on a $$U = \frac{65\pi p^2}{1024}.$$

3° Si $l = 2p$, l'axe des y est asymptote, alors $x_1 = p$, $x = -\frac{p}{4}$, $x_2 = 0$,

$$U = \frac{17\pi p^2}{64}$$

4° Si $l = 2p\sqrt{2}$, le sommet de la cubique coïncide avec le sommet de la parabole et le point ω avec le foyer de la parabole (²). Dans ce cas,

$$U = \frac{9\pi p^2}{16}.$$

Remarque. — Il vient tout naturellement à l'idée, après ces intéressants résultats, de chercher la même question pour l'ellipse.

Le lecteur pourra s'exercer sur cette nouvelle question. Voici les résultats qu'il doit trouver.

L'ellipse ayant pour équation $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, les quatre cordes de longueur l qui passent par un point $P(\alpha, \beta)$ ont leurs coefficients angulaires racines de l'équation en m

$$4a^2b^2(m^2 + 1)[(a^2 - \alpha^2)m^2 + 2m\alpha\beta + (b^2 - \beta^2)] - l^2(a^2m^2 + b^2)^2 = 0.$$

Le lieu de P est, en posant $\frac{l^2}{4a^2b^2} = \frac{1}{k^2}$, la sextique

$$\left[\alpha^2 + \beta^2 - c^2 - \frac{(a^2 - b^2)^2}{k^2}\right]^2\left[2(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2) - \frac{(a^2 + b^2)^2}{k^2}\right] + 8\alpha^2\beta^2\left[\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 - \frac{(a^2 + b^2)}{k^2}\right] = 0,$$

dont le terme du sixième degré est $2(\alpha^2 + \beta^2)^3$.

C'est donc une courbe fermée dont il serait intéressant de calculer l'aire. Mais ce calcul semble devoir être ardu.

E. N. BARISIEN.

Bonnes solutions : MM. Jambert, à Saint-Etienne ; Marescalchi ; L. Simon, à Toulouse ; Jean Sibertin, à Mont-de-Marsan ; J. Dessirier.

Assez bonnes solutions : MM. R. Guérin, à Dordives (Loiret) ; G. Lion, à Rodez ; J. Ortenberger, élève de Nancy.

1929. — *Par le point de rencontre O de l'axe d'une parabole et de sa directrice, on mène une sécante qui coupe la courbe en deux points M et N. On joint ces points au foyer F par les droites FM, FN, et par M et N on trace des parallèles à l'axe, qui rencontrent respectivement FN en M' et FM en N'.*

1° *Démontrer que le trapèze MM'N'N est inscriptible et circonscriptible. Lieu des points de contact du cercle inscrit avec les côtés.*

2° *La différence* $\frac{1}{NN'} - \frac{1}{MM'}$ *des inverses des bases du trapèze est constante.*

3° *Le cercle inscrit au trapèze est orthogonal à une famille de cercles, et si l'on joint un des cercles de la famille, l'axe radical de ce cercle et du cercle inscrit passe par un point fixe.*

4° *Enveloppe de l'axe radical du cercle inscrit et du cercle de centre A et de rayon AP. A est le sommet de la parabole et P le centre du cercle inscrit au trapèze.*

(¹) *Points d'inflexion de la cubique.* — Un calcul assez long m'a fait trouver les points d'inflexion de cette courbe. Pour le lecteur qui aura la curiosité de faire cette recherche, en voici les coordonnées :

$$x = \frac{(l^2 + 48p^2)^2 - 48lp^2}{8(l^2 + 16p^2)^2 - l^2}, \qquad y = \frac{4l(l^2 - 16p^2)}{8(l^2 + 16p^2)^2 - l^2}.$$

(²) Ce cas a été traité directement dans la *Revue*, question 1927, p. 142 de la 15e année.

5° *Les tangentes en* M *et* N *à la parabole coupent l'axe aux points* T *et* S. *L'enveloppe de l'axe radical du cercle de diamètre* TS *et du cercle inscrit au trapèze.*

1° Prenons pour axes l'axe de la parabole et la perpendiculaire à l'axe passant par le foyer.

L'équation de la parabole est

$$(1) \qquad y^2 - 2px - p^2 = 0.$$

Considérons deux droites FM et FN également inclinées sur l'axe et prenons l'angle $XFM = \alpha$ pour paramètre variable.

L'équation de FM est

$$(2) \qquad y = x \operatorname{tg} \alpha.$$

Des équations (1) et (2), on tire pour coordonnées de M $x = \dfrac{p\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$, $y = \dfrac{p\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

L'équation de FN est

$$(3) \qquad y = x \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -x \operatorname{tg} \alpha.$$

De (1) et (3) on tire pour coordonnées de N, $x = -\dfrac{p\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$, $y = \dfrac{p\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

L'équation de MN est donc

$$\frac{x - \dfrac{p\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}{-\dfrac{p\cos\alpha}{1+\cos\alpha} - \dfrac{p\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{y - \dfrac{p\sin\alpha}{1-\cos\alpha}}{\dfrac{p\sin\alpha}{1+\cos\alpha} - \dfrac{p\sin\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

On en tire $x\sin\alpha + p\sin\alpha = y$.

Cette droite passe par le point fixe de coordonnées $y = 0$ et $x = -p$. Ce point n'est autre que le point O d'intersection de l'axe et de la directrice.

Donc si l'on mène la sécante ONM, les droites FM et FN sont également inclinées sur l'axe et le trapèze NN'MM' est isocèle et par conséquent inscriptible.

L'équation de la tangente en M à la parabole est

$$y - \frac{p\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \left(x - \frac{p\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right).$$

Différentions l'équation de la parabole, $2y\,dy - 2p\,dx = 0$, d'où $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{p}{y}$. Or y en M vaut $\dfrac{p\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$, d'où $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, et l'équation de la tangente devient

$$y - \frac{p\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(x - \frac{p\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right).$$

$$(4) \qquad y = \frac{x(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha} + \frac{p\sin\alpha}{1-\cos\alpha} - \frac{p\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{p}{\sin\alpha}.$$

Si l'on fait $x = 0$, on a $y = \dfrac{p}{\sin\alpha}$. La tangente en M coupe l'axe des y au point $y = \dfrac{p}{\sin\alpha}$.

De même la tangente en N a pour équation

$$y - \frac{p\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(x + \frac{p\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right).$$

On en tire

$$(5) \qquad y = \frac{x(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha} + \frac{p}{\sin\alpha}.$$

Si dans (4) et (5) l'on fait $x = 0$, on a $y = \dfrac{p}{\sin\alpha}$. Donc les deux tangentes en M et N coupent l'axe des y au même point. Or elles sont bissectrices des angles du trapèze. Par raison de symétrie

les bissectrices des angles N′ et M′ passent au même point P, et ce point est à égale distance des quatre côtés du trapèze. Le trapèze est donc circonscriptible.

Le rayon du cercle inscrit est $\frac{1}{2}\,BC = \frac{1}{2}\left(\frac{p\sin\alpha}{1-\cos\alpha} - \frac{p\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right) = p\cot g\,\alpha$.

Lieux des points de contact du cercle inscrit et des côtés du trapèze. — Un premier lieu est l'axe des y. Pour avoir le lieu des points de contact du cercle inscrit et des côtés non parallèles, il suffit d'écrire l'équation de la perpendiculaire PD abaissée de P sur FM, et, par l'intermédiaire de l'équation (2) de FM, d'éliminer α.

L'équation de la perpendiculaire PD est

$$x\cos\alpha + \sin\alpha\left(y - \frac{p}{\sin\alpha}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad x\cos\alpha - y\sin\alpha = p.$$

L'équation (2) de FM est $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Éliminons α, il vient $\sin\alpha = \frac{py}{x^2+y^2}$ et $\cos\alpha = \frac{px}{x^2+y^2}$.

D'où l'on tire $p(x^2+y^2) = (x^2+y^2)^2$ ou $x^2+y^2 = p^2$.

Le lieu demandé est le cercle de centre F et de rayon p. Par raison de symétrie, il donne le lieu du point de contact de FM′ et du cercle P.

Le cercle $x^2+y^2 = p^2$ est orthogonal au cercle inscrit P.

En effet l'équation du cercle inscrit P est

$$x^2 + \left(y - \frac{p}{\sin\alpha}\right)^2 = p^2\cot g^2\,\alpha$$

On en tire

$$(6) \qquad x^2 + y^2 - \frac{2py}{\sin\alpha} + p^2 = 0.$$

La condition d'orthogonalité se réduit à $p^2 - p^2 = 0$.

2° Les coordonnées des points M et N donnent immédiatement

$$MM = \frac{2p\cos\alpha}{1-\cos\alpha} \qquad \text{et} \qquad NN = \frac{2p\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

On a donc
$$\frac{1}{NN} - \frac{1}{MM} = \frac{1+\cos\alpha}{2p\cos\alpha} - \frac{1-\cos\alpha}{2p\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{2p\cos\alpha} = \frac{1}{p}$$

On pourrait remarquer aussi que le produit des ordonnées des points M et N est constant. En effet, ce produit est
$$\frac{p\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\frac{p\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{p^2\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} = p^2.$$

3° *Cercles orthogonaux au cercle inscrit* P. — Considérons un cercle quelconque

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = R^2 \qquad \text{ou} \qquad x^2+y^2-2mx-2ny+m^2+n^2-R^2 = 0.$$

L'équation du cercle inscrit est $x^2+y^2 - \frac{2py}{\sin\alpha} + p^2 = 0$.

La condition d'orthogonalité est $\frac{2np}{\sin\alpha} - (m^2+n^2-R^2+p^2) = 0$.

Cette condition sera indépendante de α si l'on fait $n = 0$.

Il reste alors $m^2 - R^2 + p^2 = 0$ ou $R^2 = m^2 + p^2$.

On pourra donc prendre m quelconque, et tous les points de l'axe des x pourront servir de centres à des cercles orthogonaux au cercle inscrit P. Ces cercles devront avoir pour rayon la droite qui joindra le centre choisi au point I où l'axe des y coupe la parabole.

L'équation générale de ces cercles est

$$(x-m)^2 + y^2 = m^2 + p^2 \qquad \text{ou} \qquad x^2+y^2-2mx-p^2 = 0.$$

Axe radical. — Supposons m invariable et faisons varier α. L'axe radical des deux cercles est

$$mx - \frac{py}{\sin\alpha} + p^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad mx\sin\alpha = p^2\sin\alpha - py.$$

Cette droite passe par le point fixe $x = 0$ et $x = -\frac{p^2}{m}$.

Le centre du cercle et le point fixe sont réciproques ou inverses. Le produit de leurs distances à l'origine F est constant : $-m \times \frac{p^2}{m} = -p^2$.

4° Le cercle de centre A et de rayon AP, A étant le sommet de la parabole donnée, est

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{\sin^2\alpha} + \frac{p^2}{4} \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - px - \frac{p^2}{\sin^2\alpha} = 0.$$

L'équation (6) du cercle inscrit, combinée avec la précédente, donne pour axe radical des deux cercles

$$\frac{2px}{\sin\alpha} - px = p^2 - \frac{p^2}{\sin^2\alpha} \quad \text{ou} \quad x\sin^2\alpha + 2p\sin\alpha - p(1 - \sin^2\alpha).$$

La dérivée par rapport à α est

$$2x\sin\alpha\cos\alpha + 2p\cos\alpha = 2p\sin\alpha\cos\alpha \quad \text{ou} \quad x\sin\alpha + p = p\sin\alpha, \quad \text{d'où} \quad \sin\alpha = \frac{y}{p - x}.$$

Éliminons α : $x\left(\frac{y}{p-x}\right)^2 + 2p\left(\frac{y}{p-x}\right) + x\left[1 - \frac{x^2}{(p-x)^2}\right]$.

$$x(y^2 - 2xp + x^2) = p(y^2 + x^2 - 2px + y^2), \quad \text{ou} \quad (x - p)(y^2 - x^2 - px) = 0.$$

La solution $x = p$ est manifestement à rejeter, il reste

$$y^2 - px - x^2 = 0.$$

C'est une parabole ayant son sommet en O', symétrique de O par rapport à F, et tournant sa concavité vers la région négative de l'axe des x. Son paramètre est $\frac{p}{2}$.

Elle passe en I et I, car pour $x = 0$ ou $x = -p$.

5° L'équation (4) de la tangente en M donne pour abscisse de T $\frac{-p}{1 - \cos\alpha}$ et l'équation (5) de la tangente en N donne pour abscisse de S : $\frac{-p}{1 + \cos\alpha}$.

L'abscisse du milieu de TS est $-\frac{p}{2}\left(\frac{1}{1 - \cos\alpha} + \frac{1}{1 + \cos\alpha}\right)$, ou $\frac{-p}{\sin^2\alpha}$.

La valeur absolue du segment TS est $p\left(\frac{1}{1 - \cos\alpha} - \frac{1}{1 + \cos\alpha}\right) = \frac{2p\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$, et le rayon du cercle de diamètre TS est $\frac{p\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

L'équation du cercle TS est donc

$$\left(x + \frac{p}{\sin^2\alpha}\right)^2 + y^2 = \frac{p^2\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha}, \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 + \frac{2px}{\sin^2\alpha} + \frac{p^2}{\sin^2\alpha} = 0.$$

En tenant compte de l'équation (6) du cercle inscrit, on a pour axe radical des deux cercles

$$\frac{2px}{\sin^2\alpha} + \frac{2py}{\sin\alpha} + p^2 - \frac{p^2}{\sin^2\alpha} = -\frac{p^2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

On en tire $\qquad 2x + 2y\sin\alpha + p\cos^2\alpha = 0.$

La dérivée est $2y\cos\alpha - 2p\sin\alpha\cos\alpha = 0$ ou $y = p\sin\alpha$ et $\sin\alpha = \frac{y}{p}$.

Éliminons α, $2x + \frac{2y^2}{p} + p\left(1 - \frac{y^2}{p^2}\right) = 0$, ou $y^2 = 2px + p^2 = 0$.

C'est une parabole symétrique de la parabole donnée par rapport à la tangente au sommet.

R. MANEN, à Albi.

Bonnes solutions de MM. A. Coutois ; Dorsez, 94e d'infanterie ; G. Estrem ; Ch. Guillaume ; Lambert à Saint-Étienne ; J. Ottenheimer, lycée de Nancy ; H. Recoing ; A. Rousseau ; L. Simon ; P. Vergnes ; J. Soubaigne.

CONCOURS DE 1911 (*Suite*).

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Cours préparatoires*).

Algèbre et Analyse.

I. — **1977.** Soit $y = \sqrt{1 + x^2}$.

1° Calculer les coefficients numériques du développement convergent de la forme

$$y = x + a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

qui satisfait à cette relation pour les valeurs de x suffisamment grandes, $a_0, a_1, a_2, \ldots$ étant des constantes, on pourra poser $x = \frac{1}{z}$; vérifier la convergence de la série obtenue.

2° Peut-on ensuite indiquer une valeur positive x_0 de x, aussi petite que possible et telle que, lorsque $x > x_0$, on ait, à 0,01 près,

$$y - x = a_0 + \frac{a_1}{x}?$$

3° Trouver, soit en s'aidant du développement ci-dessus de y, soit autrement, la limite de l'expression

$$\frac{\left(1 - \cos z\right)\left(y - \frac{1}{z}\right)^{\alpha} \cos^{\alpha}(z + 45^\circ)}{z^{\alpha} \sin z^2}$$

lorsque z tend vers 0, α étant un nombre donné, positif ou négatif. A quelle condition doit satisfaire α pour que cette limite soit finie et différente de zéro?

II. — **1978.** Calculer $\int \frac{x^4}{1 + x^2} \operatorname{arc\,tg} x \, dx$.

Indiquer plus généralement un procédé pour intégrer

$$\int \frac{f(x^2)}{1 + x^2} \operatorname{arc\,tg} x \, dx,$$

$f(x^2)$ étant un polynome en x^2.

Géométrie analytique.

1979. — 1° Former en coordonnées rectangulaires l'équation de l'enveloppe des cercles passant par l'origine et interceptant sur la droite fixe $x = l$ une corde de longueur constante et égale à $2l$.

2° Passer des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires en prenant l'origine pour pôle et déduire de l'équation en coordonnées polaires une définition géométrique très simple de l'enveloppe.

3° Indiquer la forme de l'enveloppe et en déterminer les points d'inflexion.

Calcul numérique.

Calculer aussi exactement que possible, à l'aide des tables à cinq décimales, les valeurs de l'expression

$$(1) \qquad y = x(\sin x + 2\cos x),$$

pour $x = 0$, 10, 20, 30, 40 et 50 grades.

En déduire approximativement l'aire de la courbe (1) en coordonnées cartésiennes pour x comprisé entre 0 et 50 grades.

Mécanique.

I. — Trouver le centre de gravité du segment homogène A'SA limité par l'arceau de sinusoïde

$$y = \cos x,$$

dont la base A'A s'étend de $x = -\frac{\pi}{2}$ à $x = +\frac{\pi}{2}$.

II. — Établir les expressions de l'accélération centripète et de la force centrifuge dans le mouvement circulaire d'un point matériel.

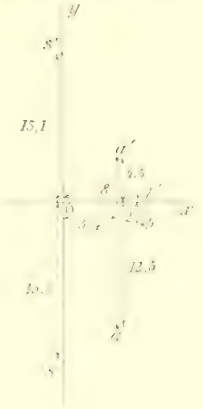
III. — Une roue de 100 mètres de diamètre et du poids total de [illegible] tonnes est animée d'un mouvement uniforme autour de son axe qui est horizontal et [illegible] elle est reliée à cet axe par 120 rayons formés chacun d'un câble métallique de 25 millimètres carrés de section.

1° Quelle doit être la durée minimum d'un tour de cette roue pour que la traction due à la force centrifuge qui s'exerce sur chaque rayon ne dépasse pas 1 kilogramme par millimètre carré de section?

2° Supposant que la roue fasse un tour en un quart d'heure, quelle est alors en kilogrammes par millimètre carré de section la traction due à la force centrifuge qui s'exerce sur chaque rayon ?

NOTA. — Pour faire ces calculs qui n'exigent pas l'emploi de tables, on prendra $g = 9,81$, $\pi = 3,14$ et on assimilera la roue à un système de 120 points matériels indépendants, au poids de 5 grammes chacun, situés aux extrémités des 120 câbles.

Lauréat de la Faculté des Sciences de Poitiers.



1980. — Par rapport aux axes Ox et Oy de la feuille (Ox étant parallèle au petit bord), on donne les points (a, a'), (b, b') et (s, s') définis par le croquis ci-contre (où les cotes sont données en cm).

En tournant successivement autour de la verticale du point (a, a') et de la droite $(sa, s'a')$, la droite $(sb, s'b')$ engendre un hyperboloïde et un cône de révolution.

On demande de représenter la partie restante de l'hyperboloïde entamé par le cône, en supposant cet hyperboloïde limité à la partie comprise entre le parallèle du point (s, s') et le parallèle de cote 4,7.

On tracera en noir les lignes de contour du solide représenté, celles qui sont cachées étant en pointillé.

Les lignes de construction seront tracées en rouge, et la partie retranchée du contour apparent de la portion considérée de l'hyperboloïde en bleu.

QUESTIONS PROPOSÉES

1981. — Soient S et S′ les centres de similitude d'un cercle variable Γ avec deux cercles C et C′ qu'il coupe orthogonalement. Trouver l'enveloppe de la droite SS′ et le milieu de SS′.

N. [illegible], professeur au lycée de Galatz.

1982. — Dans une dissolution de permanganate de potassium on fait passer du gaz sulfureux jusqu'à décoloration.

La liqueur, exactement neutralisée par la potasse, est évaporée à siccité.

Le résidu est calciné au rouge au contact d'un excès de charbon.

En lavant à l'eau, mais à l'abri de l'air, le produit de cette calcination, on obtient une dissolution dans laquelle on fait passer du gaz sulfureux à refus.

La liqueur, bouillie quelques instants et filtrée, est additionnée d'iode jusqu'à persistance de ce dernier ; il faut, pour cela, en verser 1143 milligrammes.

On fait enfin passer dans la liqueur un courant de chlore à refus et on chasse l'excès de ce gaz par une courte ébullition.

Déterminer [illegible] le poids initial de permanganate employé [illegible] le nombre de molécules de potasse nécessaire pour neutraliser la liqueur finale. [illegible] $I = 127$, $K = 39$, $Mn = 55$.

FERRON. — Question 1962 (t. 27[illegible]). — Dans la seconde partie de cette question on demande de déterminer les régions du plan où doivent se trouver les centres des cercles qui passent au point O (origine) de la courbe (C), $(x^2 + y^2)^2 = 4a(x^2 - y^2)$, et qui la rencontrent en trois autres points réels.

On voit facilement, en suivant la méthode employée p. 276, que les valeurs de t qui correspondent à l'intersection de la courbe et du cercle $(x^2 + y^2 - 2mx - 2ny = 0)$ sont racines de l'équation

$$t^4 - 0t^3 + 2mt^2 - 4nt + 2m = 0.$$

La courbe qui limite les régions à déterminer s'obtiendra en écrivant que cette équation a une racine double en t. Cela revient à trouver l'enveloppe de cette droite, m et n étant les coordonnées courantes. Transportons l'origine au point $m = 0$, $n = -\frac{a}{2}$; nous obtenons, après simplification,

$$(n - \frac{m^2}{1 - 1}) = 0.$$

En identifiant avec l'équation $ax + by + c = 0$ et éliminant λ, on obtient

$$a(x^2 - y^2) - ay^2 = 0,$$

équation tangentielle de l'hypocycloïde à trois rebroussements.

Ajoutons que cette courbe a un rebroussement à la nouvelle origine et que les coordonnées des deux autres rebroussements sont $x = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$, $y = -\frac{3a}{8}$.

La région du plan intérieure à cette hypocycloïde est la région cherchée.

Géométriquement, on peut considérer la courbe séparatrice comme le lieu des centres des cercles qui passent par O et touchent la courbe (C) ; c'est l'homothétique relativement à O et dans le rapport $\frac{1}{2}$ de la podaire négative de (C) par rapport à O. Un raisonnement simple montre que c'est une hypocycloïde à trois rebroussements dont le cercle inscrit passe en O.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

22e Année. Novembre 1911. N° 2.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES CENTRES DE COURBURE AUX POINTS DE RENCONTRE DE DEUX CONIQUES HOMOFOCALES

par M. **T. Chollet**, professeur au lycée Hoche.

1. Considérons le faisceau de coniques ayant pour foyers les points $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$. Les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires, si l'on désigne par $(2a, 2b)$, $(2a', 2b')$ les longueurs des axes de l'ellipse (E) et de l'hyperbole (H) passant par un point $M(x, y)$ du plan, on a

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad \text{avec} \qquad a^2 - b^2 = c^2;$$

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0, \qquad \text{avec} \qquad a'^2 - b'^2 = c^2.$$

En résolvant les équations (1) et (2) par rapport à x^2 et y^2, on trouve

$$(3) \qquad x^2 = \frac{a^2 a'^2}{c^2}, \qquad y^2 = \frac{b^2 b'^2}{c^2},$$

formules bien connues donnant les coordonnées des points du plan où se coupent les deux coniques homofocales (E) et (H).

D'autre part, un calcul élémentaire, que l'on trouve dans tous les cours de mathématiques spéciales, donne pour les coordonnées α, β du centre de courbure ω en M à l'ellipse (E) :

$$(4) \qquad \alpha = \frac{c^2 x^3}{a^4}, \qquad \beta = \frac{-c^2 y^3}{b^4},$$

et pour les coordonnées α', β' du centre de courbure ω' au même point M à l'hyperbole (H) :

$$(4\text{ bis}) \qquad \alpha' = \frac{c^2 x^3}{a'^4}, \qquad \beta' = \frac{-c^2 y^3}{b'^4}.$$

Des relations (4) et (4bis), on tire immédiatement

$$(5) \qquad \alpha\alpha' = \frac{c^4 x^6}{a^4 a'^4}, \qquad \beta\beta' = \frac{c^4 y^6}{b^4 b'^4},$$

c'est-à-dire, en tenant compte des formules (3),

$$(6) \qquad \alpha\alpha' = x^2 \qquad \text{et} \qquad \beta\beta' = y^2,$$

formules particulièrement élégantes et simples, qui permettent de passer des coordonnées de l'un des points ω ou ω' à celles de l'autre.

En remplaçant alors x^2 et y^2 respectivement par $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$ dans les formules (1) et (2), on a

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^2} + \frac{\beta\beta'}{b^2} - 1 = 0, \qquad \frac{\alpha\alpha'}{a'^2} - \frac{\beta\beta'}{b'^2} - 1 = 0.$$

Ces nouvelles relations expriment que les points ω et ω' sont conjugués par rapport aux deux coniques (E) et (H).

2. Soient maintenant deux paraboles homofocales (P) et (P') ayant pour foyer et pour axe commun

l'origine des coordonnées F et l'axe x' Fx. Si l'on désigne par p et p' les paramètres des deux paraboles (P) et (P') passant par un point M(x, y) du plan, p correspondant à la parabole P dont l'axe est la demi-droite Fx, on a

$$(7) \qquad y^2 - 2px - p^2 = 0, \qquad y^2 - 2p'x - p'^2 = 0,$$

d'où l'on tire aisément

$$(8) \qquad x = \frac{p' - p}{2}, \qquad y^2 = pp'.$$

Les coordonnées (α, β), (α', β') des centres de courbure ω, ω' en M aux deux paraboles P et P' sont d'ailleurs

$$(9) \qquad \begin{cases} \alpha = 3x + 2p, & \beta = \dfrac{-y}{p^2} \quad \text{pour } \omega, \\ \alpha' = 3x - 2p', & \beta' = \dfrac{-y}{p'^2} \quad \text{pour } \omega'. \end{cases}$$

Ces formules, combinées avec (8), donnent

$$(10) \qquad x = \frac{\alpha - \alpha'}{2}, \qquad y^2 = \beta\beta'.$$

La seconde de ces nouvelles formules est identique à la seconde des formules (6) relatives aux coniques à centre ; la première seule est différente.

En remplaçant dans les relations (7) x et y par les expressions (10), on a

$$\beta\beta' - (\alpha - \alpha')\beta - p^2 = 0,$$
$$\beta\beta' + (\alpha - \alpha')\beta' - p'^2 = 0,$$

relations exprimant encore que les points ω et ω' sont conjugués par rapport aux deux paraboles (P) et (P').

3. Ainsi, le paragraphe précédent établit des relations très simples entre les coordonnées des centres de courbure en l'un des points où se rencontrent deux coniques homofocales, et les coordonnées de ce point lui-même ; de plus les résultats obtenus permettent d'énoncer la proposition suivante :

Les centres de courbure ω, ω' en l'un des points M où se rencontrent deux coniques homofocales (C) *et* (C') *sont conjugués par rapport à ces deux coniques.*

D'ailleurs, le point ω', par exemple, appartient à la tangente en M à la conique (C) ; il en résulte que sa polaire par rapport à (C) est la normale en M à cette conique. De même, la polaire de ω par rapport à (C') est la normale en M à cette conique.

Donc :

Le pôle d'une normale à une conique est le centre de courbure relatif au point d'incidence dans la conique homofocale à la première, passant par ce point.

Les points ω et ω' étant conjugués par rapport aux deux coniques (C) et (C') sont conjugués par rapport à toutes les coniques du faisceau *ponctuel* qu'elles définissent. En particulier, *il existe deux coniques de ce faisceau,* (S) *et* (S'), *tangentes à la droite* $\omega\omega'$, *l'une en* ω, *l'autre en* ω'.

Dans le cas où les coniques sont deux paraboles, elles se coupent en un deuxième point M_1. Si l'on désigne par ω_1, ω'_1 les centres de courbure en ce point aux paraboles, il est évident que les coniques (S) et (S') (qui sont d'ailleurs également des paraboles ayant même axe que les premières) touchent aussi la droite $\omega_1\omega'_1$ respectivement en ω_1 et ω'_1.

Dans le cas où (C) et (C') sont des coniques à centre, en désignant par M_1, M_2, M_3 leurs trois autres points d'intersection, par ω_1, ω'_1, ω_2, ω'_2, ω_3, ω'_3 leurs centres de courbure en ces points, il est évident encore que S et S' touchent aussi les droites $\omega_1\omega'_1$, $\omega_2\omega'_2$, $\omega_3\omega'_3$, la première en ω_1, ω_2, ω_3 ; la seconde en ω'_1, ω'_2, ω'_3.

Enfin, toujours dans le cas où (C) et (C') sont des coniques ayant un centre O, le cercle circonscrit au rectangle $MM_1M_2M_3$ étant une conique du faisceau ponctuel, *ce cercle est orthogonal au cercle de dia-*

mètre $\omega\omega'$; d'où il résulte que *la droite* MΩ *joignant le point* M *au milieu du segment* $\omega\omega'$ *est perpendiculaire au diamètre* OM *des deux coniques*.

4. Reprenons la première des formules (4 bis), $\alpha' = \frac{c^2 x}{a^2}$, donnant l'abscisse du centre de courbure ω' à l'hyperbole (H) en l'un des points (x, y) où elle rencontre l'ellipse (E). Des relations (3), on tire

$$a^2 = \frac{c^2 x^2}{\alpha^2},$$

d'où il résulte

$$\alpha' = \frac{a^4}{c^2 x},$$

ou (11)

$$\alpha' x = \frac{a^4}{c^2}.$$

On aurait de même

(11 bis)

$$\alpha x' = \frac{a'^4}{c^2}.$$

Les directrices de l'ellipse (E) ayant pour abscisses $\pm \frac{a}{c}$, celles de l'hyperbole $\pm \frac{a'^2}{c}$, les relations (11) et (11 bis) conduisent à l'interprétation suivante :

Le conjugué harmonique d'un point M *d'une conique à centre par rapport aux points où la tangente rencontre les directrices est le centre de courbure en* M *à la deuxième conique homofocale à la première, et passant en ce point.*

Ce résultat peut être obtenu aussi par des considérations géométriques simples. En conservant les notations adoptées jusqu'ici et en désignant par θ l'angle FMF′ des rayons vecteurs aboutissant en M, on sait que l'on a

$$(12) \qquad \frac{1}{MF} + \frac{1}{MF'} = \frac{2}{M\omega \cos\frac{\theta}{2}}, \qquad \frac{1}{MF} - \frac{1}{MF'} = \frac{2}{M\omega' \sin\frac{\theta}{2}}, \qquad MF = MF'.$$

Soient G et G′ les points où la normale en M à l'ellipse (E) rencontre les perpendiculaires élevées en F et F′ aux rayons vecteurs, soient de même K et K′ les points où ces mêmes perpendiculaires rencontrent la normale en M à l'hyperbole. Les formules (12) peuvent alors s'écrire

$$(13) \qquad \begin{cases} \frac{1}{MG} = \frac{1}{MG'} = \frac{2}{M\omega} \\ \frac{1}{MK} = \frac{1}{MK'} = \frac{2}{M\omega'} \end{cases}$$

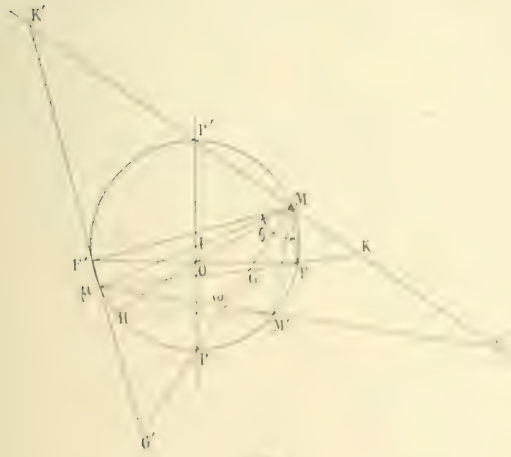


Fig. 1

les segments étant pris dans les formules avec leur sens. Elles expriment sous une forme que les divisions $(M\omega G G')$, $(M\omega' K K')$ sont harmoniques. Comme d'ailleurs les points G, G′ appartiennent aux directrices de l'hyperbole, les points K et K′ aux directrices de l'ellipse, la proposition énoncée plus haut se trouve ainsi justifiée.

Supposons construit le cercle Δ circonscrit au triangle MFF′. Les droites KFG, K′F′G′ rencontrent ce cercle au point μ diamétralement opposé à M. Les deux faisceaux harmoniques $(\omega M G G')$, $(\omega' M K K')$ ayant trois rayons communs, μM, $\mu G K$, $\mu G' K'$, les quatrièmes rayons $\mu\omega$, $\mu\omega'$ sont également communs, ce qui revient à dire que la droite $\omega\omega'$ passe au point μ. D'autre part, si M′ est le deuxième point de

rencontre de cette droite et du cercle I, on en conclut que ce point M′ est, sur le cercle, conjugué harmonique de M par rapport à F et F′. On peut donc encore énoncer le résultat suivant :

La droite ωω′ joignant les centres de courbure en l'un des points de rencontre M *de deux coniques à centre ayant les mêmes foyers* F *et* F′, *coupe le cercle circonscrit au triangle* MFF′ *au point* μ *diamétralement opposé à* M *et au point* M′, *conjugué harmonique, sur le cercle, de* M *par rapport aux foyers* F *et* F′.

La droite ωω′ *est perpendiculaire à* MM′.

On sait d'ailleurs que le point M′ est sur la parallèle à FF′ menée par le point H où le diamètre OM commun aux deux coniques rencontre le cercle. Cette remarque et la conclusion qui précède conduisent à une nouvelle construction graphique très simple du centre de courbure en un point d'une conique définie par ses foyers. Le lecteur l'apercevra de suite sur la figure.

5. Revenons maintenant aux deux paraboles homofocales considérées au § 2. En combinant les formules (8) et (9), on trouve immédiatement

$$\frac{x-y}{2} = -p, \qquad \frac{x+y}{2} = p' :$$

$-p$ étant l'abscisse de la directrice de la parabole (P), p' l'abscisse de la directrice de la parabole P′, il en résulte que :

Le symétrique d'un point M *d'une parabole (fig. 2) par rapport au point de rencontre* G *de la tangente en ce point et de la directrice est le centre de courbure* ω′ *de la deuxième parabole confocale à la première et passant en* M.

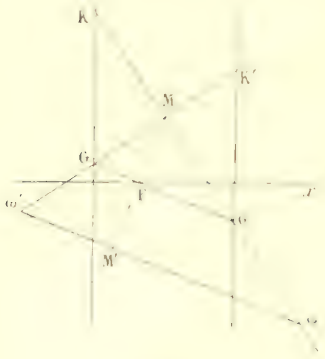


Fig. 2.

D'ailleurs, si l'on désigne par G et G′ les points où les tangentes en M aux deux paraboles rencontrent les directrices, des propriétés focales de la parabole, il résulte que la droite GG′ passe en F et est perpendiculaire à la droite MF. Par suite, la droite ωω′ est parallèle à GG′, et le point M′ où MF rencontre ωω′ est le symétrique de M par rapport à F. On peut donc énoncer la propriété suivante :

La droite ωω′ joignant les centres de courbure de deux paraboles homofocales en l'un de leurs points de rencontre M *est perpendiculaire au rayon vecteur de ce point. De plus, le foyer commun* F *est équidistant du point* M *et de la droite* ωω′.

Cette propriété conduit, comme on le voit aisément sur la figure, à une construction simple du centre de courbure en un point quelconque d'une parabole dont on connaît le foyer.

Enfin, remarquons que la première des relations (8) montre que M est équidistant des directrices des deux paraboles (P) et (P′). Donc si l'on désigne par K et K′ les points où les normales à ces paraboles rencontrent leurs directrices, on a

$$MK = MG, \qquad MG = MK'.$$

De ce que

$$MG' = \frac{1}{2} M\omega, \qquad MG = \frac{1}{2} M\omega',$$

il s'ensuit alors que

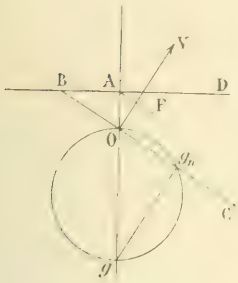
La portion de normale à une parabole comprise entre le point d'incidence et la directrice est égale à la moitié du rayon de courbure au point d'incidence.

C'est là une propriété bien connue, que nous retrouvons incidemment, et qui, on le sait, sert de base à la construction habituelle du centre de courbure en un point d'une parabole.

NOTE SUR LE MOUVEMENT DES PROJECTILES

Par M. **J. Piglowski**, élève de l'Ecole normale supérieure.

Un point pesant lancé de O avec une vitesse V décrit une parabole dont on peut déterminer géométriquement les éléments.



Soit $\overline{Og}$ l'accélération de la pesanteur, l'accélération normale $\overline{Og_n}$ est la projection de $\overline{Og}$ sur la normale en O. Si C est le centre de courbure, on a

$$\overline{Og_n} = \frac{V^2}{\overline{OC}}.$$

La normale OC rencontre la directrice (D) de la parabole en un point B et, d'après une propriété connue, $\overline{OB} = -\frac{\overline{OC}}{2}$; par suite

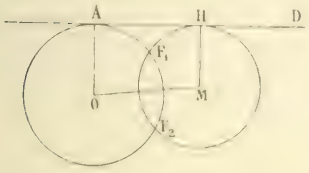
$$\overline{OB} \cdot \overline{Og_n} = \overline{OA} \cdot \overline{Og} = -\frac{V^2}{2}.$$

Une construction élémentaire donne $OA = \frac{V^2}{2Og}$; on a ainsi la directrice (D) et le foyer F symétrique de A par rapport à V.

Lorsque V tourne autour de O sans changer de grandeur, g_n décrit le cercle de diamètre Og et B décrit la droite (D) inverse de ce cercle par rapport à O, la puissance d'inversion étant $-\frac{V^2}{2}$.

Ceci montre que les paraboles qui correspondent aux diverses positions de V ont la même directrice (D) et que le lieu de leurs foyers est le cercle de centre O et de rayon OA.

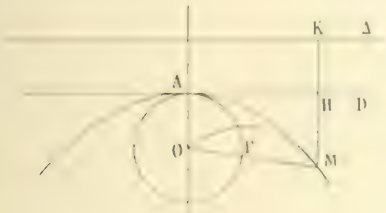
Pour avoir celles de ces paraboles qui passent par un point M donné, on détermine leurs foyers F_1, F_2 par l'intersection du cercle (O) avec le cercle de centre M et de rayon MH.



Le faisceau des paraboles est du second ordre. Le lieu des points situés à égale distance du cercle (O) et de la droite (D) est la parabole de foyer O ayant (D) pour tangente au sommet.

En effet, si HK = OA, MK = MO, K décrit la droite (Δ) et M la parabole de foyer O et de directrice (Δ); cette parabole est la *parabole de sûreté*.

Un point situé à l'intérieur de cette parabole peut être atteint suivant deux trajectoires de foyers F_1 et F_2. Les directions des vitesses initiales, bissectrices des angles AOF_1, AOF_2, sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle AOM.



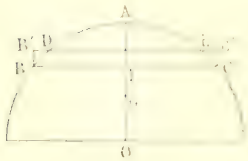
Un point situé à l'extérieur de cette parabole ne peut pas être atteint, car les points F_1, F_2 n'existent pas réellement.

Pour un point de la parabole de sûreté, les deux trajectoires sont confondues; cette parabole est donc l'enveloppe des paraboles du faisceau. On voit d'ailleurs directement que la parabole de sûreté et la parabole de foyer F sont tangentes en M à la bissectrice de l'angle FMH.

ALGÈBRE

1934. — *Dans une demi-sphère pleine et homogène, de rayon pris pour unité, on creuse une cavité demi-sphérique concentrique, de rayon x. Déterminer x, avec trois décimales exactes, de façon que le centre de gravité du solide restant coïncide avec le pôle de la cavité.*

Nous allons d'abord déterminer le centre de gravité du volume d'un hémisphère de rayon R. Ce centre de gravité G est situé sur le rayon OA perpendiculaire au plan de la base, puisque ce rayon est axe de symétrie ; tout revient donc à calculer la longueur OG.



Décomposons l'hémisphère en tranches infiniment minces par des plans perpendiculaires à OA ; nous remplaçons chaque tranche BCDE par le cylindre équivalent BCB'C', et nous appliquons le théorème des moments par rapport au plan de la base.

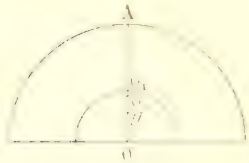
En désignant par V le volume de l'hémisphère, par x la distance OI et par dx la hauteur du cylindre, nous avons

$$V \cdot OG = \int_0^R \pi(R^2 - x^2)\,x\,dx.$$

L'intégrale indéfinie est $\pi\left(\frac{R^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)$ et l'intégrale définie $\frac{\pi R^4}{4}$, et comme $V = \frac{2}{3}\pi R^3$, on en déduit

$$\frac{2}{3}\pi R^3 \cdot OG = \frac{\pi R^4}{4}, \qquad \text{ou} \qquad OG = \frac{3}{8}R.$$

Cela posé, arrivons au problème proposé. Nous pouvons envisager l'hémisphère de rayon 1 (et de volume $V = \frac{2}{3}\pi$) comme la somme de l'hémisphère de rayon x (et de volume $v = \frac{2}{3}\pi x^3$) et du solide restant, dont le volume est $V - v$.



Désignons par G, g et G_1 les centres de gravité de ces volumes (qui sont situés sur le même rayon OA), et appliquons le théorème des moments par rapport au plan de base commun des deux hémisphères. Nous avons

$$V \cdot OG_1 = v \cdot Og + (V - v) \cdot OG,$$

ou, d'après ce qui précède,

$$\frac{2}{3}\pi \cdot \frac{3}{8} = \frac{2}{3}\pi x^3 \cdot \frac{3}{8}x + \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi x^3\right)x.$$

Telle est l'équation qui nous donnera la valeur de x.

Nous en tirons

$$\frac{\pi}{4}(1 - x^3) = \frac{2}{3}\pi(1 - x^4),$$

ou, en divisant par $\pi(1 - x^3)$,

$$3(1 - x^3) = 8x(1 + x + x^2 + x^3),$$

ou encore

$$5(x + x^2 + x^3) - 3 = 0,$$

ou enfin

$$f(x) = x + x^2 + x^3 - 0{,}6 = 0.$$

Cette équation admet une seule racine positive qui est plus petite que 1 et qui est la solution du problème.

A priori, OG_1 est plus grand que OG ou que $\frac{3}{8}$; donc la racine est supérieure à 0,375.

Nous avons $f(0,3) = -0,183, \qquad f(0,4) = +0,024,$

ce qui montre que la racine est comprise entre 0,3 et 0,4.

Comme $f''(x)$ est positive dans l'intervalle considéré, nous appliquerons la méthode de Newton à 0,4 et la méthode des parties proportionnelles à 0,3.

Nous avons $f'(0,4) = 2,28$, et la correction de Newton est

$$-\frac{f(0,4)}{f'(0,4)} = -\frac{0,024}{2,28} = -0,0105\ldots;$$

ce qui nous donne la valeur approchée de la racine *par excès* $0,4 - 0,0105 = 0,3895$.

La méthode des parties proportionnelles nous donne

$$\frac{0,3f(0,4) - 0,4f(0,3)}{f(0,4) - f(0,3)} = \frac{0,3 \times 0,024 + 0,4 \times 0,183}{0,024 + 0,183} = \frac{0,0804}{0,207} = 0,3884\ldots \text{ par défaut}$$

On en conclut que la racine est comprise entre 0,3884 et 0,3895.

Or, en substituant 0,389, on trouve

$$f(0,389) = -0,00081531.$$

On en conclut que la racine est supérieure à 0,389 ; comme elle est inférieure à 0,3895, on voit que sa valeur à $\frac{1}{1000}$ près par défaut est 0,389.

A. ROUSSEAU, à Fournes-en-Weppe.

Bonnes solutions par MM. E.-N. Barisien ; Ch. Guillerme ; G. Lach, à Rodez ; Pierre Vernier.

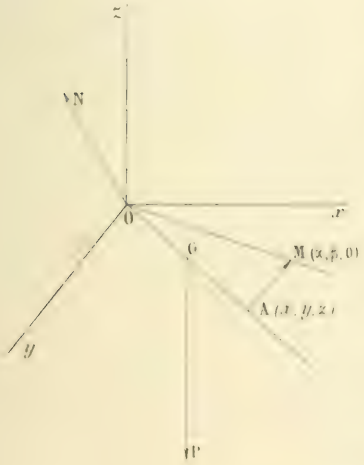
MÉCANIQUE

1931. — *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy *et* Oz, *on considère une barre pesante de poids* $4a$ *et de longueur* $2a$, *articulée en une de ses extrémités* O *de façon que ce point coïncide constamment avec l'origine des coordonnées. L'autre extrémité* A *de la barre est soumise à une force attractive émanant d'un centre fixe* M *du plan* xOy *et représentée précisément par le vecteur* AM. *Équilibre de cette barre.*

Étudier la surface lieu de l'extrémité du vecteur ON *qui représente la réaction du point* O *quand* M *occupe successivement toutes les positions dans le plan* xOy. *On donnera une définition géométrique de ce lieu.*

Nous publions sans les modifier deux solutions de nos correspondants et nous y ajoutons une solution géométrique très simple, à moitié aperçue dans la seconde solution.

Première solution. — Soit $M(\alpha, \beta, 0)$ le centre attractif, $A(x, y, z)$ la position d'équilibre de la barre. Cette barre est soumise à trois forces : 1° son poids P appliqué en $G\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right)$, dont les projections sur les axes sont $(0, 0, -4a)$; 2° la force attractive AM, appliquée en $A(x, y, z)$, dont les projections sur les axes sont $(\alpha - x, \beta - y, -z)$; 3° la réaction ON appliquée en O, dont nous désignerons les projections sur les axes par (α, β, γ).



Écrivons que la somme des projections de ces trois forces sur chaque axe est nulle :

$$(1) \qquad \alpha - x + \gamma = 0, \qquad \beta - y + \gamma = 0, \qquad -4a - z + \gamma = 0.$$

Écrivons maintenant que la somme des moments des forces par rapport à O est nulle, ou, comme celui de ON est nul, que la somme des moments des forces P et AM par rapport à O est nulle. Avec les notations habituelles, on a successivement :

Pour P $\qquad L = -2ay, \qquad M = 2ax, \qquad N = 0,$

pour AM. $\qquad L = -z\beta, \qquad M = z\alpha, \qquad N = (\beta x - \alpha y).$

Par suite,

(2) $$2ay + \beta z = 0, \qquad 2ax + \alpha z = 0, \qquad \beta x - \alpha y = 0.$$

Ces trois équations homogènes donnent de suite

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{-2a} \qquad \text{ou} \qquad x = h\alpha, \qquad y = h\beta, \qquad z = -2ah.$$

h est un facteur indéterminé que l'on calcule en écrivant que $OA = 2a$.

La relation $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ devient alors

(3) $$h^2(\alpha^2 + \beta^2 + 4a^2) = 4a^2, \qquad \text{d'où} \qquad h = \frac{2a\varepsilon}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 4a^2}} \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Finalement, il y a deux positions du point A, symétriques par rapport à O, pour lesquelles le système est en équilibre ; les coordonnées de ces positions sont

$$x = \frac{2a\alpha\varepsilon}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 4a^2}}, \qquad y = \frac{2a\beta\varepsilon}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 4a^2}}, \qquad z = \frac{-4a^2\varepsilon}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 4a^2}}.$$

Pour $\varepsilon = +1$, il y a équilibre stable puisque $z < 0$; pour $\varepsilon = -1$, équilibre instable.

Les coordonnées X, Y, Z du point N sont les valeurs de λ, μ, ν fournies par le système (1) ; par conséquent

$$X = x - \alpha = \alpha(\lambda - 1), \qquad Y = y - \beta = \beta(\lambda - 1), \qquad Z = z + 4a = -2a\lambda + 4a,$$

d'où $\lambda = \dfrac{4a - Z}{2a}$, $\quad \lambda - 1 = \dfrac{2a - Z}{2a}$, $\quad$ puis $\quad \alpha = \dfrac{2aX}{2a - Z}$, $\quad \beta = \dfrac{2aY}{2a - Z}$.

Portons ces valeurs de λ, α, β, dans la relation (3) ; on trouve ainsi l'équation du lieu de N :

$$(Z - 4a)(X^2 + Y^2 + Z^2 - 2aZ) - 4a^2Z + 2a(Z - 2a)^2 = 0.$$

En transportant l'origine en $\omega(0, 0, 2a)$, cette équation devient

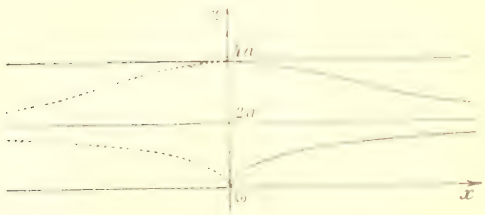
$$z - 2a)^2(x^2 + y^2 + z^2) - 4a^2z^2 = 0.$$

Les plans parallèles $z - h = 0$ coupent cette surface suivant des cercles ayant leur centre sur Oz. La surface lieu de N est donc de révolution autour de Oz ; d'ailleurs, en résolvant l'équation précédente par rapport à z, elle se met évidemment sous la forme $z = \varphi(x^2 + y^2)$. Enfin, le plan des xy coupe la surface suivant les deux droites isotropes $x^2 + y^2 = 0$.

Cherchons la méridienne de la surface du plan des zx ; c'est la quartique $(z - 2a)^2(x^2 + z^2) - 4a^2z^2 = 0$.

C'est une courbe symétrique par rapport à ωz, ayant un point de rebroussement en ω, la tangente étant ωz. La droite $z - 2a = 0$ est asymptote.

En mettant l'équation de la quartique sous la forme $x^2 = \dfrac{z^2(4a - z)}{(z - 2a)^2}$, puis faisant varier z de 0 à $4a$, on obtient la courbe ci-contre ; c'est une conchoïde de Nicomède équilatère, comme on s'en rend bien compte sur son équation polaire, $\rho = 2a\left(\dfrac{1}{\sin\omega} \pm 1\right)$.



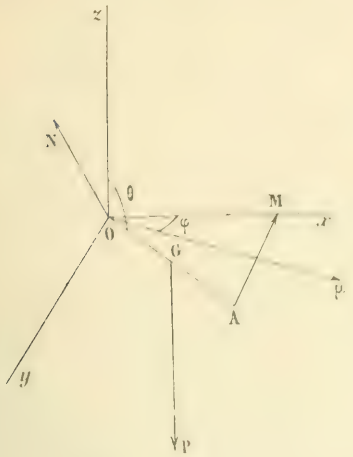
On peut donc donner de la surface lieu de N la définition géométrique suivante : c'est la surface engendrée par l'extrémité d'un segment de droite de longueur constante dont l'autre extrémité décrit un plan P, la droite qui le porte passant par un point fixe ω distant du plan P d'une longueur égale à celle du segment.

JEAN SOUBAIGNE, à Mont-de-Marsan.

Seconde solution. — Projetons la direction OA sur le plan xOy et prenons le centre attractif sur Ox. OA se projette suivant $O\mu$ qui fait l'angle φ avec Ox ; d'ailleurs l'angle de OA avec Oz est θ. Ces deux angles fixent la position de la barre. Les forces agissant sur la barre sont : 1° la pesanteur, $P = 4a$, appliquée en G ; 2° l'attraction AM du point M ; 3° la réaction ON du point fixe O.

Les coordonnées du point A sont

$$x = 2a\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = 2a\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = 2a\cos\theta.$$



Or, si l'on écrit les trois équations indépendantes de la réaction $\Sigma L = 0$, $\Sigma M = 0$, $\Sigma N = 0$, on voit immédiatement qu'il faut pour que l'on ait $\Sigma L = 0$, que la verticale GP rencontre Ox, car le moment par rapport à Ox de AM est nul.

Dans ce cas on aura aussi $\Sigma N = 0$ et la barre AM devra être dans le plan xOz.

Dans ce plan, les coordonnées du point A seront $x = 2a \sin\theta$, $z = 2a \cos\theta$. Posant $\alpha = \overline{OM}$, les composantes de la force AM seront

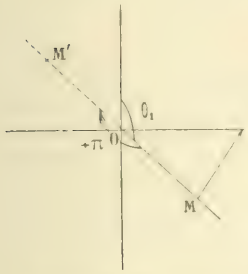
$$X = x - \alpha, \qquad Y = -y, \qquad Z = -z.$$

x, y, z désignant les coordonnées du point A. Remplaçant dans l'équation $\Sigma M = 0$, il vient

$$0 = 4a^2 \sin\theta + 2\alpha \cos\theta, \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{tg}\theta = -\frac{\alpha}{2a}$$

ce qui donne un angle θ_1 compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et π et un angle $\theta_1 + \pi$ compris entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π.

La surface à étudier étant évidemment de révolution autour de Oz, il suffit d'en étudier la méridienne située dans le plan zOx.



Soient X', Z' les projections de la réaction. Ecrivons, puisqu'il y a équilibre, que l'on a $\Sigma X = 0$, $\Sigma Z = 0$, on trouve $x - \alpha + X' = 0$, $-4a - z + Z' = 0$.

Les coordonnées du point N sont donc

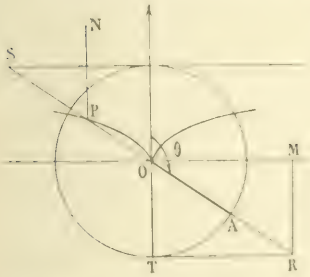
$$X' = x - \alpha = 2a \sin\theta - \alpha, \qquad Z' = +4a - 2a \cos\theta, \qquad \text{avec} \qquad \operatorname{tg}\theta = -\frac{\alpha}{2a}$$

Eliminant α, on a les équations de la méridienne

$$x = 2a \sin\theta + \operatorname{tg}\theta, \qquad z = -4a + 2a \cos\theta.$$

Géométriquement, puisque l'on a $\operatorname{tg}\theta = -\frac{\alpha}{2a}$, il sera aisé d'obtenir la position d'équilibre.

Menons la tangente TR au cercle et élevons en M la perpendiculaire MR. L'angle de OR avec Oy sera égal à θ.



De plus, si on porte à partir du point S, symétrique de R par rapport à O, une longueur $SP = 2a$, les coordonnées du point P seront

$$x = 2a + 2a \cos\theta, \qquad z = 2a \operatorname{tg}\theta + 2a \sin\theta,$$

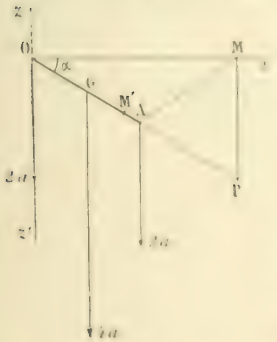
ce qui montre que P décrit une conchoïde de droite.

Les coordonnées du point N, extrémité de la réaction, s'obtiendront en augmentant l'ordonnée z de la quantité constante $2a$, $PN = 2a$, c'est-à-dire en imprimant à la conchoïde précédente un déplacement parallèle à l'axe des z et égal à $2a$.

Quand le point M décrira le plan, l'extrémité de la réaction décrira la surface de révolution obtenue en faisant tourner la conchoïde précédente autour de l'axe des z.

DEPERRIUS, à Oberbronn.

Solution géométrique — La barre est soumise à l'action de trois forces, dont ces trois forces sont dans un même plan. Si le point M est sur Ox, la barre est dans un plan vertical qui passe par Ox. Décomposons la force $0, 2a$, en deux forces parallèles et égales à $2a$, appliquées l'une sur Oz', l'autre au point A. Les deux forces verticales en A devront alors se composer en une seule appliquée sur la barre. Or, si on mène AM' équipollent à $2a$, la force AP est la résultante des deux forces; donc la barre passe au point P. Or, on a $\operatorname{tg}\theta = \frac{2a}{x}$, x étant l'abscisse du point M.



Pour avoir la résultante des forces appliquées en O, il faut d'abord y transporter AP, puis lui ajouter la force verticale et descendante $2a$ soit OM' équipollent à AP, on a $MP = 2a = OA$. Le lieu du point P est la droite $x = 2a$; le lieu de M est donc une conchoïde de cette droite ayant pour pôle le point O et égal au point pour point de rebroussement. On aurait le lieu de l'extrémité de la résultante en faisant subir à cette conchoïde une translation égale à $2a$ dans le sens Oz'.

La réaction en O est symétrique de la résultante par rapport au point O; le lieu de son extrémité, N, est donc la conchoïde symétrique de la dernière par rapport au point O. Cette courbe est le méridienne du lieu total engendré par N.

René POULAIN.

Bonnes et complètes solutions de MM. P. Vallais; Ch. Gérardin; A. Lapayre; J. Dessoutter.
Assez bonnes solutions de MM. P. Oppenheimer; G. Lach; A. Rossignol; P. Vergnas (Collège Stanislas).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1910)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Suite*).

III. — Géométrie analytique à deux dimensions (*Suite*).

8254. Construire la courbe [illegible] Vérifier que c'est une unicursale. Points doubles.

8255. Longueur d'un arc de parabole.

8256. Construire la courbe [illegible] Évaluer les coordonnées [illegible] pour que l'intégration soit possible.

8257. — Trajectoires orthogonales des courbes $y = a^x$, quand a varie.

8258. — Enveloppe de la droite [illegible]

8259. — On construit la courbe [illegible] aux points M et M' de cette courbe ayant pour abscisses x et $x + h$, h étant l'infiniment petit principal. Par le milieu N de MM' on mène une parallèle à Oy qui rencontre la courbe au point P. Calculer la partie principale de $\overline{PN}$. Quelle doit être la courbe pour que cette partie principale soit $\frac{h^2}{4}y$?

8260. — Développée de la chaînette.

8261. — On donne deux courbes (C) et (γ) et deux directions D et Δ. Par le point A de la courbe C on mène une parallèle à D qui rencontre γ au point α ; par le point α on mène une parallèle à Δ qui rencontre C au point A_1 ; par le point A_1 on mène une parallèle à D qui rencontre γ au point α_1, et par ce point une parallèle à Δ qui rencontre C en A_2, ... etc. La ligne brisée $A\alpha A_1\alpha_1 \ldots$ a-t-elle une longueur finie ou infinie ?

8262. Construire la courbe [illegible] Former les équations des tangentes aux points de rencontre avec Ox. Évaluer l'aire limitée par la courbe et située au-dessous de Ox.

8263. — Construire la courbe [illegible] Former l'équation différentielle admettant ces courbes comme courbes intégrales. Intégrer cette équation.

8264. Construire la courbe [illegible] Aire comprise entre l'axe des x et la branche de courbe située au-dessus. Lieu des projections de l'origine sur les tangentes à la courbe.

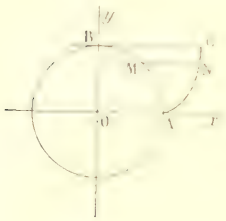
8265. Soient z et z' deux variables imaginaires qui sont les affixes de deux points M et M' où [illegible] $= 1$. Quel lieu décrit M' quand M décrit une courbe (C) ? Cas où cette courbe est un cercle.

8266. — On considère les courbes intégrales de l'équation différentielle $\frac{y}{dx} = f(y, \omega)$. On demande de former l'équation différentielle des podaires de ces courbes par rapport à l'origine.

8267. — Trouver le lieu des points d'inflexion des courbes intégrales de l'équation différentielle $y = xf(y') + \varphi(y')$.

8268. — Étude de la cycloïde. Courbure. Développée.

8269. — Par un point M variable sur un cercle on mène une parallèle au rayon fixe OA, et on prend sur cette parallèle la longueur MN égale à l'arc AM. Lieu du point N. Calculer l'aire AMN, et le volume engendré par cette aire tournant autour de OA. Cas où le point M est en B.



8270. — On donne un cercle tangent en un point O à une droite D. On prend sur cette droite deux points variables A et B tels que la longueur AB soit constante. Par les points A et B on mène des tangentes au cercle qui se rencontrent au point M. Lieu de ce point. Discussion géométrique.

8271. — Définition géométrique, équation et propriétés de la strophoïde.

8272. — Trouver les courbes qui coupent sous un angle constant les paraboles $y^2 - 2\lambda x = 0$, λ étant une variable.

8273. — Trouver l'équation différentielle des courbes $\rho^n = a^n \cos n\theta$, où a est fixe et n variable.

8274. — Développée de la courbe [illegible]

8275. — Construire les courbes intégrales de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = 2xy - 2x^2 + 1$.

8276. — Étudier les tangentes issues d'un point quelconque du plan à la courbe $y^2 = x^3$.

8277. — Étudier la position relative des cercles osculateurs en deux points infiniment voisins d'une courbe plane. Cas où la courbe est une parabole.

8278. — Rayon de courbure de l'ellipse.

8279. — On donne une courbe plane (C) et un point O dans son plan. Sur la tangente en un point M de la courbe on

prend un point T tel que $MT = OT$. Du point O on mène une perpendiculaire à la tangente en T au lieu de ce point. Montrer que cette perpendiculaire passe par le centre de courbure de la courbe (C) au point M.

8280. — Développée de la spirale logarithmique.

8281. — Sur la tangente en M à une ellipse on porte une longueur constante $MP = a$. Lieu du point P. Aire comprise entre ce lieu et l'ellipse.

8282. — Etudier l'enveloppe d'une droite telle que la somme des carrés des distances de trois points fixes à cette droite soit constante.

8283. — La tangente en un point M d'une courbe rencontre les axes Ox, Oy aux points P et Q. Soit N le quatrième sommet du rectangle construit sur OP et OQ. Lieu du point N. Tangente en ce point. Cas où la courbe donnée est une ellipse.

8284. — Trouver une courbe plane telle qu'on ait en chaque point $\sin\alpha = \frac{2Cx}{r^2 + C^2}$, α désignant l'angle de la tangente avec Ox, et C une constante.

8285. — Trouver une courbe qui coupe sous un angle constant les droites passant par un point fixe.

8286. — On donne dans un plan une courbe (C) et un point O. On considère le centre de courbure C en un point M de la courbe ; on projette le point C en G sur la droite OM, et on prend le point G', symétrique de G par rapport au point M. Déterminer la courbe de façon que l'on ait $\overline{OM} \cdot \overline{OG'} = a^2$.

8287. — La tangente en un point M d'une courbe rencontre Oy au point T, et on désigne par P la projection du point M sur Ox. Déterminer la courbe de façon que le trapèze OPMT ait une aire constante.

8288. — Trouver les courbes telles que le rayon de courbure soit proportionnel au cube de la normale.

8289. — On donne deux axes obliques Ox et Oy et une courbe (C). Par un point M de cette courbe on abaisse MP perpendiculaire sur Ox et MQ sur Oy. Déterminer la courbe (C) de façon que la tangente en M soit parallèle à la droite joignant le point O au milieu de PQ.

8290. — La normale en un point M d'une courbe rencontre Ox au point K et la perpendiculaire en O au rayon vecteur OM au point N. Déterminer la courbe de façon que le rapport $\frac{ON}{OK}$ soit constant.

8291. — Trouver une courbe telle qu'il y ait un rapport constant entre la normale définie en coordonnées rectilignes et la normale définie en coordonnées polaires.

8292. — Trouver une courbe telle que la tangente en un point quelconque $M(x, y)$ rencontre Oy en un point T tel que l'on ait $\overline{OT} = kx^m$.

8293. — Soit C le centre de courbure en un point M d'une courbe. On projette un point fixe O en O' sur la droite MC. Déterminer la courbe de façon que le rapport $\frac{\overline{MC}}{\overline{MO'}}$ soit constant.

8294. — Sur la tangente en un point M d'une courbe on abaisse OP perpendiculaire, et on désigne par ω et θ les angles que font OM et OP avec Ox. Déterminer la courbe de façon qu'on ait [illegible] $= k$. k désignant une constante.

8295. — Trouver les courbes telles que la projection du centre de courbure sur le rayon vecteur partage ce dernier dans un rapport constant.

8296. — Trouver les courbes telles que la tangente et la normale en chaque point divisent harmoniquement un segment donné.

8297. — Trouver les courbes dont le rayon de courbure est proportionnel à l'ordonnée.

8298. — On donne deux points fixes F et F' dans un plan, et on demande de trouver une courbe de ce plan telle que la tangente en un point quelconque M soit bissectrice de l'angle FMF'.

8299. — Soit p la distance de l'origine à la tangente à une courbe, r le rayon vecteur du point de contact. Déterminer la courbe de façon qu'on ait $p = \frac{a^2}{2a - r}$.

8300. — Soient F un foyer d'une ellipse, M un point quelconque de la courbe, C le centre de courbure au point M. Lieu de la projection du point C sur la droite FM.

8301. — On donne une conique et deux faisceaux en involution situés dans son plan, le sommet n'étant pas sur la conique. Deux rayons homologues rencontrent la conique respectivement aux points A, B et A', B'. Enveloppe des droites AA', AB', BA', BB'.

8302. — Calculer l'aire commune à deux ellipses [illegible] concentriques et dont les axes sont [illegible].

8303. — Le cercle osculateur en un point M de la conique [illegible] rencontre la courbe en un autre point A. Déterminer le point M de façon que la droite MA passe par un point donné.

8304. — Trouver l'équation générale des coniques bitangentes à l'axe à l'infini [illegible] le point de contact étant sur Ox. Etudier la différence des ordonnées des deux points pour les valeurs minimum, [illegible].

8305. — Rapport anharmonique de quatre points d'une conique, [illegible] les points sont les sommets d'un [illegible].

8306. — D'un point O on mène les tangentes OM, OP à une conique et par le point O on mène une sécante quelconque rencontrant la conique en P et P'. Montrer que le rapport anharmonique des quatre points M, P, P', [illegible] est constant.

8307. — Développée de la parabole. Points de rencontre avec la parabole. Calculer l'aire comprise entre la parabole et sa développée.

8308. — Équation générale des coniques passant par les sommets du centre de gravité d'un triangle.

8309. — Condition pour que deux coniques définies par les équations générales soient homothétiques. Discussion.

8310. — Les points de rencontre d'une ellipse et d'un cercle concentrique peuvent-ils s'obtenir au moyen de la règle et du compas ?

8311. — Etant donnée l'équation différentielle $f(x, y, y') = 0$, on considère ses courbes intégrales (C). On demande de former l'équation différentielle que vérifient les courbes polaires réciproques des courbes (C) par rapport à la parabole $x^2 - 2y = 0$. Application à l'équation $x + yy' = \frac{2y}{\sqrt{1+y'^2}}$.

8312. — Trouver l'enveloppe des cordes d'une parabole qui ont leurs milieux sur une droite fixe.

8313. — Dans toute hyperbole, une tangente quelconque forme avec les asymptotes un triangle d'aire constante. Établir la proposition réciproque.

8314. — Par un point M on mène les normales MQ_1, MQ_2 et MQ_3 à une parabole ; on joint les pieds Q_1, Q_2, Q_3 au foyer F et on demande de trouver le lieu du point M tel que la somme $FQ_1 + FQ_2 + FQ_3$ ait une valeur constante donnée.

8315. — On considère les paraboles passant par deux points A et B et normales en A à la droite AB. Équation générale Il en passe deux par un point du plan. Lieu du point par où passent deux paraboles se coupant à angle droit en ce point. Enveloppe des axes.

8316. — Lieu des projections du foyer d'une parabole sur les normales.

8317. — On donne une parabole et une droite Δ perpendiculaire à l'axe. Par un point M de la droite Δ on mène des tangentes MT et MT′ à la courbe, et on prend le point P où la droite TT′ rencontre la parallèle à l'axe menée par le point M. Lieu du point P.

8318. — Condition pour qu'une droite rencontre la parabole $y^2 - 2px = 0$ et les axes de coordonnées en quatre points formant une division harmonique.

8319. — On mène à une ellipse les quatre tangentes aux sommets, et d'un point de vue quelconque on fait une perspective sur un plan quelconque. Quelles figures peut-on avoir ? Inversement, étant donnés une conique et un quadrilatère circonscrit, peut-on trouver un point de vue et un plan de projection tels que la figure perspective soit une ellipse et le rectangle circonscrit dont les côtés sont parallèles aux axes.

8320. — On donne une parabole et un cercle tangent au sommet ayant son centre à l'intérieur de la courbe. On mène au cercle une tangente variable qui rencontre la parabole aux points A et B. Lieu du milieu de AB.

8321. — Étant données une conique et une droite, peut-on projeter la figure de façon à obtenir une conique et l'un de ses axes ?

8322. — Etant données une conique et deux droites, peut-on projeter la figure de façon à obtenir une conique et ses deux axes ?

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

1983. — On considère toutes les coniques Γ passant par quatre points fixes A, B, C, D et une conique fixe Σ. Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle conjugué commun à la conique Σ et à une conique variable Γ.

N. Abramescu.

1984. — On donne une cubique circulaire droite à point double, par son axe, son point double, un point et la tangente en ce point.

1° Construire le sommet et les tangentes au point double ;

2° Construire le point de la cubique situé sur la tangente donnée ;

3° Construire l'asymptote.

M. Tétu.

1985. — Soient M un point variable d'une ellipse, C son centre de courbure, P et Q les pieds des deux autres normales issues de C.

1° La corde PQ est normale à une ellipse fixe ;

2° Le lieu du point de rencontre de MC et PQ est une ellipse.

3° Le lieu du centre de gravité du triangle MPQ est une courbe du sixième degré dont l'aire est $\frac{1}{18}$ de celle de l'ellipse ;

4° Le lieu du centre du cercle circonscrit à MPQ est une sextique dont l'aire est $\frac{1}{12}$ de l'aire de la développée de l'ellipse ;

5° Le lieu du milieu de PQ est une sextique dont l'aire est la moitié de celle de l'ellipse ;

6° Le lieu du pôle de PQ par rapport à l'ellipse donnée est une kreuzcurve.

Dr Werner Gaedecke.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

1932. — 1° *Intégrer l'équation différentielle* $xy' + ey = \frac{e-x}{x}$, *et déterminer celle des intégrales,* $y = f(x)$, *qui s'annule pour* $x = e$.

2° *Etudier les variations de la fonction* $y = f(x)$ *et construire la courbe représentative de cette fonction.*

3° *L'équation* $y = f(x)$ *définit parfaitement une fonction* $x = \varphi(y)$ *de* $-\infty$ *à* 0, *pourvu que l'on astreigne* x *à être compris entre* 0 *et* e. *Calculer* $\int_0^{-\infty} \varphi(y)\,dy$.

1° L'équation sans second membre, $xy' + ey = 0$, admet pour solution $\mathrm{L}\frac{y}{C} = -e\mathrm{L}|x|$.

Mais comme, par la suite, x doit prendre la valeur e, il faut supposer x positif et écrire

$$y = \frac{C}{x^e}$$

Posons alors $y = \frac{z}{x^e}$, z étant une fonction de x : nous aurons $y' = \frac{z'}{x^e} - \frac{ez}{x^{e+1}}$, et l'équation différentielle deviendra

$$\frac{z'}{x^{e-1}} = \frac{e-x}{x^e}, \qquad z' = \frac{e-x}{x};$$

donc

$$z = e\mathrm{L}x - x + \mathrm{C},$$

et, par suite,

$$y = \frac{e\mathrm{L}x - x + \mathrm{C}}{x^e}.$$

Pour $x = e$, cette fonction doit être nulle ; donc la constante C est nulle et la fonction demandée est

$$y = \frac{e\mathrm{L}x - x}{x^e}.$$

2° Les variations de cette fonction dépendent des signes de la dérivée ; or cette dérivée est

$$y' = \frac{x\left(\frac{e}{x} - 1\right) - ex^{-1}(e\mathrm{L}x - x)}{x^{2e}};$$

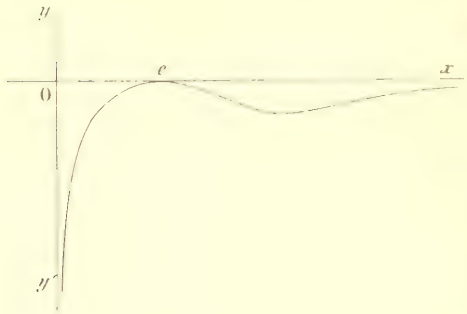
elle change de signe en même temps que le facteur $x - e - e^2\mathrm{L}x + ex$, qui admet visiblement la racine e. Or la dérivée de ce facteur est $e - 1 - \frac{e^2}{x}$: elle est nulle pour $x_1 = \frac{e^2}{e-1}$: négative avant et positive après. Cette fonction auxiliaire va donc en décroissant quand x varie de 0 à x_1, et en croissant quand x varie de x_1 à $+\infty$. Pour 0 la fonction part de $-\infty$, pour $+\infty$ elle revient à $-\infty$: elle a donc deux racines de part et d'autre de $\frac{e^2}{e-1}$: la plus petite est e, la plus grande est supérieure à $\frac{e^2}{e-1}$.

La fonction y est croissante jusqu'à e, décroissante entre les deux racines et croissante ensuite.

Pour $x = e$, elle passe par un maximum qui est nul.

La fonction y croît donc d'abord de $-\infty$ à 0, décroît, passe par un minimum, puis croît jusqu'à 0. Elle est représentée par la courbe suivante.

Il est visible alors que quand y varie de $-\infty$ à 0, x ne prend qu'une valeur bien déterminée, comprise entre 0 et e.



L'équation $y = f(x)$ définit donc d'une façon parfaite, dans ces conditions, une fonction x de y, $x = g(y)$, dans tout l'intervalle $(-\infty, 0)$.

Pour calculer $\int_{y'}^{y} g(y)^2 dy$, il faut d'abord calculer $\int_{y'}^{y} g(y) dy$, ce qui se fait en intégrant par parties :

$$\int_{y'}^{y} g(y) dy = yg(y) - \int_{y'}^{y} y g'(y) dy;$$

d'autre part, $dy\, y = dx$, et la deuxième intégrale est

$$\int_{y'}^{y} y g'(y) dy = e \int_{x'}^{x} x \, \mathrm{L}x - \int_{x'}^{x} x \, dx.$$

En intégrant par parties, on trouve de suite

$$\frac{ex^2}{1-e} \mathrm{L}x - \frac{e}{(1-e)^2} x^2 - \frac{x^2}{2-e}.$$

Si on remarque maintenant que pour $x = 1$, on a $y = -1$, on voit que les limites, pour x, sont 1 et e, et la partie de l'intégrale définie qui correspond à celle-ci est

$$\frac{e^2}{1-e} - \frac{e^2}{(1-e)^2} - \frac{e^2}{2-e} - \frac{e^2}{1-e} - \frac{1}{2-e}$$

ou

$$\frac{-e^2}{1-e} - \frac{2e^2}{(1-e)^2} - \frac{1}{2-e}.$$

L'autre partie, $yg(y)$, donne 1. La valeur finale de l'intégrale définie est donc

$$1 - \frac{e^2}{(1-e)^2} - \frac{2e^2}{(1-e)^2} - \frac{1}{2-e}.$$

G. LACH, à Rodez.

Bonnes solutions : MM. L. Simon, à Toulouse ; J. Pinet, à Trévoux ; Dieudonné, à Charleville ; P. Villas ; H. Laurent à Vichy ; A. de la Broise ; Ch. Guillemin ; Nannan ; G. Lemaire, lycée de Nancy ; A. Boussac ; J. Ottenheimer ; L. Sonnaert à Mont-de-Marsan.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1936. — *Étant donné un parallélogramme* OACB, *on prend, sur* OA *et* OB, *deux points*, P *et* Q, *tels que l'on ait* OP = OQ = AP = BQ :

1° *Trouver le lieu de l'intersection* M *des droites* PB, QA ;

2° *Démontrer que le cercle circonscrit au triangle* OPQ *passe par un point fixe ;*

3° *On mène par le point* P *la parallèle* PD *à* OC, *par le point* A *la parallèle* AD *à* PQ, *et, par le point* D, *la parallèle* DE *à* OA, *qui coupe* PQ *en un point* E *dont on demande le lieu ;*

4° *Trouver le lieu du centre du premier lieu, lorsque* AB *pivote autour d'un point* H, *ou se déplace parallèlement à une direction donnée ;*

5° *Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées au premier lieu par le point* H ;

6° *Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées à ce même lieu parallèlement à l'une des droites* OA, OB, AB.

1. Prenons comme axes OA et OB ; posons $OA = a$, $OB = b$ et désignons par λ l'abscisse du point P et par μ l'ordonnée du point Q.

La relation donnée $\qquad \overline{OP}\cdot\overline{OQ} = \overline{AP}\cdot\overline{BQ}$

s'écrit encore $\qquad \overline{OP}\cdot\overline{OQ} = (\overline{OP} - \overline{OA})(\overline{OQ} - \overline{OB}),$

ou $$\lambda\mu = (\lambda - a)(\mu - b),$$
ou enfin

(1) $$b\lambda + a\mu - ab = 0.$$

Ceci nous montre que le point R, quatrième sommet du parallélogramme construit sur OP et OQ, se déplace sur la droite AB.

Les droites PB et QA ont respectivement pour équations

(2) $$\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{\mu} - 1 = 0 :$$

nous aurons l'équation du lieu de leur point de rencontre en éliminant λ et μ entre les équations (1) et (2).

Des équations (2) nous tirons $\lambda = \frac{bx}{b-y}$, $\mu = \frac{ay}{a-x}$, et, en portant ces valeurs dans la relation (1), nous obtenons

$$\frac{b^2x}{b-y} + \frac{a^2y}{a-x} - ab = 0,$$

ou (3) $$b^2x(a-x) + a^2y(b-y) - ab(b-y)(a-x) = 0,$$

ou encore $$b^2x^2 + a^2y^2 + abxy - 2ab(bx + ay) + a^2b^2 = 0,$$

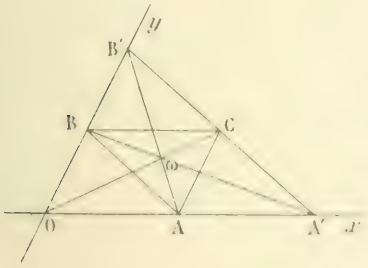
ce qu'on peut aussi écrire sous la forme

$$(bx + ay - ab)^2 - abxy = 0.$$

Cette équation représente une conique tangente en A et B aux droites OA et OB, et on reconnaît facilement que cette conique est une ellipse. De plus, sous la forme (3) on voit que cette ellipse passe au point C, et, en transportant l'origine en ce point, l'équation devient

$$b^2x(x+a) + a^2y(y+b) + abxy = 0,$$

ce qui montre que la tangente à la nouvelle origine a pour équation $bx + ay = 0$; elle est parallèle à la droite AB.



Si donc par le point C nous menons la droite A'B' parallèle à AB, l'ellipse est inscrite dans le triangle OA'B', les points de contact étant les milieux des côtés.

La droite OC, passant par le milieu de AB, est le diamètre conjugué de la direction AB ; de même, AB' est le diamètre conjugué de BC, et BA' celui de AC. Ces trois diamètres se coupent donc au même point ω, qui est le centre de la conique et qui est aussi le centre de gravité du triangle ABC. Par conséquent, les coordonnées de ce point sont $\frac{2a}{3}$ et $\frac{2b}{3}$, comme on pourrait d'ailleurs le reconnaître en résolvant les équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$.

2. Le cercle circonscrit au triangle OPQ a pour équation

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - \lambda x - \mu y = 0 ;$$

remplaçons-y μ par sa valeur $\frac{b(a-\lambda)}{a}$, tirée de la relation (1) ; l'équation devient

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - \lambda x - \frac{b(a-\lambda)}{a}y = 0,$$

ou $$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - by - \lambda\left(x - \frac{b}{a}y\right) = 0.$$

Quel que soit λ, ce cercle passe par les points dont les coordonnées vérifient les équations

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - by = 0, \qquad x - \frac{b}{a}y = 0.$$

Ces deux équations définissent deux points dont l'un est l'origine et l'autre a pour coordonnées

$$x = \frac{ab^2}{a^2 + 2ab\cos\theta + b^2}, \qquad y = \frac{a^2b}{a^2 + 2ab\cos\theta + b^2}.$$

3. Les droites PD et AD ont respectivement pour équations

$$\frac{y}{x - x} = \frac{b}{a}, \qquad \frac{x - a}{x} - \frac{y}{x} = 0,$$

ou

$$bx - ay - bx = 0, \qquad yx - xy - ay = 0.$$

Multiplions la première par $-y$, la deuxième par b et ajoutons-les membre à membre ; nous éliminons x entre les deux équations, et nous formons l'équation de la parallèle DE à OA,

$$(4) \qquad y(ax + bx - bx - ay) = 0.$$

Nous aurons le lieu du point E en éliminant λ et μ entre les équations (1), (4) et celle de PQ,

$$\mu x - \lambda y - \lambda\mu = 0.$$

Remplaçons d'abord dans l'équation (4) $\lambda\mu$ par sa valeur $\mu x - \lambda y$: nous avons une équation du premier degré en λ et μ,

$$\mu(bx + ay - ab) - 2bxy = 0,$$

ou, en posant $bx + ay - ab = \mathrm{H}$,

$$\frac{\mu}{\mathrm{H}} = \frac{y}{-2by} = \frac{bx + ay}{bH - 2abx} = \frac{ab}{bH - 2aby} = \frac{a}{H - 2ay};$$

nous en tirons

$$\mu = \frac{aH}{H - 2ay}, \qquad \lambda = \frac{-2abx}{H - 2ay}.$$

et nous portons ces valeurs dans l'équation de PQ. Nous obtenons ainsi

$$\frac{-2abxy}{H - 2ay} + \frac{aHy}{H - 2ay} + \frac{2a^2bHy}{(H - 2ay)^2} = 0,$$

ou, successivement,

$$(H - 2bx)(H - 2ay) + 2abH = 0,$$
$$H^2 - 2H(bx + ay) + 4abxy + 2abH = 0,$$
$$H^2 - 2H(bx + ay - ab) + 4abxy = 0,$$
$$H^2 - 2H^2 + 4abxy = 0,$$

ou enfin

$$(bx + ay - ab)^2 - 4abxy = 0.$$

On reconnait l'équation de la parabole tangente en A et B aux droites OA et OB.

4. Nous avons vu plus haut que le centre du premier lieu avait pour coordonnées

$$x = \frac{2a}{3}, \qquad y = \frac{2b}{3}.$$

Si la droite AB passe par le point fixe $\mathrm{H}(x_0, y_0)$, on a $\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} - 1 = 0$. Remplaçons dans cette relation a par $\frac{3x}{2}$ et b par $\frac{3y}{2}$, nous obtenons le lieu du centre $\frac{2x_0}{3x} + \frac{2y_0}{3y} - 1 = 0$, ou

$$3xy - 2y_0x - 2x_0y = 0.$$

Cette équation représente une hyperbole passant par l'origine et ayant pour asymptotes les droites

$$3x - 2x_0 = 0, \qquad 3y - 2y_0 = 0.$$

Si la droite AB se déplace parallèlement à une direction donnée ayant pour pente le nombre m, on a $-\frac{b}{a} = m$ et $\frac{y}{x} = -m$. Le lieu du centre est une droite passant par l'origine.

5. Les points de contact des tangentes menées à l'ellipse

$$(bx + ay - ab)^2 - 4abxy = 0$$

par le point H sont à l'intersection de la courbe et de la polaire de ce point, qui a pour équation

$$(bx + ay - ab)(bx_0 + ay_0 - ab) - \frac{ab}{2}(xy_0 + yx_0) = 0.$$

Mais on a $bx_0 + ay_0 - ab = 0$, donc la polaire se réduit à $xy_0 + yx_0 = 0$. Cette polaire est fixe, indépendante des points A et B, donc elle constitue le lieu cherché.

Cette droite est d'ailleurs la conjuguée harmonique de OH par rapport à OA et OB.

6. Outre la droite OA, il existe une deuxième tangente à l'ellipse dont le point de contact A_1 est symétrique de A par rapport au centre ω. Les coordonnées du point A_1 sont donc définies par les équations

$$\frac{x+a}{2} = \frac{2a}{3}, \qquad \frac{y}{2} = \frac{2b}{3}, \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{a}{3}, \qquad y = \frac{4b}{3}.$$

On trouve de même pour les coordonnées du point B_1, point de contact de la deuxième tangente parallèle à OB, $x = \frac{4a}{3}$, $y = \frac{b}{3}$, et pour celles du point C_1, symétrique de C par rapport au centre, $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{b}{3}$.

Si AB se déplace parallèlement à une direction donnée, ces différents points se déplacent sur des droites passant par l'origine, puisque le rapport $\frac{b}{a}$ est constant.

Si AB passe par un point fixe H (x_0, y_0), ces points décrivent des hyperboles passant par l'origine et dont les asymptotes sont parallèles à OA et OB.

Ainsi, par exemple, le lieu du point A_1 a pour équation

$$\frac{x_0}{3x} + \frac{4y_0}{3y} - 1 = 0, \qquad \text{ou} \qquad 3xy - 4y_0x - x_0y = 0.$$

G. LAUH, à Rodez.

Bonnes solutions par MM. Blaguière-Viec ; R. Dontot ; Ch. Guillerme ; G. Lauh, à Rodez ; Paul Remonsen, [illegible] à Lérouville ; Pierre Vergnes, collège Stanislas ; G. Fouchy ; A. Rousseau ; L. Simon.

ÉCOLE CENTRALE (1911)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

Arithmétique. Algèbre et Trigonométrie (M. [illegible])

5446. — On a mesuré les côtés d'un rectangle : $a = 16^{m}$, $l = 11^{m} \pm 1^{m}$ près. Avec quelle approximation peut-on calculer l'aire du rectangle ? Faire le calcul au moyen de la règle à calcul.

5447. — Développement de $(x+a)^n$.

5448. — Somme des carrés des n premiers nombres entiers. Démontrer que $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 3.

5449. — Somme des carrés des n premiers nombres impairs.

5450. — Somme des cubes des n premiers nombres entiers.

5451. — Étudier les systèmes :

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d, \\ a'x + b'y + c'z &= d', \\ a''x + b''y + c''z &= d'', \end{aligned} \qquad \begin{aligned} ax + by + cz &= 0, \\ a'x + b'y + c'z &= 0, \\ a''x + b''y + c''z &= 0, \\ bz - cy &= \alpha, \\ cx - az &= \beta, \\ ay - bx &= \gamma. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \beta\gamma - \alpha^2 &= 1, \\ \gamma\alpha - \beta^2 &= 1, \\ \alpha\beta - \gamma^2 &= 1. \end{aligned}$$

5452. — Étudier les séries :

$u_n = \frac{n}{3^n}$, $u_n = \frac{n}{4^n + 3}$, $u_n = \frac{n+1}{3^n + 4}$, $u_n = \frac{10.2^n}{3n^2 + 4}$, $u_n = \frac{3^n}{4 + n^2}$,

$u_n = \frac{3n^2}{4^n + 1}$, $u_n = \frac{n^2 + 3^n}{n^2 + 4^n}$, $u_n = \frac{2n + 1}{3n^2 + 4}$, $u_n = \frac{n^2 + 1}{3n^2 + 1}$, $u_n = \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + 4}\right)^n$,

$u_n = 1 - \cos\frac{\pi}{n}$, $u_n = 1 - \sqrt{\cos\frac{\pi}{n+2}}$, $u_n = \operatorname{tg}\frac{n\pi}{4n+1} - \cos\frac{\pi}{n}$, $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1$, $u_n = e^{\cos\frac{1}{n}} - 1$,

$u_n = e^{1 + \frac{1}{n}} - e$, $u_n = e^{\cos\frac{1}{n}} - e^{\cos\frac{1}{n+1}}$, $u_n = \mathrm{L}\frac{1 + n^2 + \sqrt{1 + n}}{n^2}$, $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$, $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$,

$u_n = \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + 1}}$, $u_n = \frac{n - 1}{\sqrt{n^2 + 1}}$, $u_n = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2 + 1}}$, $u_n = \frac{\sin n\pi}{n^2 + 1}$, $u_n = \sin\frac{2n\pi}{n + 1}$,

$u_n = \cos\frac{n\pi - 1}{2n + 1}$, $u_n = \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{4n + 1}$, $u_n = \frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{4n + 1}$, $u_n = \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n + 1}$, $u_n = \cos\frac{3n\pi + 4}{6n + 1}$,

$u_n = \frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n + 1}}$, $u_n = (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n + 1}}$, $u_n = \frac{x^n}{n + 1}$, $u_n = \frac{x^n}{3n + 4}$, $u_n = \frac{x^n}{\sqrt{n + 1}}$,

$u_n = x \cdot \frac{\sqrt{n}}{n + 1}$.

5453. — Calculer à $\frac{1}{10}$ près : $x = \sqrt{e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}}$; $x = \sqrt{e^{\frac{1}{3}} + e^{-\frac{1}{3}}}$.

5454. — Calculer $e^{\frac{1}{7}}$ à $\frac{1}{100}$ près.

5455. — Dérivées des fonctions suivantes :

$$y = x^{\frac{x}{x+1}}, \quad y = x^{\frac{1}{x}}, \quad y = x^{\frac{1}{x}}, \quad y = x^{\frac{1}{x+1}},$$
$$y = (x^2 - 1x)^{\frac{1}{2}}, \quad y = \frac{\mathrm{L}x}{\sqrt{x}}, \quad y = \frac{x + 1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

5456. — Trouver la relation qui existe entre les racines de la fonction $y = \frac{x + 1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ et celles du trinome $ax^2 + bx + c$. Même question pour la fonction $y = \frac{mx + n}{\sqrt{x^2 + bx + c}}$.

5457. — Dérivée n^e de $y = x \sin x$; $y = x e^x$.

5458. — Dérivées de $y = x^{\frac{x}{x+1}}$, $y = \cos 3 \operatorname{arc\,cos} x$.

5459. — Formule des accroissements finis. S'en servir pour montrer que $\mathrm{L}(1 + x)$ est compris entre x et $\frac{x}{x + 1}$.

5460. — Appliquer la formule des accroissements finis au calcul des expressions $\sin 11^\circ - \sin 10^\circ$, $\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 44^\circ$. Faire aussi le calcul avec la règle à calcul.

5461. — Dérivées de

$$y = x^{x^x}, \quad y = x^{\sqrt{x}}, \quad y = x^{\frac{1}{x^x}}, \quad y = x^{x^x}, \quad y = x^{x^{x^x}},$$
$$y = \cos x^{\cos x}, \quad y = \sin x^{\frac{1}{\cos x}}, \quad y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}, \quad y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x^2}.$$

5462. — Théorème des fonctions composées. L'appliquer à $y = \frac{u^v}{v^u}$ où u et v sont des fonctions de x.

5463. — Calculer y'_x sachant que

$$y^2 = 2px, \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} = l, \quad x^2 - y^2 = 2,$$

même calcul en résolvant par rapport à y, variation de y,

$x^2 - y^2 = 2x$ exprimer en fonction de x.

5464. — On donne l'équation $y + z = e^{x+z}$. Calculer les dérivées partielles de z par rapport à x et à y.

5465. — Théorème d'Euler sur les fonctions homogènes. Appliquer aux exemples suivants :

$$f(x, y, z) = x(y - z),$$
$$f(x, y, z) = x(y - z).$$

5466. — Différentielle totale de $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$.

5467. — Limite de $\sqrt{4}$ pour n infini ; $\left(1 - \frac{2}{m}\right)^m$ pour m infini ;

$\left(\frac{3m+4}{3m+1}\right)^m$, $\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m$, pour m infini; $(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$, $\left(\frac{\cos x - \cos 2x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$, pour $x = 0$;

$(\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\cos 2x}}$, $(\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\cos 2x}}$, pour $x = \frac{\pi}{4}$; $\frac{x+1}{x}$, pour x infini.

5468. — Limite de $\frac{1}{a}\,\mathrm{L}\,\frac{3x+a}{3x}$ quand a tend vers 0; même question pour $\frac{1}{a}\,\mathrm{L}\,(a^2x+1-x)e^{ax}$.

5469. — Variations des fonctions suivantes :

$y = \frac{x^3+2}{x+1}$, $y = \frac{x^3+3x^2+3x+2}{x+1}$, $y = \frac{4x^3+12x^2-12x+5}{x+1}$, $y = x^{\frac{1}{x}}$, $y = \frac{x^x}{x}$,

$y = xe^{\frac{1}{x}}$, $y = \mathrm{L}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1+x^2}{2x}$, $y = \frac{\mathrm{L}(1+x)}{1-x}$, $y = \frac{1}{1-x}\,\mathrm{L}\,\frac{x}{1-x}$, $y = \frac{\mathrm{L}\,x - x^2}{x}$,

$y = x^x$, $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $y = x^{\ldots}$, $y = x^{\ldots}$, $y = \ldots$, $y = \mathrm{L}\ldots$.

5470. — Maximum du produit $y = \sin x \sin 3x$.

5471. — Maximum du produit des cosinus des angles d'un triangle isocèle.

5472. — Calculer $\frac{e^{\theta}-1}{e^{\theta}+1}$.

5473. — Racines carrées de $i-1$; racines carrées de $\frac{i\operatorname{tg}75^\circ+1}{-i\operatorname{tg}75^\circ+1}$.

5474. — Racines cubiques de i; de $1+i$; de $i-1$; de $\frac{1-i}{1+i}$; de $\frac{i-\sqrt{3}}{i+\sqrt{3}}$.

5475. — Résoudre les équations $2x^3 = 1-i$; $x^3 = \frac{i-1}{\sqrt{2}}$.

5476. — Décomposition du trinome ax^2+bx+c en facteurs du premier degré.

5477. — Décomposer x^4-x^2+1 en facteurs du second degré à coefficients réels.

5478. — Décomposer en facteurs le polynome $x^4-x^3+x^2-x+1$.

5479. — Résoudre l'équation $x^6+x^5+x^4+x+1=0$ et calculer la somme des carrés des racines.

5480. — Résoudre l'équation $x^4-4x^2+16=0$. Construire géométriquement les racines.

5481. — Résoudre les équations $x^6-1=0$, $x^6+1=0$.

5482. — Résoudre l'équation $(x+1)^6-x^6-1=0$. Représentation géométrique des racines imaginaires de cette équation. Pourquoi l'une des racines est-elle le carré de l'autre? Donner une raison géométrique.

5483. — Trouver un polynome $f(x)$ du troisième degré tel que $1+f(x)$ soit divisible par $(x-2)^2$ et que $1-f(x)$ soit divisible par $(x-1)^2$.

5484. — Trouver un polynome $f(x)$ du cinquième degré tel que $1+f(x)$ soit divisible par $(x-1)^3$ et $f(x)-1$ par $(x+1)^3$.

5485. — Condition pour que l'équation $x^3+px^2+qx+r=0$ ait ses racines en progression géométrique.

5486. — Equation aux carrés des différences des racines de l'équation $x^3+px+q=0$.

5487. — Condition de réalité des racines de l'équation $x^3+px+q=0$, α, β, γ étant les racines, quelle relation y a-t-il entre $\Sigma(a-b)^2$ et $\Sigma(a+b)^2$, en supposant que $p=-6^2$? Calculer dans la même hypothèse les sommes

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},\qquad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}$$

5488. — Théorème de Descartes; appliquer à l'équation $x^3-3x-5=0$.

5489. — Discuter les équations

$x^4-12x+m=0$, $4x^3-3x+2m=0$, $3x^4-4x^3-6x^2+12x+m=0$, $m+4x^3+3x^2-12x=0$,

$x^4-12x+m=0$, $4x^3-3x+m=0$.

5490. — Reconnaître si un nombre entier ou fractionnaire peut être racine d'une équation algébrique.

5491. — Décomposer la fraction $\frac{x^n}{x^n-1}$ en éléments simples.

5492. — Appliquer la méthode d'approximation de Newton aux équations :

$x^3-2x=0$, $x^3-16=0$, $x^3-29=0$, $x^3-105=0$, $x^3-3x^2+3=0$.

5493. — Etudier les équations $2\sin x = x$, $x = e^x$, $x = 10^x$,

$4\sin x - \operatorname{tg} x + 2x = 0$ (nombre des racines entre 0 et 3π),

$x = \cos x$, $x^3 - 2\cos x = 0$, $\cot x = \cos x - x = 0$, $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} - 4 = 0$, $\frac{\mathrm{L}\,x}{x} = k$.

5494. — Résoudre les inégalités

$\frac{3x+4}{x^2+x+2} > 0$, $\sin x > \sin 3x \geqslant 0$, $4\sin^2 x - 4\sin x + 1 \leqslant 0$, $4\cos^2 x - 4\sin^2 x + 1 \geqslant 0$,

$6\sin^2 x - 8\sin x + 1 \geqslant 0$, $4\sin^2 x - 5\sin x - 1 \leqslant 0$, $4\cos^2 x - 4\sin^4 x + 1 \geqslant 0$,

$4\sin^3 x - 9\sin^2 x + 6\sin x - 1 > 0$, $4\sin^2 x + 4\sin^4 x + 8\cos x - 3 > 0$, $2\cos 2x - 2 < x$.

$$\sin 3x > \sin 2x, \qquad \cos 2x > \sin x, \qquad 2\sin x - \cos x - 1 > 0, \qquad \sin x + 2\cos x > 2.$$

5495. — x étant pris comme infiniment petit principal, trouver l'ordre infinitésimal et la partie principale des infiniment petits suivants :

$$1-\cos x, \qquad 1-\cos 3x, \qquad \cos x - \cos 2x, \qquad 1-\sqrt{\cos x},$$
$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}, \qquad \sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x}, \qquad \sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 2x}, \qquad \sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[3]{\cos 3x},$$
$$\sin^2 2x + \operatorname{tg}^2 3x, \qquad \operatorname{tg} x \cos x - \cos 2x, \qquad \operatorname{tg} x - \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 2x}, \qquad e^{\sin x} - \sqrt{1+x},$$
$$\operatorname{tg}\frac{\pi+x}{1+x}, \qquad \operatorname{cotg}\frac{3\pi+x}{2+x}, \qquad \mathrm{L}\,1+x^2, \qquad \mathrm{L}\cos 4x,$$
$$\mathrm{L}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+3x\right), \qquad 2^{\cos x}+\sqrt{\cos x}-2, \qquad \sin^2 x - \mathrm{L}\cos x, \qquad e^{\sin x}+\operatorname{tg}\frac{3\pi+x}{4-x}.$$

5496. — Soit $y' = x^m$; calculer celle des fonctions primitives qui s'annule pour $x = 1$; limite de cette fonction quand m tend vers -1.

5497. — Trouver les fonctions primitives des fonctions suivantes :

$$y' = \frac{1}{2x-x^2}, \qquad y' = \frac{1}{x(x-a)}, \qquad y' = \frac{3}{x^2+3x}, \qquad y' = \frac{1}{3x^2+ax}, \qquad y' = \frac{x+1}{x^2+ax}.$$
$$y' = \frac{x^2-1}{x^2+ax}, \qquad y' = \frac{x^2}{x^2-1}, \qquad y' = \frac{1}{x^2+x-1}, \qquad y' = \frac{1}{x^2+x-a}, \qquad y' = \frac{1}{x^2+2x-3}.$$
$$y' = \frac{1}{x^2-1}, \qquad y' = \frac{1}{x^2+1}, \qquad y' = \frac{1}{x^2+x+1}, \qquad y' = \frac{1}{x^2+2x\cos\alpha+\sin^2\alpha}, \qquad y' = \frac{1}{x^2+5}.$$
$$y' = \frac{1}{(x^2+x)^2}, \qquad y' = \frac{x^2}{x^2+1}, \qquad y' = \frac{x}{x^2-1}, \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-x^2}}, \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}},$$
$$y' = \frac{2x-5}{\sqrt{x^2-x^2}}, \qquad y' = \frac{x+1}{\sqrt{x(1-x)}}, \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}, \qquad y' = \frac{x}{\sqrt{x(3-x)}}, \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x\cos\alpha+1}}.$$
$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x+ax}}, \qquad y' = \frac{x+4}{\sqrt{x(x+4)}}, \qquad y' = \sqrt{\frac{x-1}{x}}, \qquad y' = \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}.$$

5498. — Trouver les fonctions primitives des fonctions suivantes :

$$y' = xe^x, \qquad y' = \frac{x}{x^2+3}, \qquad y' = e^{-x}, \qquad y' = \cos^2 x - \sin^2 x,$$
$$y' = \operatorname{tg} 2x, \qquad y' = \operatorname{tg} 4x, \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad y' = \operatorname{tg} x.$$
$$y' = \operatorname{tg}^2 x, \qquad y' = \frac{\cos x}{1+\sin x}, \qquad y' = \frac{\cos x}{\sin^2 x - a\sin x}, \qquad y' = \frac{\cos x}{\sin^2 x + 3\cos x},$$
$$y' = \frac{1}{\cos^2 x + 2\sin^2 x}, \qquad y' = \frac{1}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}, \qquad y' = \frac{\cos x}{\sin^2 x - 3}, \qquad y' = \frac{\cos x}{\sqrt{3\sin^2 x + \cos^2 x}},$$
$$y' = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 3}}.$$

5499. — Trouver les fonctions y de la variable x vérifiant les équations

$$y' = 3y + 4, \qquad y' = \frac{2y+y'}{2x-x}, \qquad y' = \sqrt{\frac{y-y'}{x-x^2}}, \qquad y' = \sqrt{\frac{y'+2y}{x^2+2x}}.$$

5500. — Trouver les fonctions y qui sont égales à leur dérivée seconde.

5501. — On considère l'équation différentielle $y'' + y' = e^{-x}$. Que devient cette équation quand on pose $y = ue^{-x}$, u étant une fonction de x ? Trouver les fonctions u (de x), telles que $u'' = 1 + u'$.

5502. — Calculer sin 7° avec la règle à calcul, puis au moyen d'un développement en série. Trouver une limite supérieure de l'erreur commise, si dans la série on prend les deux premiers termes seulement et justifier le résultat. Même question avec sin 2°, sin 15°, sin 36°.

5503. — Calculer cos 18° et sin 18° avec la règle à calcul.

5504. — Calculer cos 18° : 1° par la série ; 2° par la règle à calcul ; 3° par les tables.

5505. — Calculer avec la règle $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$.

5506. — Calculer $\sin\frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{3}\right)$.

5507. — Soit $y = \sin\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)$. Trouver la relation algébrique entre x et y.

5508. — Calculer tg 15° directement, puis par la règle à calcul. Calculer tg 25°, tg 75°.

5509. — Calculer $\cos\frac{a}{2}$ connaissant $\operatorname{tg} a$. Faire le calcul avec la règle à calcul, pour $\operatorname{tg} a = 0{,}6$.

5510. — Calculer $\cos a$ et $\sin a$ en fonction des lignes de l'arc $3a$.

5511. — Calculer $\sin x$ en fonction de $\operatorname{tg}\frac{x}{4}$. Appliquer au cas où $\frac{x}{4} = 30°$. Expliquer pourquoi, étant donné

$\sin x$, on trouve quatre valeurs pour $\operatorname{tg}\frac{x}{4}$. Peut-on résoudre l'équation qui donne $\operatorname{tg}\frac{x}{4}$ en fonction de $\sin x$?

5512. — On considère le cercle trigonométrique et on divise le quadrant AB en n parties égales. Des points de division on abaisse des perpendiculaires sur OA. Calculer la somme ΣOP des distances du centre aux pieds de ces perpendiculaires.

5513. — Calculer une somme de cosinus d'arcs en progression arithmétique. Représentation graphique des imaginaires $e^{i\theta}$, $e^{2i\theta}$, de leur somme $e^{i\theta}+e^{2i\theta}$; de la somme $1+e^{i\theta}$.

5514. — Somme des cosinus d'arcs en progression arithmétique de raison $\frac{2\pi}{n}$; somme des carrés de ces cosinus.

5515. — Résoudre l'inégalité $a\cos x + b\sin x > c$.

5516. — Etudier les équations

$$4\sin^2 x - 3\sin x + 4y = 0, \qquad \cos^3 x - \cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$$

5517. — Relations entre les tangentes des angles d'un triangle ; entre les tangentes des demi-angles.

5518. — Résoudre un triangle connaissant : 1° les angles et la hauteur h relative au côté a ; 2° les angles et le périmètre. (Rendre calculable par logarithmes la somme $\sin A + \sin B + \sin C$) ; 3° un côté, l'angle opposé et la différence des deux autres côtés (construction géométrique du triangle) ; 4° un côté, l'angle opposé et sa bissectrice ; 5° un côté, l'angle opposé et la hauteur issue du sommet de cet angle.

5519. — Mesure de la hauteur d'une tour.

5520. — Démontrer la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. En déduire $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$. Que devient la formule obtenue quand le rayon de la sphère augmente indéfiniment ?

5521. — Dans un triangle sphérique, on suppose $b = c$. Calculer $\sin\frac{a}{2}$ au moyen de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, puis démontrer le résultat obtenu directement. Que devient ce résultat lorsque le rayon de la sphère augmente indéfiniment ?

5522. — Dans un triangle ABC, on a $AB = AC = 20^m$. On a déterminé l'angle $A = 60^\circ\ 0'\ 0''$ près. Avec quelle approximation peut-on calculer BC ?

5523. — On donne une droite indéfinie $x'x$ et deux points A et B projetés sur cette droite en A' et B' ; on donne $A'A = a$, $B'B = b$, $A'B' = c$. M est un point variable sur cette droite. Limite de la différence $MA - MB$ lorsque M s'éloigne indéfiniment sur la droite.

5524. — On considère un angle droit xOy ; sur l'un des côtés Ox, deux points fixes A et B ($OA = a$, $OB = b$) ; sur l'autre Oy, un point variable $M(y = OM)$. Trouver le maximum de l'angle AMB. Calculer cet angle pour $a = 100^m$, $b = 101^m$, $y = 100^m$.

Géométrie analytique et mécanique (M. Jablonski).

Géométrie analytique.

5525. — Construire les longueurs $x = \sqrt{\frac{ba^2 - ab^2}{a - b}}$, $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

5526. — Que représente l'expression $\sqrt{a - b}$; puis l'expression $\sqrt{\frac{a - b}{a + b}}$? Construire cette dernière longueur.

5527. — Les hauteurs d'un triangle sont concourantes. (Partir des équations des côtés du triangle.)

5528. — Que représente une équation homogène et du second degré entre x et y ? Conditions d'orthogonalité des deux droites ; équation des bissectrices.

5529. — Condition pour qu'une équation du second degré représente deux droites.

5530. — Mener à la courbe $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ les tangentes de direction m.

5531. — Tangentes communes à deux cercles.

5532. — Construire les courbes

$$y = \frac{1}{x} \pm \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}, \qquad y = \frac{x - \sqrt{x^2 + x - 1}}{x - 1}, \qquad x = y \pm \sqrt{\frac{y}{y - 1}}$$

5533. — Construire les courbes

$$x = \frac{t}{t^2 - 1}, \qquad y = \frac{t + 1}{t}, \qquad x = \frac{t}{t - 1}, \qquad y = \frac{t^2}{t^2 - 2t + 2}, \qquad x = \frac{\sqrt{t - 1}}{t}, \qquad y = \frac{t + 1}{t}$$

5534. — Construire la courbe $x^3 + 2y^3 + xy - x + 3y = 0$.

5535. — Tangentes à l'origine dans la courbe $x^2 + y^2 + x^3 + y^3 = 0$; $x^2 + y^2 + 2xy + x = 0$.

5536. — Asymptote parallèle à Oy dans la courbe $y(x - 1) + y^2 - x^2 + x - 3 = 0$. Placer la courbe par rapport à l'asymptote.

5537. — Asymptotes de la courbe $x^3 - y^3 + xy - x - y = 0$.

5538. — Recherche des asymptotes de la courbe $x^4 - 2x^2y + y^2 - x^2 - y^2 - 3x = 0$.

5539. — Résoudre l'inégalité $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - 3 > 0$.

5540. — Courbe pour laquelle la sous-normale est proportionnelle à l'abscisse.

5541. — Courbe pour laquelle la somme de la sous-tangente et de la sous-normale est constante.

5542. — Rayon de courbure. Le calculer pour la courbe $y = x^2 + x^3$, à l'origine.

5543. — Rayon de courbure à l'origine pour la courbe $y^2 = 2px + qx^2$.

5544. — Trouver un point sur la parabole $y^2 = 2px$, tel que le centre de courbure correspondant à ce point soit également situé sur la parabole.

5545. — Centre de courbure de la courbe $y^2 - x^2 - 2x + y + 6 = 0$ au point $x = -2$, $y = 0$.

5546. — Centre de courbure de la courbe $x = \frac{t}{t-1}$, $y = \frac{t^2}{t+1}$ au point $t = -1$.

5547. — Equation d'un cercle en coordonnées polaires ; condition pour qu'un cercle passe par le pôle.

5548. — Construire les courbes :

$\rho = \sin\omega + 1 + \cos\omega$, $\rho = \frac{1+\cos\omega}{1-2\sin\omega}$, $\rho = \frac{\cos\omega + \sin\omega}{1+\cos\omega}$, $\rho = \frac{\sin\omega}{2-2\sin\omega}$, $\rho = \frac{\sin\omega}{\cos\omega - \frac{1}{3}}$,

$\rho = \frac{\sin\omega}{1+3\cos\omega}$ (asymptotes), $\rho = \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{1-\sin\omega}$, $\rho = \frac{\sin^2\omega}{1+\cos\omega}$.

5549. — Cissoïde droite, équation et construction de la courbe.

5550. — Equation d'une droite en coordonnées polaires. Qu'appelle-t-on conchoïde de droite ? Construire cette courbe d'après l'équation $\rho = a - \frac{h}{\cos\omega}$.

5551. — Conchoïde de cercle ; construction d'un point et de la tangente en ce point. Equation.

5552. — Mener à la courbe $\rho = \cos^2\omega$ des tangentes de direction donnée.

5553. — Axes des coniques $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 3y - 1 = 0$; $x^2 + 2xy + 4y^2 - 3x + 5y + 1 = 0$.

5554. — Réduire les équations $x^2 + 4y^2 - 8xy - 1 = 0$, $x^2 + 4xy + 4y^2 - x + 2y - 1 = 0$.

5555. — Foyers de l'ellipse $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$, calculer l'excentricité.

5556. — Foyers de l'hyperbole $xy - x - y = 0$.

5557. — Mener d'un point donné une tangente à la courbe $xy - 1 = 0$.

5558. — Mener d'un point une normale à la courbe $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$.

5559. — Une ellipse étant définie par ses deux axes, on en donne un diamètre. Construire géométriquement le diamètre conjugué.

5560. — Trouver sur l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ le point où la tangente fait un angle aigu α avec la droite qui joint le point de contact au centre.

5561. — Polaire d'un point par rapport à une conique ; lieu de ce point lorsque la polaire passe par un point fixe ; dans quel sens le point décrit-il son lieu quand la polaire tourne constamment dans le même sens ?

5562. — Condition pour que la droite $y = mx + h$ soit normale à la parabole $y^2 = 2px$.

5563. — Exprimer qu'une droite est asymptote à une conique.

5564. — Intersection de deux coniques. Cas où les deux coniques ont une asymptote commune, soit Ox.

5565. — Condition pour que les quatre points communs à deux coniques soient sur un même cercle.

5566. — Équation générale des coniques tangentes à deux droites données en deux points donnés ; lieu des centres de ces coniques ; trouver les paraboles du faisceau.

5567. — Hyperbole équilatère passant par quatre points.

5568. — Équation générale des coniques passant par quatre points donnés. On prend le pôle d'une droite D par rapport à chacune des coniques du faisceau : lieu de ce point.

5569. — Bissectrice de l'angle des deux droites $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, $\frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'}$.

5570. — Angle de la droite $x - 3z - 1 = 0$, $y - 2z + 1 = 0$ avec le plan $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

5571. — Par la droite $x - y = 0$, $x + y - z = 0$, mener un plan faisant l'angle α avec la droite $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

5572. — Mener par une droite un plan perpendiculaire à un plan donné.

5573. — Distance du point x, y, z à la droite $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

5574. — Distance du point $1, -1, -2$ à la droite $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$.

5575. — Distance d'un point à la droite $x = az + h$, $y = bz + k$.

5576. — Distance du point (3, -1, 2) à la droite $x + y - z = 0$, $2x + y + 3z - 1 = 0$.

5577. — Distance de l'axe Ox à la droite $x - y - 1 = 0$, $y + z - 2 = 0$.

5578. — Distance de Oz à la droite $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{4}$.

5579. — Perpendiculaire commune aux deux droites : $\begin{cases} x - y = 0, & x + y - 1 = 0, \\ y - z - 1 = 0; & y + z = 0. \end{cases}$

5580. — Rayon de la section de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 0$ par le plan $x - y - 2z = 0$. Coordonnées du pôle de ce plan. Longueur du petit axe de l'ellipse, projection de la section sur le plan des xy.

5581. — Condition d'orthogonalité de deux sphères.

5582. — Tangente à l'origine pour la courbe $x^2 + y^2 - x = 0$, $x + y - z = 0$.

5583. — Plan osculateur à une courbe gauche en un point; montrer qu'il traverse la courbe en ce point.

5584. — Normale principale à la courbe gauche $xy - x + y = 0$, $xz - y - x - z = 0$, à l'origine des coordonnées.

5585. — Equation d'un cône de révolution ayant pour sommet l'origine, pour axe la droite $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$ et pour angle générateur α.

5586. — Equation d'un cylindre de révolution d'axe $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{-1}$ et de rayon 3.

5587. — Equation du cône qui a pour sommet l'origine et pour directrice la courbe $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0$, $x + y + z = 2a$.

5588. — Cône ayant pour sommet l'origine et circonscrit à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 1 = 0$.

5589. — Cône de sommet 1, 2, 3, circonscrit à la surface $xy - z = 0$.

5590. — Cylindre de direction α, β, γ circonscrit à la surface $x^2 + y^2 - z^2 - a^2 = 0$. Est-il possible de choisir α, β, γ de façon que le cylindre soit de révolution ?

5591. — Cylindre de direction 3, 1, 2 circonscrit à la surface $xy + xz + yz - 1 = 0$.

5592. — Surface engendrée par une droite parallèle au plan xOy, s'appuyant sur Oz et sur la droite $x = a$, $y = mz$.

5593. — Surface engendrée par la droite $x = a$, $y = mz$ en tournant autour de Oz.

5594. — Equation de la surface engendrée par la courbe $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$, $x - y = 0$, en tournant autour de la droite $x = 0$, $y - z = 0$.

5595. — Contour apparent sur le plan des xy d'une quadrique

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4yz - 1 = 0; \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2xz + 4yz + 2x + y = 0.$$

5596. — Que représente l'équation $xy - z = 0$? Trouver l'axe de cette quadrique.

5597. — Directions principales de la quadrique $x^2 - y^2 + z^2 - 4xz = 0$.

5598. — Directions principales de la quadrique $y^2 - z^2 + 2xy - 2xz - 1 = 0$.

5599. — Réduire les équations

$$x^2 + y^2 - 4yz - 2x - 3y = 0, \qquad 2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4x + 5y - 1 = 0.$$

5600. — Mener par le point (1, 3, 5) les plans tangents à la quadrique $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$.

5601. — Mener à la surface $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 0$ un plan tangent parallèle à la direction 1, -1, 1.

5602. — Mener par la droite $x - y + 1 = 0$, $2x + z - 3 = 0$ un plan tangent à la quadrique

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 3 = 0.$$

5603. — Mener à un ellipsoïde un plan tangent parallèle à un plan donné.

5604. — Lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes sont tangentes à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

5605. — Sections circulaires de l'ellipsoïde.

5606. — Trouver des sections de l'ellipsoïde $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ qui se projettent suivant des cercles sur le plan yOz.

5607. — Mener à la quadrique $x^2 + y^2 - z^2 - a^2 = 0$ un plan tangent perpendiculaire à la droite $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$.

5608. — Sommets de la section de la quadrique $x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$ par le plan $x - y = 0$.

5609. — Sections de l'hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 - a^2 = 0$ par les plans $x + y + z = 0$, $x - y = 0$.

5610. — Par la génératrice $x = a$, $\dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$ de l'hyperboloïde $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, mener un plan qui détermine une seconde génératrice perpendiculaire à la première.

5611. — Sections circulaires du paraboloïde $x^2 + 2y^2 - z = 0$.

5612. — Mener par la droite $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ un plan qui détermine dans la surface $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ une hyperbole équilatère.

5613. — Diamètres dans le paraboloïde $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0$.

5614. — Foyer de la parabole $xy - z = 0$, $x + y - 1 = 0$.

5615. — Placer sur la surface $x^2 - y^2 - 2az = 0$ des droites parallèles au plan $2x + y - z = 0$.

5616. — Intersection d'un paraboloïde hyperbolique et d'un plan passant par une génératrice rectiligne de ce paraboloïde.

5617. — Mener du point $x = a$, $y = b$, $z = 0$ une normale à la quadrique $x^2 - y^2 - 2pz = 0$.

5618. — Que représente l'équation $PQ + QR + RP - 1 = 0$, les trois plans $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ formant un trièdre ?

Mécanique.

5619. — Etudier les mouvements rectilignes définis par les équations suivantes :

$$x = 3t^2 - 2t, \qquad x = e^{\frac{t}{2}+\sqrt{t}}, \qquad x = a\cos\omega t \text{ (diagramme)}, \qquad x = a\,\mathrm{ch}\,\omega t.$$

5620. — Mouvement rectiligne d'accélération constante.

5621. — Mouvement rectiligne défini par l'équation $\gamma = \sqrt{v^2 - v_0^2}$; nature de ce mouvement ; quelle est la force qui le produit ?

5622. — Composition de trois mouvements vibratoires parallèles :

$$x = a\sin\omega t + \alpha, \qquad x = b\sin(\omega t - \beta), \qquad x = c\sin(\omega t + \gamma).$$

5623. — Etudier le mouvement défini par les équations $x = \cos\omega t$, $y = \cos 2\omega t$.

5624. — Mouvement défini par les équations $x = at$, $y = bt$, $z = \frac{1}{2}ct^2$.

5625. — Etudier le mouvement $x = a\sin\omega t$, $y = a\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$, $z = a\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$. Trajectoire.

5626. — Mouvement circulaire. Composantes du vecteur vitesse suivant Ox et Oy.

5627. — L'hodographe d'un mouvement étant donné par les équations $x = a\cos\omega t$, $y = a\sin\omega t$, $z = b$, trouver la loi du mouvement ; quelle est la force qui produit le mouvement ?

5628. — Définition et expression de l'accélération tangentielle dans un mouvement curviligne. Qu'arrive-t-il si l'accélération tangentielle est proportionnelle au vecteur vitesse ? La trajectoire étant circulaire, que serait l'accélération normale ?

5629. — Projections sur trois axes de coordonnées rectangulaires de l'accélération normale d'un mouvement curviligne.

5630. — Un point M est mobile dans un plan, de telle façon que ses distances à deux points fixes A et B du plan soient données par les formules $MA = a\sin\omega t$, $MB = a\cos\omega t$. Trajectoire du point M ; loi du mouvement.

5631. — Mouvement autour d'un axe fixe. Composantes de la vitesse et de l'accélération.

5632. — Mouvement d'un projectile pesant ; lieu du sommet de la trajectoire lorsque l'angle α sous lequel est lancé le projectile varie, la vitesse initiale v_0 étant donnée.

5633. — Mouvement produit par l'attraction ou la répulsion de plusieurs centres fixes et proportionnelle à la distance.

5634. — Enoncer les lois de Képler. En déduire la loi de Newton.

5635. — Mouvement d'un point de masse 1, sous l'action d'une force centrale $F = \frac{1}{r^2} - \frac{a}{r^3}$.

5636. — Travail d'une force ; cas particulier d'une force tangente à la trajectoire et constante en grandeur.

5637. — Lignes de force. On considère le champ défini par les équations $X = x$, $Y = y$, $Z = g$. Projections des lignes de force sur le plan des xy. Nature de la force.

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

1986. — On considère trois cercles de rayon 5 m, dont les centres sont les sommets d'un triangle de côtés : 6m, 7m et 8m. Quelle est l'aire du triangle curviligne commun à ces trois cercles ?

A. Sainte-Laguë.

1987. — On considère un cercle de centre O, deux diamètres rectangulaires Ox, Oy et un point M de ce cercle. Du point M on abaisse la perpendiculaire MP sur Ox et du point P on abaisse la perpendiculaire PQ sur OM. A partir du point O, on porte sur Oy et dans le sens Oy, une longueur $OR = OQ$; par le point R on mène la parallèle RS à OM. Enveloppe de cette droite RS lorsque le point M décrit le cercle.

Louis Sire, à Lyon.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

22e Année. Décembre 1911. N° 3.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LE RAYON DE COURBURE D'UNE CONIQUE

par M. **Louis Sire**.

1. — Nous énonçons le théorème connu :

Le produit des rayons de courbure en deux points correspondants d'une courbe et de sa polaire réciproque par rapport à un cercle est inversement proportionnel au cube du sinus de l'angle de la tangente en un point d'une des courbes avec le rayon vecteur joignant le point de contact au centre du cercle.

2. — La polaire réciproque d'une conique par rapport à un de ses foyers étant un cercle, nous avons le théorème connu :

Le rayon de courbure en un point d'une conique est inversement proportionnel au cube du sinus de l'angle de la tangente à la conique, avec le rayon vecteur qui joint le point de contact au foyer de la conique.

Il résulte de ce dernier théorème que :

Les tangentes issues d'un point de l'axe non focal d'une conique font des angles égaux avec les rayons vecteurs joignant un des foyers aux points de contact.

La tangente en un point d'une conique fait des angles égaux avec les rayons vecteurs joignant le point de contact aux foyers de la conique.

3. — Considérons la conique (C′), polaire réciproque d'une conique (C) par rapport à un cercle quelconque O. Soient A et a deux points correspondants des coniques (C) et (C′), m un point quelconque du plan, Δ sa polaire par rapport à la conique (C). Le rayon de courbure de la conique (C′) au point a a une expression de la forme $\rho = k\left(\frac{h}{H}\right)^3$, h étant la distance du point o à la droite Δ et H la distance du point m à la tangente en a à la conique (C′).

Nous en déduisons, pour le rayon de courbure ρ de la conique (C) au point A, l'expression

$$\rho = k\frac{h}{H\sin\varphi}$$

Soient b, c les points de rencontre de la droite Δ avec la conique (C′), B et C les points correspondants de la conique (C). Le triangle abc, inscrit dans la conique (C′), est le triangle polaire réciproque, par rapport au cercle O, du triangle circonscrit à la conique (C), aux sommets du triangle ABC, et réciproquement; par suite, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Le rayon de courbure en l'un des sommets d'un triangle inscrit dans une conique est proportionnel au cube de la hauteur relative au côté correspondant du triangle polaire réciproque par rapport à un cercle et inversement proportionnel au cube de la hauteur relative au côté correspondant du triangle polaire réciproque du triangle circonscrit à la conique aux sommets du premier, et au cube du sinus de l'angle de la tangente à la conique, avec le rayon vecteur joignant le point de contact au centre du cercle.

Il résulte de ce théorème que si les points B et C décrivent la conique (C), le rapport $\frac{H}{h}$ reste constant.

Le rapport $\frac{H}{h \sin \varphi}$ est le même pour tous les triangles inscrits dans un cercle.

Désignons par ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure de la conique (C) aux points B et C ; nous aurons

$$\rho_1 \rho_2 = k\left(\frac{HH_1H_2}{hh_1h_2}\right)^3 \frac{1}{\sin\varphi \sin\varphi_1 \sin\varphi_2} = k\left(\frac{S}{s}\right)^3 \left(\frac{r}{R}\right)^3 \frac{1}{\sin\varphi \sin\varphi_1 \sin\varphi_2},$$

c'est-à-dire :

Le produit des rayons de courbure aux deux sommets d'un triangle inscrit dans une conique est proportionnel à la sixième puissance du rapport des surfaces des triangles polaires réciproques, par rapport à un cercle, de ce triangle et du triangle circonscrit à la conique aux sommets de celui-ci, et inversement proportionnel au cube du rapport des rayons des cercles circonscrits à ces triangles polaires réciproques et au cube du produit des sinus des angles des tangentes à la conique avec les rayons vecteurs joignant les points de contact au centre du cercle.

4. Si le cercle O est le cercle conjugué au triangle ABC, nous voyons que :

Le rayon de courbure en l'un des sommets d'un triangle inscrit dans une conique est proportionnel au cube de la hauteur correspondante de ce triangle et aussi proportionnel au cube de la hauteur relative au côté correspondant du triangle polaire réciproque du triangle circonscrit à la conique aux sommets du premier, par rapport au cercle conjugué à ce dernier triangle et au cube du sinus de l'angle de la tangente à la conique avec le rayon vecteur joignant le point de contact à l'orthocentre du triangle.

5. Il résulte, également, du théorème 3 que :

Le rayon de courbure en l'un des sommets d'un triangle inscrit dans une conique est proportionnel au cube de la hauteur relative au côté correspondant du triangle polaire réciproque par rapport à un cercle et inversement proportionnel à la puissance $\frac{3}{2}$ du produit des distances du pôle de la tangente au point considéré, aux deux côtés du triangle polaire réciproque qui ne contiennent pas ce pôle et au cube du sinus de l'angle de la tangente à la conique avec le rayon vecteur joignant le point de contact au centre du cercle.

A. [illegible]

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1939. — *Montrer qu'il existe une infinité de cubiques circulaires passant par les sommets d'un triangle, l'orthocentre et les pieds des hauteurs.*

Trouver le lieu du foyer singulier de chacune de ces cubiques, l'enveloppe de l'asymptote réelle et le lieu du point de rencontre de cette droite avec la cubique correspondante.

Montrer que, pour chacune de ces cubiques, les tangentes aux sommets du triangle sont parallèles, celles aux pieds des hauteurs concourantes et trouver le lieu du point de concours de ces dernières.

Soit le triangle ABC ; nous prendrons comme axes de coordonnées le côté BC de ce triangle et la hauteur correspondante AO, et nous désignerons par b et c les abscisses des points B et C, et par a l'ordonnée du point A.

Le cercle décrit sur BC comme diamètre et la droite AO constituent une cubique circulaire passant par les sept points envisagés, et l'équation de cette cubique est

$$x(x^2+y^2) - b(a-c)y^2 - ac(a-b)x = 0;$$

de même, nous obtenons une seconde cubique circulaire en associant la hauteur

BD au cercle décrit sur AC comme diamètre

$$f_1(x, y) = (x - c) + y(y - a)(cx - ay - bc) = 0.$$

Il en résulte que l'équation générale des cubiques considérées sera $\lambda f(x, y) + f_1(x, y) = 0$, ou

$$\lambda(x^2 + y^2 - (b + c)x + bc) + x^2 + y^2 - cx - ay(cx - ay - bc) = 0,$$

λ étant un paramètre quelconque.

Cette équation peut s'écrire

$$(x^2 + y^2)(\lambda + c)x - ay) - (\lambda + c)(b + c)x^2 + (a^2 - bc)y^2 + bc(\lambda + c)x + ay) = 0,$$

ou encore, en posant $\lambda + c = am$,

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)(mx - y) - m(b + c)x^2 + \frac{a^2 - bc}{a} y^2 + bc(mx + y) = 0.$$

1. *Tangentes aux sommets du triangle.* — Nous avons

$$F'_x = 2x(mx - y) + m(x^2 + y^2) - 2m(b + c)x + bcm, \quad F'_y = 2y(mx - y) - (x^2 + y^2) + 2\frac{a^2 - bc}{a} y - bc;$$

en y remplaçant successivement x et y par les coordonnées des sommets du triangle, on vérifie aisément que le rapport $-\frac{F'_x}{F'_y}$ prend la même valeur m. On en conclut que les tangentes aux sommets du triangle sont parallèles à l'asymptote réelle.

2. *Tangentes aux pieds des hauteurs.* — La tangente au point O a pour équation $y + mx = 0$.

Considérons maintenant la tangente au point D ; ce point est l'intersection du côté AC et de la hauteur BD. Les équations de ces droites sont $\frac{x}{c} + \frac{y}{a} - 1 = 0$, $\frac{y}{x - b} = \frac{c}{a}$; en les résolvant, nous obtenons les coordonnées du point D, $x_0 = \frac{c(a^2 + bc)}{a^2 + c^2}$, $y_0 = \frac{ac(c - b)}{a^2 + c^2}$.

Par suite, la tangente en ce point a pour équation $xF'_{x0} + yF'_{y0} + F'_{z0} = 0$.

Un calcul facile donne

$$F'_{x0} = \frac{c(c - b)(a^2 + bc)}{(a^2 + c^2)^2} m(a^2 - c^2) - 2ac, \qquad F'_{y0} = \frac{c(c - b)(a^2 + bc)}{(a^2 + c^2)^2} (a^2 - c^2) + 2mac,$$

$$F'_{z0} = \frac{c^2(c - b)(a^2 + bc)}{(a^2 + c^2)^2} - m(a^2 - bc) + a(b + c).$$

Il en résulte que l'équation de la tangente au point D peut s'écrire

$$x(m(a^2 - c^2) - 2ac) + y(a^2 - c^2 + 2mac) + c(-m(a^2 - bc) + a(b + c)) = 0.$$

Celle de la tangente au point E s'en déduit en permutant b et c :

$$x(m(a^2 - b^2) - 2ab) + y(a^2 - b^2 + 2mab) + b(-m(a^2 - bc) + a(b + c)) = 0.$$

Formons l'équation de la droite joignant l'origine au point de rencontre de ces deux tangentes ; il suffit de multiplier la première équation par b, la deuxième par $-c$, puis d'ajouter membre à membre. On obtient ainsi l'équation

$$(b - c)(a^2 + bc)(y + mx) = 0,$$

qui représente précisément la tangente au point O.

On en conclut que les trois tangentes passent par un même point.

Nous aurons le lieu de ce point en éliminant m entre l'équation de la tangente en O ou celle de la tangente en D, c'est-à-dire en remplaçant dans celle-ci m par $-\frac{y}{x}$. Nous obtenons ainsi

$$x^2 + y^2 - \frac{b + c}{2} x - \frac{a^2 - bc}{2a} y = 0,$$

et cette équation représente le *cercle des neuf points* du triangle ABC. Car on voit immédiatement que

ce cercle passe au point O, au milieu de BC et au milieu de AH, puisque l'ordonnée du point H est $-\frac{bc}{a}$.

3. *Asymptote réelle.* — Posons $\frac{b+c}{2} = \alpha$, $\frac{a^2 - bc}{2a} = \beta$, l'équation de la cubique s'écrit

$$(x^2 + y^2 - mx - y)(-2\alpha x^2 + 2\beta y^2 + bc(mx - y)) = 0.$$

L'asymptote réelle a pour pente m; pour calculer son ordonnée à l'origine, remplaçons dans l'équation de la courbe y par $mx + h$, nous obtenons

$$(x^2 + (mx + h)^2 - (mx + h) - 2m\alpha x^2 + 2\beta(mx + h)^2 - bc(2mx + h)) = 0,$$

puis, ordonnons par rapport à x,

$$(1) \qquad x^2(1 + m^2) - 2m\alpha + 2\beta m^2 + 2\beta m - bc) + (h^2 + 2\beta h + bc) - h(1 + 2\beta h + bc)h = 0.$$

Annulons le coefficient de x^2, $-h(1 + m^2) - 2m\alpha + 2\beta m^2 = 0$, d'où nous tirons $h = \frac{2\beta m^2 - 2m\alpha}{1 + m^2}$, c'est l'ordonnée à l'origine de l'asymptote.

Il en résulte que l'équation de cette droite est $y = mx + \frac{2\beta m^2 - 2\alpha m}{1 + m^2}$.

Comme cette équation renferme le paramètre m au troisième degré, l'enveloppe de cette droite est une courbe de troisième classe. Il est aisé de voir que c'est une hypocycloïde à trois rebroussements. En effet, cherchons l'équation tangentielle de l'enveloppe, et pour cela identifions l'équation de l'asymptote et l'équation $ux + vy + w = 0$; nous avons

$$\frac{m}{u} = \frac{-1}{v} = \frac{2\beta m^2 - 2\alpha m}{(1 + m^2)w},$$

et il n'y a plus qu'à éliminer m entre ces deux équations.

Nous obtenons ainsi $w(u^2 + v^2) - 2\alpha(u^2 - v^2) - 2\beta uv = 0$.

On reconnaît l'équation d'une hypocycloïde à trois rebroussements.

Le point de rencontre de l'asymptote et de la courbe est défini par l'équation (1), dans laquelle on donne à h la valeur qui annule le coefficient de x^2. On a ainsi pour l'abscisse,

$$x = -\frac{h^2 - 2\beta h - bch}{2m(h^2 - 2\beta h - bch)} = -\frac{h}{2m} \qquad \text{et pour l'ordonnée} \qquad y = mx + h = -\frac{h}{2} + h = \frac{h}{2};$$

ou, en remplaçant h par sa valeur, $x = -\frac{\alpha - \beta}{1 + m}$, $y = \frac{\beta m - \alpha m}{1 + m}$.

Eliminons m entre ces deux équations; nous avons d'abord $m = -\frac{y}{x}$, puis, en remplaçant m par cette valeur dans la première, nous avons

$$x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y = 0.$$

Le lieu cherché est encore le cercle des neuf points.

4. *Foyer singulier.* — Le foyer singulier de la cubique est le point de rencontre des tangentes aux points cycliques, ou des asymptotes qui ont pour pentes $\pm i$. La première a pour équation

$$y = ix - \frac{\varphi_{-1}(1, i)}{\varphi_{-1}(1, i)}.$$

Or nous avons

$$\varphi_{-1}(x, y) = (x^2 + y^2)(mx - y), \qquad \varphi_{-1}(1, u) = (1 + u^2)(m - u),$$

$$\varphi_{-1}(1, u) = 2u(m - u) - (1 + u^2), \qquad \varphi_{-1}(1, i) = 2i(m - i) = 2(1 + im),$$

puis $\varphi_{-1}(x, y) = -2m\alpha x^2 + 2\beta y^2$, $\varphi_{-1}(1, i) = -2m\alpha - 2\beta$.

On a donc pour équation $y = ix + \frac{m\alpha - \beta}{1 + im}$, ou $y = ix + \frac{(m\alpha - \beta)(1 - im)}{1 + m^2}$; l'asymptote de pente $-i$ a pour équation $y = -ix + \frac{(m\alpha - \beta)(1 + im)}{1 + m^2}$.

Le point de rencontre de ces deux droites a pour coordonnées $x = \frac{m(m\alpha + \beta)}{1 + m^2}$, $y = \frac{m\alpha - \beta}{1 + m^2}$,

et on voit immédiatement que le lieu de ce point est encore le cercle des neuf points

$$x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y = 0.$$

J. OTTENHEIMER, lycée de Nancy.

Bonnes solutions de MM. J. Dessirier ; J. Soubaigné.

Solution géométrique. — Par neuf points dont sept ne sont pas sur une conique ou quatre sur une droite passent ou bien une seule cubique ou bien une infinité ; dans ce dernier cas les neuf points forment la base d'un faisceau ponctuel de cubiques. Dans le cas du problème on peut faire passer par les sept points donnés et par les points cycliques, trois cubiques circulaires décomposées chacune en un des cercles qui ont pour diamètres l'un des côtés du triangle, et la hauteur qui passe par le sommet opposé ; donc les sept points donnés et les points cycliques forment la base d'un faisceau de cubiques circulaires.

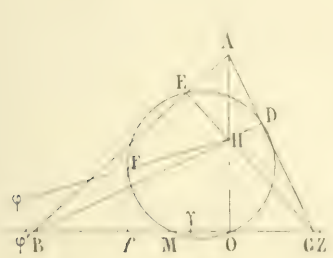
Le cercle de diamètre BC coupe l'une quelconque de ces cubiques aux points B, C, D, E et aux points cycliques I, J ; par conséquent les points où BE, CD et IJ rencontrent pour la troisième fois la courbe sont en ligne droite, de sorte que la tangente en A est parallèle à l'asymptote réelle de la courbe. Il en est de même des tangentes en B et C.

Les tangentes à la cubique aux points en ligne droite A, B, E coupent la courbe en trois points situés sur une ligne droite. Cette ligne droite se confond ici avec l'asymptote, et l'on voit que la tangente en E passe par le point où cette asymptote coupe la cubique. Il en est de même pour les tangentes en O et D. Nous pouvons donc dire dès maintenant que le lieu de leur point de concours est celui de l'intersection de la cubique et de son asymptote.

Si l'on se donne la tangente à l'une des cubiques du faisceau en l'un des points cycliques, I, la courbe est déterminée, donc sa tangente en l'autre point cyclique, J, l'est aussi. Ces deux tangentes engendrent alors, quand la cubique varie en passant par les neuf points A, B, C, E, O, D, H, I, J, deux faisceaux homographiques de sommets I et J, et leur intersection, qui est le foyer singulier, décrit un cercle.

En considérant les trois cubiques décomposées en un cercle tel que le cercle AEHD et la droite BOC (ou en un cercle tel que le cercle BEDC et la droite AHO), on voit que le lieu passe par les milieux de HA, HB, HC ou de BC, CA, AB) ; c'est par conséquent le cercle des neuf points du triangle.

Considérons la cubique qui a pour foyer singulier un certain point F de ce cercle et projetons ce point en f sur BC. Le centre des moyennes distances γ des points où la droite BOC coupe cette cubique est aussi celui des points où elle en rencontre les asymptotes. Soit M le milieu de BC ; le centre des moyennes distances est le point γ tel que $\overline{O\gamma} = 2\overline{\gamma M}$. Le point Z où l'asymptote coupe BC est donné par la relation $\overline{\gamma Z} = 2\overline{f\gamma}$ (1). Or, on sait que le cercle des neuf points et le cercle circonscrit sont homothétiques par rapport à l'orthocentre H du triangle, le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{2}$. L'homothétique du point F est donc un point φ du cercle circonscrit qui se projette sur BC en un point φ' tel que $\overline{O\varphi'} = 2\overline{Of}$ ou $\overline{\varphi O} = 2\overline{\varphi' O} = 2\overline{\varphi' f}$. On en déduit que



$$\overline{\varphi O} + \overline{O\gamma} + \overline{\gamma Z} = 2\overline{\varphi' f} + \overline{f\gamma} + \overline{\gamma M},$$

c'est-à-dire que $\overline{\varphi' Z} = 2\overline{\varphi' M}$.

Ainsi le point Z, où l'asymptote rencontre BC, est le symétrique par rapport à M (ou, comme on dit, l'isotomique) de la projection φ' du point φ. Les points où cette asymptote rencontrent AB, AC sont de même les isotomiques des projections de φ sur AB, AC, et l'asymptote est tout simplement la droite de Simson du point δ diamétralement opposé à φ sur le cercle circonscrit. Elle enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements tangente aux trois côtés du triangle ABC, à ses trois hauteurs et tritangente à son cercle des neuf points.

Reste à trouver le lieu de l'intersection des tangentes en E et O à la cubique. Par un raisonnement entièrement analogue à celui que nous avons fait pour les points cycliques, on voit que le lieu cherché est une conique qui passe par E et O ; elle passe de même par D. On en aura trois autres points en considérant les cubiques circulaires qui se réduisent à l'un des cercles tels que AEOC et à la hauteur correspondante BD. Les tangentes en E et O au cercle AEOC, respectivement perpendiculaires aux droites qui joignent E et O au milieu

(1) Voir p. 380 la solution géométrique de la question 1937.

de AC se coupent au milieu de BH, car les cercles BEHO, AEOC sont, comme on sait, orthogonaux. La conique passe donc par les milieux de HA, HB, HC ; le lieu est encore le cercle des neuf points du triangle ABC.

T. LEMOYNE.

MÉCANIQUE

1935 — *On considère, dans un plan vertical, l'horizontale Ox et la verticale ascendante Oy qui passent en un point O situé sur le plan horizontal qui figure le sol. Soit A un point situé sur Oy à la hauteur* $OA = g = 9^m,81$ *et OA' une droite du plan Oxy, qui fait l'angle* θ *avec Ox.*

1° *Un point pesant glisse avec frottement sur OA' ; le coefficient de frottement est f ; étudier les divers mouvements que peut prendre ce point.*

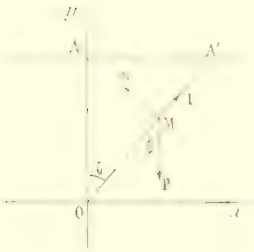
2° *On suppose que ce point M tombe sur OA', dans les mêmes conditions, sans vitesse initiale, en partant toujours d'un point A' situé à une hauteur égale à g. Trouver le lieu des positions qu'il occupe, sur toutes les droites A'O, au bout du temps t qu'il met à tomber sur Oy de A en O. Construire ce lieu et ne garder que l'arc qui convient au problème.*

3° *A partir de chacun des points M de ce lieu, on porte sur OA' un vecteur égal à l'accélération de ce point changée de signe : le lieu de leurs extrémités est une portion de ligne, L, que l'on demande de déterminer. Chaque élément de L a pour masse le produit de sa longueur par l'accélération correspondante. Déterminer le centre de gravité de L.*

1. Cette première question est traitée dans tous les cours de Mécanique.

2. Le point M, étant abandonné sans vitesse initiale au point A', ne peut se mettre en mouvement que si l'angle de OA' avec l'horizontale Ox est supérieur à l'angle de frottement φ ($\operatorname{tg}\varphi = f$), c'est-à-dire si l'on a $\frac{\pi}{2} - \theta > \varphi$, ou $\theta < \frac{\pi}{2} - \varphi$. C'est ce que nous supposerons.

Comme le point M descend, il est soumis à l'action de son poids P, de la réaction normale N et de la force de frottement T, dirigée vers le haut et toujours égale à Nf.



Posons $A'M = z$, et prenons comme sens positif des z le sens descendant A'O. En projetant les forces sur l'axe A'O, nous avons

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg\cos\theta - T,$$

puis, en projetant sur la perpendiculaire à A'O, $0 = N - mg\sin\theta$.

On en déduit $N = mg\sin\theta$ et $T = Nf = mgf\sin\theta$, et par suite

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg\cos\theta - mgf\sin\theta,$$

ou

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g(\cos\theta - f\sin\theta).$$

Intégrons deux fois de suite ; en remarquant que pour $t = 0$ $\frac{dz}{dt}$ et z sont nuls, nous obtenons

$$(1) \qquad z = \frac{1}{2}gt^2(\cos\theta - f\sin\theta).$$

Pour $\theta = 0$, cette formule devient $z = \frac{1}{2}gt^2$ et définit le mouvement du point tombant sur OA. Ce point arrive au point O au bout du temps défini par l'égalité $g = \frac{1}{2}gt^2$, ou $t = \sqrt{2}$.

Pour cette valeur de t, la formule (1) devient $z = g(\cos\theta - f\sin\theta)$; par suite le point M occupe la position donnée par la formule $A'M = g(\cos\theta - f\sin\theta)$, d'où l'on tire

$$OM = OA' - A'M = \frac{g}{\cos\theta} - g(\cos\theta - f\sin\theta).$$

Il en résulte que le lieu du point M a pour équation en coordonnées polaires (l'axe polaire étant Oy)

$$\rho = g\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta + f\sin\theta\right) = g\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} + f\sin\theta\right),$$

ou, en remplaçant f par $\operatorname{tg}\varphi$, $$\rho = \frac{g\sin\theta\sin(\theta+\varphi)}{\cos\theta\cos\varphi}.$$

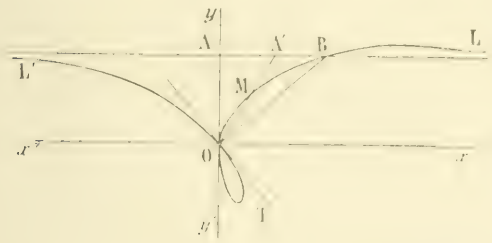
Si l'on change θ en $\theta+\pi$, ρ se change en $-\rho$; par suite, pour avoir toute la courbe, il suffit de faire varier θ de 0 à π.

ρ est infini pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et s'annule pour $\sin(\theta+\varphi) = 0$, $\theta+\varphi = \pi$, $\theta = \pi - \varphi$.

Le tableau suivant nous donne le signe et les valeurs remarquables de ρ.

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-\varphi$		π
ρ	0	+	$+\infty$ | $-\infty$	−	0	−	0

On en déduit aisément la forme de la courbe, qui admet un point double à l'origine et des branches infinies dans la direction $\theta = \frac{\pi}{2}$.



Pour avoir l'asymptote correspondante, cherchons la limite de

$$y' = \rho\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\rho\cos\theta = -g\frac{\sin\varphi\sin(\theta+\varphi)}{\cos\varphi}$$

pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

On a immédiatement $\lim. y' = -g$, ce qui montre que l'asymptote est la parallèle à Ox menée par le point A.

Pour obtenir la position de la courbe par rapport à cette asymptote, cherchons le signe de la différence

$$y' + g = g\left[1 - \frac{\sin\theta\sin(\theta+\varphi)}{\cos\varphi}\right] = g\frac{\cos\theta\cos(\theta+\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $y'+g$ est négatif, donc la courbe est située par rapport à l'asymptote du côté des y' négatifs ou des y positifs (branche BL); pour $\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, $y'+g$ est positif, la branche de courbe correspondante OL' est au-dessous de l'asymptote.

Remarquons enfin que le point B où la courbe rencontre son asymptote est défini par $\cos(\theta+\varphi) = 0$, $\theta+\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$. On en conclut que la droite OB est perpendiculaire à la tangente OI.

L'arc de cette courbe qui convient au problème est précisément l'arc OB relatif aux valeurs de θ comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

3. L'accélération au point M est dirigée dans le sens MO et a pour valeur $\frac{dv}{dt}$ ou $g(\cos\theta - f\sin\theta)$.

Par suite, si l'on porte ce vecteur à partir du point M dans le sens OM, son extrémité sera à une distance du point O égale à $OM + g(\cos\theta - f\sin\theta)$, ou, en remplaçant OM par sa valeur, $\frac{g}{\cos\theta} - g(\cos\theta - f\sin\theta) + g(\cos\theta - f\sin\theta)$, ou $\frac{g}{\cos\theta}$. On en conclut que cette extrémité est précisément le point A′ situé sur l'asymptote AB.

Donc, la portion de ligne L est le segment de droite AB.

Considérons un point A′ de cette droite $(\widehat{AOA'} = \theta,\ AA' = x,\ x = g\,\mathrm{tg}\,\theta)$, et envisageons un élément infiniment petit $A'A'_1 = dx$. La masse de cet élément est égale à $g(\cos\theta - f\sin\theta)dx$, et par suite, le centre de gravité G du segment AB est situé sur ce segment à une distance AG définie par l'égalité

$$AG \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\cos\theta - f\sin\theta)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\cos\theta - f\sin\theta)\,x\,dx.$$

Remplaçons x par $g\,\mathrm{tg}\,\theta$ et dx par $\frac{g}{\cos^2\theta}d\theta$: nous obtenons

$$AG \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\cos\theta - f\sin\theta)\frac{g}{\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\cos\theta - f\sin\theta)\,g\,\mathrm{tg}\,\theta\,\frac{g}{\cos^2\theta}d\theta,$$

ou

$$AG \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta - f\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta = g\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos\theta - f\sin\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta}{\cos^2\theta}d\theta.$$

Tout revient donc à calculer ces deux intégrales.

Nous avons d'abord

$$\int \frac{\cos\theta - f\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta = \int \frac{d\theta}{\cos^2\theta} - f\int \frac{d\cos\theta}{\cos^2\theta} = \mathrm{L}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) - \frac{f}{\cos\theta}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta - f\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta = \mathrm{L}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{f}{\sin\varphi} + f.$$

Or

$$\mathrm{L}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) = -\mathrm{L}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = -\mathrm{L}\sqrt{\frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}} = -\mathrm{L}\sqrt{1 + f^2 - 1}.$$

$$\sin\varphi = \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}} = \frac{f}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\varphi}};$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta - f\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta = \mathrm{L}\left(\sqrt{1 + f^2} - 1\right) - \sqrt{1 + f^2} + f.$$

D'autre part,

$$\int \frac{(\cos\theta - f\sin\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta}{\cos^2\theta}d\theta = \int \frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos^3\theta} - f\int \frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta.$$

Nous connaissons la première intégrale du second membre, qui est $-\int \frac{d\cos\theta}{\cos^2\theta}$ ou $\frac{1}{\cos\theta}$.

Pour calculer la deuxième, dérivons la quantité $\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$: nous avons

$$\frac{d}{d\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta\cdot\cos\theta - \sin\theta\cdot 2\cos\theta(-\sin\theta)}{\cos^4\theta} = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{2\sin^2\theta}{\cos^3\theta}.$$

Nous en tirons, en intégrant,

$$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = \int \frac{d\theta}{\cos\theta} + 2\int \frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta, \quad \text{ou} \quad \int \frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta = \frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta} - \frac{1}{2}\mathrm{L}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right).$$

et par suite

$$\int \frac{(\cos\theta - f\sin\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta}{\cos^2\theta}d\theta = +\frac{1}{\cos\theta} - \frac{f\sin\theta}{2\cos^2\theta} + \frac{f}{2}\mathrm{L}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right).$$

On en déduit aisément

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi} \frac{(\cos\theta - f\sin\theta)\operatorname{tg}\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = -\frac{1}{\sin\varphi} - \frac{f\cos\varphi}{2\sin^2\varphi} - \frac{f}{2}\operatorname{L}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right) - 1$$

$$= \frac{\sqrt{1+f^2}}{2f} - \frac{f}{2}\operatorname{L}\left(\sqrt{1+f^2}-1\right) - 1.$$

On a donc, en définitive,

$$\mathrm{AG}\cdot\left[f - \sqrt{1+f^2} - \operatorname{L}\left(\sqrt{1+f^2}-1\right)\right] = g\left[\frac{\sqrt{1+f^2}}{2f} - 1 - \frac{f}{2}\operatorname{L}\left(\sqrt{1+f^2}-1\right)\right],$$

et

$$\mathrm{AG} = g\,\frac{\dfrac{\sqrt{1+f^2}}{2f} - 1 - \dfrac{f}{2}\operatorname{L}\left(\sqrt{1+f^2}-1\right)}{f - \sqrt{1+f^2} - \operatorname{L}\left(\sqrt{1+f^2}-1\right)}.$$

G. LACH, à Rodez.

Bonnes solutions par MM. G. Deperrois ; Ch. Guillerme ; Marescalchi.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1911)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

8323. — Trouver l'équation générale des coniques qui ont un axe commun, un sommet commun sur cet axe et qui passent par un point fixe. Calculer l'aire comprise entre l'une de ces coniques et la parabole du faisceau.

8324. — Lieu des foyers des hyperboles équilatères ayant un centre donné et passant par un point fixe.

8325. — Démontrer que toute spirale logarithmique est sa propre polaire réciproque par rapport à une hyperbole équilatère qui a pour centre le point asymptote et qui est tangente à la spirale.

8326. — D'un point S de la développée d'une parabole on peut mener deux normales à la courbe ; trouver l'enveloppe de la droite qui joint leurs pieds.

8327. — Lieu des points tels que la distance de chacun d'eux à sa polaire par rapport à une parabole soit égale à une constante donnée a. Discuter la courbe suivant les différentes valeurs de a.

8328. — Lieu des projections du foyer d'une parabole sur les normales à la courbe.

8329. — On considère un cercle quelconque passant par les foyers d'une ellipse et rencontrant les tangentes aux sommets du grand axe en des points réels. Que peut-on dire des droites joignant ces points deux à deux ?

8330. — La normale en un point M d'une conique rencontre la courbe en un autre point I. On envisage aussi le centre de courbure C au point M, et le point de Fregier F correspondant. Quelle relation existe-t-il entre les quatre points M, I, C, F ?

8331. — Calculer le rapport anharmonique des extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse.

8332. — Condition pour que quatre points d'une conique aient un rapport anharmonique égal à -1.

8333. — Etudier la conique $y^2 = 2px + qx^2$. Dans le cas où cette équation représente une ellipse, reconnaître si Ox est le grand axe.

8334. — On donne un cercle et un point A à l'intérieur. Sur ce point on mène deux sécantes rectangulaires et on considère les paraboles qui passent par les points de rencontre de ces sécantes et du cercle. Equation générale. Enveloppe de ces paraboles quand la direction des sécantes varie. Lieu des points par où passent deux paraboles orthogonales en ces points.

8335. — Lieux des milieux des normales à une parabole.

8336. — Lieux des milieux des cordes d'une conique qui passent par un point fixe.

8337. — On donne une conique, un point O et une droite D. Par le point O on mène une sécante qui rencontre la conique en M et M' et la droite D au point A. On demande le lieu du conjugué harmonique de A par rapport à M et M'. Solutions analytique et géométrique. Cas où la droite D est à l'infini.

8338. — On donne une parabole et un point A. On joint le point A à un point M quelconque de la parabole, on mène la tangente au point M, et on prend le point P intersection de cette droite et de la perpendiculaire menée de A à AM. Lieu du point P. Cas particulier où le point A est au sommet ou au foyer.

8339. — D'un point M on mène des normales à une ellipse ; comment faut-il choisir ce point pour que le rapport anharmonique des quatre pieds soit égal à -1 ?

8340. — Déterminer trois points A, B, C d'une parabole tels que les bissectrices du triangle ABC soient normales à la parabole aux sommets du triangle.

8341. — On donne une conique et un point A sur cette conique. Peut-on projeter cette conique de façon à obtenir une parabole ayant pour sommet la projection du point A ?

8342. — Trouver les foyers de la conique $(ax+by)^2+(a'x+b'y)^2=1$, en supposant les axes de coordonnées rectangulaires et $ab'-ba'=0$.

8343. — On donne une ellipse rapportée à ses axes et un point M de cette courbe. On abaisse MP perpendiculaire sur Ox, MQ sur Oy : trouver l'enveloppe de PQ. La normale au point M à l'ellipse rencontre Ox en R et Oy en S ; soit N le quatrième sommet du rectangle construit sur OR et OS. Lieu du point N.

8344. — Équation de la polaire du point (ω_0, ρ_0) par rapport à la conique $\rho=\frac{p}{1+e\cos\omega}$.

8345. — Trouver l'équation générale des coniques coupant l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ orthogonalement aux quatre points de rencontre.

IV. — Géométrie analytique à trois dimensions.

8346. — Soient deux plans P et Q et une figure F tracée dans le plan P. On projette F sur Q parallèlement à deux directions Δ et Δ'. Montrer que si le plan parallèle à la fois à Δ et à Δ' est parallèle à l'intersection des plans P et Q, les deux figures projections sont équivalentes. Le montrer géométriquement et analytiquement.

8347. — Calculer l'angle dièdre d'un octaèdre régulier.

8348. — On donne un cercle de centre O et un point S situé sur la perpendiculaire en O au plan du cercle. On considère deux points infiniment voisins sur le cercle, M et M', $(\widehat{MOM'}=\alpha)$, et on demande la partie principale de l'angle de la tangente au cercle en M avec le plan tangent suivant la génératrice SM' au cône qui a pour sommet le point S et pour base le cercle. On prendra α comme infiniment petit principal.

8349. — Calculer le volume d'un tétraèdre SABC sachant que [illegible] $SA=SB=SC=1$ [illegible] $\widehat{BSC}=\alpha$, $\widehat{CSA}=\beta$, $\widehat{ASB}=\gamma$.

8350. — Calculer l'ordre infinitésimal de la distance d'un point M d'une courbe à un plan passant par la tangente au point infiniment voisin.

8351. — Plan osculateur à la courbe [illegible]

8352. — On considère le cercle (C) qui a pour équation [illegible] R^2, $y=0$, et le tore engendré par le cercle tournant autour de Oz. Étudier l'intersection de ce tore et du cylindre qui a le cercle (C) comme section droite. Projection de cette intersection sur les plans de coordonnées. Faire l'épure.

8353. — Les coordonnées de tout point d'une quadrique sont des fonctions rationnelles de deux paramètres.

8354. — Former l'équation du cône ayant pour sommet l'origine et pour directrice une hélice circulaire tracée sur un cylindre de révolution ayant pour axe Oz.

8355. — Soit une surface $z=f(x, y)$ tangente en O au plan des xy. On mène la normale en un point M voisin du point O ; trouver la limite de la perpendiculaire commune à cette normale et à Oz quand le point M se rapproche indéfiniment du point O.

8356. — Trouver l'enveloppe des plans tangents au paraboloïde $yz=ax$ qui font 45° avec le plan des xy.

8357. — Trouver les lignes de plus grande pente de la surface $xyz=a^3$ par rapport au plan horizontal.

8358. — Étudier la ligne représentée par les équations [illegible] $y=\frac{bt^2+c_1t+b_2}{at^2+d_1t+d_2}$, $z=\frac{ct^2+c_1t+c_2}{at^2+d_1t+d_2}$.

8359. — Enveloppe des droites du plan des xy qui sont situées à une distance donnée de la droite $y=0$, $z=mx$.

8360. — On considère la droite $x=az+p$, $y=bz+q$, où a, b, p, q sont fonctions d'un paramètre u. Cette droite engendre une surface réglée. Plan tangent en un point ; plan asymptote, plan central, loi de Chasles.

8361. — On considère un cône ayant pour base la parabole $y^2-2px=0$, $z=0$ et pour sommet un point S de Oz. Former l'équation du cône. Calculer l'aire latérale de ce cône, limitée à deux génératrices SA et SB symétriques par rapport au plan des zx.

8362. — Plan tangent à la surface [illegible] $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$ [illegible]

8363. — Trouver les courbes telles que le plan osculateur en un point quelconque M coupe l'axe des z en un point P qui ait même cote que le point M.

8364. — Plan osculateur et rayon de courbure de la courbe $x=\frac{z}{\cos\omega}$, $y=\frac{z}{\sin\omega}$.

8365. — Lieu des centres de courbure aux divers points d'une hélice circulaire.

8366. — Qu'arrive-t-il quand on fait la perspective d'une courbe gauche, le point de vue étant dans le plan osculateur en l'un des points de la courbe ?

8367. — Étant donné le conoïde $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$, étudier la variation du plan tangent quand le point de contact décrit la génératrice $\frac{y}{x}=m$, $z=f(m)$. Plan central ; plan asymptote.

8368. — On donne un point O et un plan P. On considère une droite quelconque D dans le plan P; on abaisse OM perpendiculaire sur cette droite, et par le point O on mène une perpendiculaire au plan OMD sur laquelle on prend OQ = OM. Lieu du point Q quand la droite D se déplace dans le plan P.

8369. — On considère la courbe définie par les équations $x = \frac{1}{z} - \frac{2}{z-1} - \frac{3}{z-4}$, $y = \frac{6}{z} + \frac{8}{z-1} + \frac{4}{z-4}$. Montrer que la projection de la courbe sur le plan des xy a un point double et déterminer ce point.

8370. — On considère la surface définie par les équations $x = \frac{\theta}{u^2+v^2}$, $y = \frac{v}{u^2+v^2}$, $z = \frac{1}{u^2+v^2}$. Quel est le degré de cette surface ? Etudier la section par le plan $2x - 2y + 2z - 1 = 0$ et le rayon de courbure en un point de cette section.

8371. — Sur une demi-droite passant par l'origine O de trois axes rectangulaires, on prend trois points A, B, C, tels que $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, a, b, c étant des constantes. Par les points A, B, C on mène des plans respectivement perpendiculaires à Ox, Oy, Oz. Trouver le lieu du point de rencontre M de ces trois plans. Construire le plan tangent à ce lieu au point M.

8372. — Etudier la surface $x = a \sin v \operatorname{ch} u$, $y = a \sin v \operatorname{sh} u$, $z = a \cos v$.

8373. — Calculer l'angle des deux droites définies par les équations $x - y + z = 0$, $\frac{yz}{b-c} + \frac{zx}{c-a} + \frac{xy}{a-b} = 0$.

8374. — Etant donnée la courbe $y = x^2$, $z = x^3$, on demande de lui mener des normales par un point de la courbe. Il y a quatre solutions. Equation de la sphère passant par les quatre pieds.

8375. — Etudier la courbe gauche $y = \frac{x^2}{2a}$, $z = \frac{x^3}{6a^2}$. Tangente; plan osculateur. Longueur d'un arc. Cercle de courbure.

8376. — Etudier la courbe $x = a \operatorname{ch} \frac{z}{a}$, $y = b \operatorname{sh} \frac{z}{a}$. Plan osculateur ; normale principale.

8377. — Trouver sur la surface $z = a \frac{x - y^2}{x^2 + y^2}$ les courbes telles qu'en chaque point le plan osculateur soit tangent à la surface.

8378. — Même question pour la surface définie par les équations paramétriques

$$x = \cos u - v \sin u, \qquad y = \sin u + v \cos u, \qquad z = v.$$

8379. — Etudier la surface $x = (a + z)\cos t$, $y = (a - z)\sin t$.

8380. — Etant donnée la surface définie par les équations $x = \frac{uv}{u+v}$, $y = \frac{u-v}{u}$, $z = \frac{v}{u+v}$, trouver les équations de la courbe de contact du cylindre circonscrit parallèlement à une direction donnée.

8381. — Equation différentielle des lignes d'égale pente d'un cône de révolution à axe vertical.

8382. — Etant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires, on prend sur ces axes des longueurs égales OA, OB, OC, et on demande le lieu des points tels que les projections de ces points sur les faces du tétraèdre OABC soient dans un même plan.

8383. — On donne un cercle et une droite perpendiculaire à son plan en l'un de ses points. Trouver la surface engendrée par un segment égal au diamètre du cercle et dont les extrémités s'appuient sur la droite et le cercle.

8384. — On donne trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et un cercle dans le plan des xy, rencontrant Ox au point O et en un autre point A. Par le point A on mène une droite Δ parallèle au plan yOz. Trouver l'équation de la surface engendrée par une droite variable assujettie à rencontrer Oz, Δ et le cercle.

8385. — Lieu des centres des sphères qui passent par deux points fixes et qui sont tangentes à une droite fixe.

8386. — On considère la surface engendrée par un cercle variable

$$ux + vy + wz + r = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 + 2dx + 2ey + 2fz + g = 0,$$

où u, v, w, r, d, e, f, g sont fonctions d'un paramètre. Plan tangent en un point. Démontrer que toute sphère passant par l'un des cercles de la surface est tangente à la surface en deux points.

8387. — Trouver l'équation de la surface engendrée par l'axe des z tournant autour de la droite

$$\frac{x - y}{x} = \frac{y - y}{z} = \frac{z - z}{\ldots}.$$

8388. — On donne trois axes de coordonnées rectangulaires et un point A sur Ox, ayant pour abscisse a. Par ce point on mène AB parallèle à Oz, AC parallèle à Oy, et on prend AB = A = AC = b. Former l'équation de l'ellipsoïde engendré par l'ellipse qui a pour axes AB et AC et qui tourne autour de AB. Trouver le lieu des droites rencontrant Oz, parallèles au plan xOy et tangentes à l'ellipsoïde.

8389. — On considère sur une sphère un cercle variable qui se déplace en restant tangent à deux cercles donnés de la sphère. Trouver le lieu du pôle du plan du cercle variable par rapport à la sphère.

8390. — Trouver les droites tracées sur la surface $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 0$.

8391. — On donne un cercle et une droite perpendiculaire au plan du cercle et rencontrant le cercle au point O. Une droite AB de grandeur constante se déplace de façon que l'un de ses points s'déplace le cercle et le point B la droite. On demande le lieu d'un point de la droite AB.

8392. — Combien de paramètres faut-il pour déterminer un cube ? Construire un cube connaissant le centre, l'arête, la longueur de l'arête, un point de l'arête AB et une droite rencontrant l'arête AC.

8393. — On considère la courbe gauche $x = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$, $y = \frac{t^2}{12} - \frac{t^3}{4}$. Par l'origine on mène des parallèles aux tangentes et on prend les points de rencontre avec une sphère ayant pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Lieu de ces points de rencontre.

8394. — On considère la surface définie par les équations paramétriques $x = u\cos\frac{v}{2}$, $y = u\sin\frac{v}{2}$, $z = k\sin v$. Mener par un point P (α, β, γ) des normales à cette surface. Nombre de solutions.

8395. — Mener par un point $P(\alpha, \beta, \gamma)$ une droite rencontrant en deux points la courbe $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{1}{t-1}$, $z = \frac{1}{t-1}$. Nombre de solutions.

8396. — Equation du cône ayant pour sommet le point $S(a, b, c)$ et pour directrice la parabole $y^2 - 2px = 0$, $z = 0$. Enveloppe des plans qui coupent ce cône suivant deux génératrices rectangulaires.

8397. — Mener par un point de l'espace des plans osculateurs à la courbe $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

8398. — Quelle est la nature de la surface définie par les équations paramétriques

$$x = a\frac{u-v}{u+v}, \qquad y = b\frac{uv-1}{u+v}, \qquad z = c\frac{uv-1}{u-v}.$$

Normale en un point.

8399. — Trouver les courbes de la surface $y^2 + 2xz^2 - z^4 = 0$ qui coupent à angle droit les sections de la surface par des plans parallèles au plan des xy.

8400. — On donne une sphère et un point A. Par le point A on mène un plan quelconque (P) qui coupe la sphère suivant un cercle (C) ayant pour centre O. La droite AO coupe le cercle en deux points M et N. Par le point A on mène une perpendiculaire au plan P et sur cette droite on porte des longueurs $AM' = AM$, $AN' = AN$. Lieu des points M' et N'.

8401. — Discuter l'existence des plans osculateurs au point double de l'intersection de deux quadriques tangentes.

8402. — Etudier les quadriques

$$xy - z^2 + 2z - x^2 + 2x - y = 0, \qquad x^2 + y^2 = 1 \quad (\text{sections circulaires}),$$
$$(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y) + 2x - 6y = 0, \qquad x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2x - y - z = 0,$$
$$x^2 - y^2 + 2yz - 2zx + 2x - z + 1 = 0, \qquad x^2 - y^2 + 2xy - 2x - 2y - 1 = 0, \qquad xy + 2yz - 2zx - 2x - 2y = 0,$$
$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 10yz + 6y = 0, \qquad x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zx + 2x + 2y + 2z = 1.$$

8403. — Former les équations réduites des quadriques

$$x^2 + 2yz - 4x + 1 = 0, \qquad x^2 + 2xy - 4yz - 1 = 0, \qquad 4x^2 - 4y^2 - 4z^2 - 4x + 2y + 2z = 0.$$

8404. — Lieu des points d'où l'on peut mener deux plans tangents rectangulaires à un cône du deuxième degré.

8405. — Plans cycliques des surfaces $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$.

8406. — Les coordonnées d'un point d'une sphère sont fonctions rationnelles de deux paramètres.

8407. — Lieu des milieux des cordes d'une quadrique qui passent par un point fixe.

8408. — Lieu des centres des sections planes d'une quadrique dont les plans passent par un point fixe.

8409. — On donne une quadrique, un point O et un plan P. Par le point O on mène une droite variable qui rencontre la quadrique aux points M et M' et le plan P au point N. On prend la conjugué harmonique H du point N par rapport aux points M et M'. Lieu du point H. Remarques géométriques.

8410. — Condition pour que les trois cônes

$$x^2 + y^2 - z^2 - x = 0, \qquad x^2 + y^2 - z^2 - y = 0, \qquad x^2 + y^2 - z^2 - z = 0$$

aient au moins une génératrice commune. Cette condition étant trouvée, combien les cônes ont-ils de génératrices communes ?

8411. — On considère un paraboloïde elliptique $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0$ et un plan $ux + vy + wz + r = 0$. Quelle relation doit-il exister entre u, v, w, r pour que les normales à la surface aux points de la section par le plan rencontrent une même droite ?

8412. — On donne un ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ et un point A. Calculer la projection B du point A sur son plan polaire. Inversement, étant donné le point B, montrer qu'il existe trois points A correspondants ; ces points sont réels et les droites qui les joignent au point B forment un trièdre trirectangle.

8413. — Lieu des points d'où l'on peut mener trois plans tangents deux à deux rectangulaires au paraboloïde $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0$.

8414. — Etant données deux droites D et Δ, par la droite D on mène un plan quelconque et par Δ un plan perpendiculaire. Lieu de l'intersection de ces deux plans. Section circulaire de ce lieu. Solution géométrique.

8415. — Lieu des points qui sont situés à une distance donnée de leur plan polaire par rapport à une quadrique.

8416. — Trouver les axes d'une section centrale d'un ellipsoïde.

8417. — Trouver l'ordre infinitésimal de la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines d'un hyperboloïde à une nappe.

8418. — Etudier les projections de l'intersection de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et du cylindre $x^2 + y^2 = Rx$. Faire l'épure.

8419. — Trouver les génératrices rectilignes de la surface $xyz = lxy + mxz + nyz + pl + q$.

8420. — On donne trois axes de coordonnées rectangulaires, un point P et une droite D. On considère toutes les quadriques ayant pour axes les axes de coordonnées et passant par le point P, et on leur mène des plans tangents par la droite D. Lieu des points de contact. Examiner les cas particuliers où la droite D est parallèle ou perpendiculaire à l'un des plans coordonnés.

8421. — On donne un hyperboloïde de révolution à une nappe ayant pour axe Oz. Trouver les courbes qui coupent les génératrices sous un angle droit. Construire les projections de ces courbes sur le plan des xy.

8422. — Equation générale des paraboloïdes passant par une parabole et deux points symétriques par rapport au plan de cette parabole. Lieu des sommets. Séparer sur le lieu trouvé les sommets de paraboloïdes elliptiques et hyperboliques.

8423. — Lieu des projections d'un point sur les génératrices d'un paraboloïde hyperbolique équilatère.

8424. — On considère quatre génératrices de même système d'une quadrique réglée. Démontrer que les points qu'elles déterminent sur toute génératrice de l'autre système ont un rapport anharmonique constant.

8425. — Lieu des droites qui rencontrent deux droites fixes non situées dans le même plan en faisant avec elles des angles égaux.

8426. — On considère un tore ayant pour axe Oz et pour centre le point O ; on fait passer un cylindre par les deux cercles méridiens situés respectivement dans les plans des zx et des yz. Trouver l'intersection du tore et du cylindre. Faire l'épure.

8427. — Etudier l'intersection des deux surfaces $x^2 + y^2 = R^2$, $x^2y = z$; calculer l'aire latérale du cylindre limitée au plan des xy et à l'intersection.

8428. — Deux quadriques qui ont en commun une première courbe plane en ont une seconde.

8429. — Le lieu des points de l'espace équidistants d'un point fixe et d'une droite fixe est une quadrique. Discuter cette surface.

V. — Géométrie descriptive.

8430. — Projections d'un cube ayant une diagonale verticale.

8431. — Projections d'un cube ayant pour diagonale un segment quelconque défini par ses projections.

8432. — Construire la perpendiculaire commune à une droite quelconque et à la ligne de terre. Peut-on éviter le changement de plans ?

8433. — On donne les projections de deux droites ; peut-on les faire tourner autour d'un axe de façon qu'après la rotation les projections verticales soient parallèles ?

8434. — Couper un angle polyèdre à quatre faces par un plan de façon que la section soit un parallélogramme.

8435. — On donne un quadrilatère convexe ABCD dans le plan horizontal. Peut-on choisir un centre de projection tel que ce quadrilatère soit la perspective d'un parallélogramme, d'un rectangle, d'un carré ?

8436. — Construire le sommet d'un trièdre trirectangle dont les arêtes passent par trois points donnés. Discussion

8437. — Couper un trièdre trirectangle par un plan de façon que la section soit un triangle égal à un triangle donné.

8438. — On donne un cylindre de révolution dont l'axe est vertical. Construire la projection verticale d'une hélice tracée sur ce cylindre. On considère l'un des points de la courbe où la tangente est de front. Projeter l'hélice sur un plan de bout perpendiculaire à cette tangente.

8439. — On donne en géométrie cotée deux points $a(0)$ et $b(2)$, extrémités d'une arête d'un cube, et la pente de l'une des faces passant par cette arête. Construire le cube.

8440. — Déterminer les éléments d'un tétraèdre défini par les projections de ses sommets.

8441. — Construire les projections d'un octaèdre régulier dont une face est horizontale

8442. — Etant données les projections de trois vecteurs, construire les projections de l'axe central.

8443. — Relier une plate-forme rectangulaire et horizontale à un terrain en pente au moyen de rambles et de talus de pente donnée.

8444. — On donne un axe vertical et trois points O, A, B. On demande de faire tourner le segment AB autour de l'axe d'un angle tel que dans la nouvelle position A'B' ce segment soit vu du point O sous un angle droit.

8445. — Réduction d'un angle à l'horizon.

8446. — Construire les projections du moment d'un vecteur par rapport à un point.

8447. — Construire les projections d'un tétraèdre régulier dont une arête est horizontale et le plan de symétrie passant par cette arête vertical.

8448. — On donne un cône dont la base est un cercle horizontal. Déterminer la trace horizontale du cône supplémentaire. Contours apparents de ce cône.

8449. — On donne trois points par leurs projections et on fait passer un cercle par ces points. Au centre O de ce cercle on élève une perpendiculaire à son plan sur laquelle on prend de part et d'autre du point O deux points S et S_1 à la même distance donnée du point O. Représenter l'ensemble des deux cones ayant pour base le cercle et pour sommets les points S et S_1.

8450. — On donne un cône de révolution d'axe vertical, limité à un sommet O et à un parallèle $O'O'O''$ au-dessus du sommet. Ombres propre et portées sur les plans de projection.

8451. — On donne un cône dont la base est un cercle horizontal, et on considère le cône supplémentaire qui a pour sommet un point de la ligne de terre. Trouver l'intersection de ce cône et d'une droite quelconque.

8452. — Normales communes à un cône de révolution à axe vertical et à un cylindre de révolution dont l'axe est parallèle à la ligne de terre.

8453. — Normales communes à un cône ayant comme base un cercle horizontal et à une droite quelconque.

8454. — Construire les contours apparents d'un cône ayant pour sommet un point donné (s, s') et comme base un cercle ayant pour centre (o, o') et tangent à la ligne de terre.

8455. — Section plane d'un cône dont la directrice est une parabole horizontale. Discussion. Trouver un plan coupant le cône suivant une hyperbole équilatère.

8456. — Trouver le centre de la section d'un cône à base circulaire horizontale et d'un plan quelconque.

8457. — Trouver la trace verticale d'un cône dont la base est un cercle dans le plan horizontal.

8458. — On donne un plan P défini par son échelle de pente et dans ce plan une ellipse qui se projette horizontalement suivant un cercle donné. Cette ellipse est la base d'un cylindre dont on donne la direction des génératrices. Trouver la section de ce cylindre par un plan Q défini par une échelle de pente.

8459. — On donne un cône ayant pour base un cercle horizontal. Intersection de ce cône et d'un plan défini par une échelle de pente.

8460. — On donne un cône ayant pour base un cercle horizontal. Couper ce cône par un plan de façon que la section soit une parabole. Déterminer le sommet de cette parabole et les sommets de ses projections.

8461. — On donne un cône ayant pour base un cercle horizontal. Étudier la section du cône supplémentaire par un plan donné. Cas de la section hyperbolique : asymptotes. Cas de la section parabolique : sommet.

8462. — On donne un cylindre dont la base est un cercle dans le plan horizontal. On coupe ce cylindre par un plan quelconque, et on prend la section comme base d'un cône de sommet donné. Construire les contours apparents du cône.

8463. — Intersection d'un cône et d'un cylindre qui ont comme base commune un cercle situé dans un plan défini par une échelle de pente, ce cercle étant défini par son centre et son rayon.

8464. — On donne deux cercles tangents intérieurement dans le plan horizontal, la tangente commune étant la ligne de terre. Le plus grand est la base d'un cône dont le sommet est dans le plan vertical ; le plus petit est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la droite qui joint le sommet du cône au point de contact des deux cercles. Intersection des deux surfaces.

8465. — Intersection de deux cônes de révolution tangents au plan horizontal le long de deux génératrices dont l'une est de front et l'autre de profil.

8466. — On donne deux cercles situés dans des plans horizontaux différents et ayant même projection horizontale. L'un est la base d'un cylindre, l'autre celle d'un cône dont le sommet est sur une génératrice de contour apparent vertical du cylindre. Intersection des deux surfaces.

8467. — On donne une hyperbole dans le plan horizontal. Chaque branche de la courbe est la directrice d'un cylindre dont les génératrices ont des directions données. Déterminer l'intersection des deux cylindres : un point, la tangente, les asymptotes.

8468. — Intersection d'un cône et d'un cylindre ayant une génératrice commune et pour bases deux cercles du plan horizontal.

8469. — Intersection de deux cônes ayant comme base commune une conique située dans le deuxième bissecteur.

8470. — Trouver la droite conjuguée de la ligne de terre par rapport à une sphère définie par ses projections.

8471. — On donne une sphère et une droite en géométrie cotée. Construire la droite conjuguée par rapport à la sphère.

8472. — On donne une sphère et une droite (D, D'). Mener par cette droite un plan coupant la sphère suivant un cercle de rayon donné.

8473. — Construire une sphère passant par quatre points définis par leurs projections cotées.

8474. — Construire une sphère passant par un point, tangente à un plan et tangente à une droite en un point donné.

8475. — On donne une sphère par ses contours apparents, et un plan quelconque. Mener par un point a du plan horizontal des tangentes à la projection horizontale de l'intersection.

8476. — Construire une sphère de rayon donné, tangente aux plans de projection et à un plan défini par ses traces.

8477. — Construire une sphère tangente aux plans de projection et passant par deux points.

8478. — Construire une sphère passant par trois points donnés dans le plan horizontal et tangente à un plan défini par son échelle de pente.

8479. — Points communs à trois sphères.

8480. — Plans tangents communs à trois sphères.

8481. — Etudier la surface de révolution engendrée par une ellipse tournant autour d'un axe vertical, la projection horizontale de l'ellipse ayant pour foyer la projection horizontale de l'axe.

8482. — Etudier la surface de révolution engendrée par une conique tournant autour d'un axe vertical. Conditions pour que la surface soit du deuxième degré. Peut-on déterminer *a priori* la nature de cette surface ?

8483. — Contour apparent horizontal d'un tore à axe de front. Etude analytique.

8484. — Points doubles de la méridienne d'une surface de révolution. Cas où la surface est engendrée par une conique tournant autour d'un axe vertical.

8485. — Construire la méridienne d'une surface de révolution engendrée par une ellipse située dans un plan de bout et tournant autour d'un axe de front.

8486. — Section d'un tore par un plan bitangent.

8487. — On donne un segment de droite AB par ses projections: c'est le grand axe d'une ellipse dont le petit axe est égal à la moitié de AB. Cette ellipse en tournant autour de AB engendre un ellipsoïde de révolution. Construire les contours apparents de cette surface. Cône circonscrit. Déterminer un point de la courbe de contact.

8488. — Construire un cylindre de révolution connaissant le rayon et le centre d'une section droite située dans un plan défini par son échelle de pente et la hauteur.

8489. — On donne un cylindre de révolution défini par les projections de son axe et par son rayon. 1° Connaissant la projection d'un point, construire l'autre projection et le plan tangent. 2° Construire un point quelconque de la section par un plan quelconque. 3° Mener au cylindre un plan tangent par un point. 4° Plan tangent parallèle à une droite.

8490. — Par un point mener une droite faisant des angles donnés avec les plans de projections.

8491. — On coupe un cône de révolution à axe vertical par un plan quelconque ; trouver les éléments de la section. Mener à la section une tangente parallèle à une direction donnée.

8492. — Plans tangents communs à deux cônes de révolution de même sommet.

8493. — Construire une droite passant par un point donné et qui soit à des distances données : 1° de deux points donnés ; 2° de deux droites données ; 3° d'un point et d'une droite donnés.

8494. — On donne un cône de révolution et une droite. Construire un cylindre de révolution ayant pour axe la droite donnée et tangent au cône.

8495. — Mener par un point un plan coupant trois droites données suivant des angles égaux.

8496. — Construire les contours apparents d'une surface gauche de révolution engendrée par une droite quelconque B, tournant autour d'une droite quelconque A. Cas où A est de front.

8497. — Etant donnée une surface gauche de révolution définie par son axe vertical et une génératrice, construire une génératrice de la surface faisant un angle donné avec la ligne de terre.

8498. — Une droite de front tourne autour d'une droite de profil et engendre une surface gauche. Construire un point de la surface, le plan tangent en ce point et les contours apparents.

8499. — Mener par la ligne de terre des plans tangents à une surface gauche à axe vertical.

8500. — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical et d'un plan passant par la ligne de terre.

8501. — On considère la surface engendrée par la droite B tournant autour de l'axe A. Trouver la seconde génératrice de la surface qui passe par un point M de la droite B.

8502. — Construire le pôle d'un plan donné par rapport à un hyperboloïde de révolution à une nappe dont l'axe est vertical.

8503. — On donne un paraboloïde hyperbolique défini par deux génératrices quelconques et un plan directeur horizontal. 1° Construire deux génératrices rectangulaires. 2° Déterminer le sommet et les plans principaux. 3° Sections planes ; discussion. 4° Intersection avec une droite verticale, avec une droite quelconque.

8504. — On donne quatre droites dont les projections sont parallèles (géométrie cotée). Construire les droites qui s'appuient sur ces quatre droites.

8505. — On donne un paraboloïde hyperbolique ayant un plan directeur horizontal et défini par deux frontales. Construire point par point le lieu des points de contact des plans tangents qui font un angle de 30° avec le plan horizontal. Solution analytique.

8506. — Intersection d'une droite et d'un paraboloïde défini par un plan directeur horizontal et deux droites de profil.

8507. — On donne un paraboloïde hyperbolique admettant un plan directeur horizontal et deux génératrices de profil. Un rayon lumineux horizontal tombe sur la surface et se réfléchit. Construire le rayon réfléchi.

8508. — Une surface gauche de révolution à axe vertical a une génératrice commune avec un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal. Trouver les points de la génératrice commune où les plans tangents sont les mêmes aux deux surfaces.

8509. — On considère un paraboloïde hyperbolique défini par une verticale, une frontale et un plan directeur horizontal. Mener à cette surface un plan tangent par un point quelconque. Sommet. Axe. Intersection avec une droite quelconque.

8510. — On considère un paraboloïde défini par un quadrilatère gauche. Construire un point et le plan tangent.

(A suivre.)

CONCOURS DE 1911 (*Suite*).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

Mathématiques.

1988. — On considère la courbe (C), $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

1° Construire cette courbe ;

2° Trouver l'équation du faisceau des droites issues de l'origine et passant par les points d'intersection de la courbe (C) et d'une droite : $y = ax + b$;

3° Discuter l'equation donnant les coefficients angulaires des droites de ce faisceau ;

4° On considère la surface $y = x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}$ qui est coupée par le plan des xy suivant la courbe (C).

Transporter les axes parallèlement à eux-mêmes de manière à prendre comme nouvelle origine le point A ayant pour coordonnées dans le premier système d'axes : $x = 1$, $y = e$, $z = 0$, puis trouver le plan tangent, l'indicatrice de la surface et les rayons de courbure principaux en ce point A.

Mécanique.

I. — Un point parcourt une circonférence dans des conditions telles que son accélération totale soit dans un rapport constant avec le carré de sa vitesse. Calculer, en fonction du temps, la vitesse et l'espace parcouru. Déterminer l'hodographe.

II. — **1989.** On considère une poulie mobile de poids 2P, soutenue par un fil dont l'extrémité A est fixe, tandis que l'autre extrémité B est libre et tirée par une force F ayant la direction du fil. A chaque point B du plan correspond ainsi une force F. Montrer qu'il existe une fonction des forces F ; calculer cette fonction et déterminer les lignes de niveau.

III. — **1990.** Une tige homogène pesante OA est mobile autour d'un point fixe O. Une autre tige AB, également homogène et pesante est articulée en A à l'extrémité de la première. Son extrémité B est mobile, sans frottement, sur une droite horizontale passant par le point O. En B est appliquée une force horizontale F située dans le plan OAB.

Connaissant les poids des deux tiges, on demande quelle relation existe entre la grandeur de la force F et l'inclinaison de la tige OA.

Chercher, en particulier, pour quelle valeur de F la tige OA prend une inclinaison de 45°.

Les deux tiges sont supposées inégales. On admet que l'articulation existant en A équivaut à deux forces, égales et contraires, appliquées l'une à la tige OA, l'autre à la tige AB.

Géométrie.

1° L'équation $y^2 = x^3 - x$ représente une courbe qui passe par le point M, de coordonnées $x = 1$, $y = 0$.

1° Calculer l'origine du point A dont l'ordonnée est [illegible]

2° Calculer, en grades et fractions de grades, l'angle des tangentes en M et N avec l'axe des x.

3° Calculer l'aire AMNB comprise entre la courbe, l'axe des x et les ordonnées AM, BN.

4° Calculer les coordonnées du point d'intersection des tangentes en M et N.

Chimie.

I. — On considère dans le diagramme pression-volume l'isotherme de 100° (courbe d'Andrews) relative à une masse d'eau de 2^{kg}. Indiquer l'allure de la courbe et donner les valeurs numériques des coordonnées des points singuliers. On admettra que la densité de la vapeur d'eau est constante et égale à $\frac{9}{8}$, et que la dilatation et la compressibilité de l'eau sont négligeables.

II. — **1991.** On mesure l'indice d'un verre par la méthode du goniomètre. Quel est l'indice du verre pour une radiation donnée si, l'angle A du prisme étant de 20°, la déviation D observée (minimum de déviation) est de 12° ?

III. — **1992.** 1° Définir ce que l'on entend par moment magnétique d'un barreau et indiquer comment on peut le déterminer par oscillation dans le champ terrestre supposé connu.

2° On considère deux barreaux d'acier identiques A et A′ qui ont été aimantés différemment. En les faisant osciller dans le champ terrestre autour d'axes verticaux, on constate que le barreau A fait trois oscillations complètes en dix secondes alors que A′ n'en fait que deux. On demande :

a) Le rapport des moments magnétiques des deux barreaux ;

b) La position d'équilibre par rapport au méridien magnétique que prend l'équipage obtenu en fixant en croix les deux barreaux. L'équipage est supposé mobile autour d'un axe vertical ;

c) La durée d'oscillation complète, sous l'action du champ terrestre, de l'équipage obtenu en fixant l'un contre l'autre les deux barreaux, les pôles de noms contraires en regard. L'équipage est supposé mobile autour d'un axe vertical.

Nota. — L'approximation demandée dans les divers calculs est celle que donne la règle à calculs ordinaire de 26^{cm} de longueur.

Chimie.

I. Composition de l'eau : 1° Exposer brièvement les méthodes analytiques et synthétiques qui ont été utilisées pour établir la composition de l'eau. On discutera et on comparera le degré de précision de ces diverses méthodes.

2° On indiquera comment on peut déduire des résultats obtenus le poids atomique de l'hydrogène.

II. — **1993.** 1° Dans une bombe calorimétrique dont la température initiale est 0° et dans laquelle on a préalablement fait le vide, on introduit du méthane jusqu'à ce que la pression atteigne la valeur de 1 atmosphère ; puis on ajoute de l'oxygène de manière à porter la pression à 5 atmosphères. On fait exploser le mélange et on constate que la chaleur dégagée par la réaction est de 5690 calories-gramme.

2° Dans une deuxième opération, on introduit dans la bombe de l'hydrogène jusqu'à ce que la pression atteigne 2 atmosphères et on ajoute de l'oxygène de manière à porter la pression à 5 atmosphères. Après explosion, on trouve, pour la chaleur dégagée, le chiffre de 3650 calories-gramme.

3° Dans une troisième opération, on introduit dans la bombe 1 gramme de charbon de sucre et on ajoute de l'oxygène jusqu'à ce que le manomètre indique une pression de 25 atmosphères. Après inflammation, on constate que la quantité de chaleur dégagée par la combustion est de 3110 calories-gramme.

On demande de déduire des résultats qui précèdent la chaleur de formation du méthane à partir de ses éléments. On précisera les conditions expérimentales auxquelles se rapporte le chiffre obtenu.

III. — **1994.** On sait que le peroxyde d'azote présente, entre les températures de 20° et 140°, une variation rapide de la couleur et des diverses propriétés physiques. Ce phénomène correspond à la transformation réversible de Az^2O^4 en AzO^2.

On a mesuré à la pression atmosphérique le volume occupé par $18^g,4$ de peroxyde d'azote. On a trouvé :

A la température $t_1 = 27°$ C., un volume $V_1 = 5^l,90$;

A la température $t_2 = 110°$ C., un volume $V_2 = 12^l,14$.

Soit α le coefficient de dissociation du corps Az^2O^4, c'est-à-dire le rapport du nombre des molécules de Az^2O^4 dissociées au nombre total des molécules que l'on aurait si tout le peroxyde d'azote se trouvait sous forme de Az^2O^4. On demande :

1° La valeur de α aux températures t_1 et t_2 ;

2° Le signe du phénomène thermique qui accompagne la transformation de Az^2O^4 en AzO^2 (On sait d'ailleurs que ce signe ne varie pas entre les températures de 27° C. et 110° C.)

On admettra que l'on peut appliquer à Az^2O^4 et AzO^2 les lois des gaz parfaits.

Renseignements numériques : Poids atomiques de l'azote = 14 ; Poids atomique de l'oxygène = 16 ; Densité de l'oxygène : $d = 1,105$.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1937. — *Le lieu des milieux des cordes interceptées sur une cissoïde droite par une sécante de direction fixe est une cubique.* 1° *Si la direction fixe est perpendiculaire à l'asymptote, la cubique est du quatrième ordre, et l'aire comprise entre cette cubique et son asymptote est la moitié de l'aire analogue de la cissoïde donnée.* 2° *Construire la cubique lorsque la direction fixe est inclinée à 45° sur l'asymptote.*

Soit une courbe algébrique quelconque $f(x, y) = 0$, $f(x, y)$ désignant un polynome de degré n ; proposons-nous de chercher le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée Δ, ayant pour paramètres directeurs α et β.

Désignons par x, y les coordonnées d'un point M du lieu, menons par ce point une parallèle à Δ. Un point quelconque de cette parallèle a pour coordonnées $X = x + \alpha\rho$, $Y = y + \beta\rho$, ρ étant proportionnel au segment qui a pour origine le point M et pour extrémité le point (X, Y).

Les valeurs de ρ relatives aux points de rencontre de la sécante et de la courbe sont racines de l'équation $F(\rho) \equiv f(x + \alpha\rho, y + \beta\rho) = 0$, et pour que le point M soit un point du lieu, il faut et il suffit que cette équation ait deux racines égales et de signes contraires, ou que les deux équations $F(\rho) = 0$, $F'(\rho) = 0$ aient une racine commune [illegible]

Considérons les termes de degré pair du polynome $F(\rho)$; on peut envisager leur ensemble comme un polynome où la variable serait ρ^2, soit $\varphi(\rho^2)$ ce polynome. Dans l'ensemble des termes de degré impair, mettons ρ en facteur ; le coefficient de ρ est aussi un polynome en ρ^2, soit $\psi(\rho^2)$. On peut alors écrire $F(\rho) = \varphi(\rho^2) + \rho\psi(\rho^2)$ et $F'(\rho) = \varphi'(\rho^2) + \rho\psi'(\rho^2) + \psi(\rho^2)$; le système des deux équations

$$\varphi(\rho^2) + \rho\psi(\rho^2) = 0, \qquad \varphi'(\rho^2) + \rho\psi'(\rho^2) + \psi(\rho^2) = 0$$

est équivalent au système $\varphi(\rho^2) = 0$, $\psi(\rho^2) = 0$, si on ne tient pas compte de la racine zéro.

On aura donc le lieu du point M en éliminant ρ^2 entre les deux équations $\varphi(\rho^2) = 0$, $\psi(\rho^2) = 0$.

Appliquons ceci au cas où la courbe est du troisième degré ; nous avons

$$F(\rho) = f(x, y) + \rho f'_x + \beta f'_y + \frac{\rho^2}{2}(\alpha^2 f''_{x^2} + 2\alpha\beta f''_{xy} + \beta^2 f''_{y^2}) + \rho^3 \varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

$\varphi(x, y)$ désignant l'ensemble des termes du troisième degré de $f(x, y)$. Nous en tirons

$$\varphi(\rho^2) = f(x, y) + \frac{\rho^2}{2}(\alpha f'_x + \beta f'_y) = 0, \qquad \psi(\rho^2) = \alpha f'_x + \beta f'_y + \rho^2 \varphi(\alpha, \beta) = 0,$$

et, en éliminant ρ^2 entre ces équations, nous obtenons immédiatement

$$\frac{1}{2}(\alpha f'_x + \beta f'_y)(\alpha f'_x + \beta f'_y) - \varphi(\alpha, \beta) f(x, y) = 0,$$

ou

$$\frac{1}{2}(\alpha^2 f'^2_x + \beta^2 f'^2_y + 2\alpha\beta f'_x f'_y) - \varphi(\alpha, \beta) f(x, y) = 0.$$

Telle est l'équation du lieu ; elle représente une courbe du troisième degré.

Si la courbe est une cissoïde droite, nous avons

$$f(x, y) = y^2(x + a) - x^3 = 0,$$

$$f'_x = 3x^2 + ay^2, \qquad f'_y = 2xy + 2ay, \qquad f''_{x^2} = 6x, \qquad f''_{xy} = 2y, \qquad f''_{y^2} = 2(x + a),$$

et l'équation du lieu s'écrit

$$(\alpha^2(3x^2 + ay^2) + 2\alpha\beta(xy + ay) + \beta^2(x + a)) - (\alpha x + \beta y)(3x^2 + ay^2) = 0.$$

1. Si la direction Δ est perpendiculaire à l'asymptote, on a $\alpha = 0$; l'équation du lieu devient

$$3x(3x^2 + y^2) - \beta(x^2 + ay^2) = 0, \qquad \text{ou} \qquad 2x(4x^2 + y^2) - ay^2 = 0.$$

Cette équation représente une cubique symétrique par rapport à Ox, admettant à l'origine un point de rebroussement dont la tangente est Ox. On la construit aisément en résolvant l'équation par rapport à y^2,

$$y^2 = \frac{8x^3}{2x + a}.$$

Elle admet pour asymptote la droite $x = -\frac{a}{2}$.

Nous représentons cette courbe en trait plein et la cissoïde en trait pointillé.

L'aire comprise entre cette courbe et son asymptote est donnée par la formule

$$A = 2\int_{-\frac{a}{2}}^{0} y\,dx = 2\int_{-\frac{a}{2}}^{0} \sqrt{\frac{8x^3}{2x + a}}\,dx.$$

Posons $2x = -z$, nous obtenons

$$A = 2\int_a^0 \sqrt{\frac{z^3}{a-z}}\left(-\frac{dz}{2}\right) = \int_0^a \sqrt{\frac{z^3}{a-z}}\,dz.$$

D'autre part, l'aire comprise entre la cissoïde et son asymptote est

$$A' = 2\int_0^a \sqrt{\frac{x^3}{a-x}}\,dx; \qquad \text{on a donc} \qquad A = \frac{A'}{2}$$

Pour calculer A', on peut poser $x = a\sin^2\varphi$; on a alors

$$A' = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a^3\sin^6\varphi}{a\cos^2\varphi}}\,2a\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^4\varphi\,d\varphi = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\varphi)^2\,d\varphi$$

ou $$A' = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi.$$

L'intégrale indéfinie est alors $\frac{3}{2}\varphi - \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8}$, et l'intégrale définie est égale à $\frac{3\pi}{4}$; on a donc $A' = \frac{3\pi a^2}{4}$, ce qui montre que l'aire comprise entre la cissoïde droite et son asymptote est égale à trois fois l'aire du cercle générateur.

2. Si la direction fixe fait un angle de 45° avec l'asymptote, on a $\alpha = \beta = 1$, et l'équation du lieu devient

$$(3x^2 + y^2 + 2xy - 2ay)(4x + 2y - a) - 2(x(x^2 - y^2) - ay^2) = 0.$$

ou $$2(x+y)(x+y)^2 + 4x^2) - a(3(x+y)^2 + 4xy) + 2a^2y = 0.$$

Pour construire cette courbe, nous la couperons par une parallèle à la direction asymptotique réelle, $y + x = t$, et nous discuterons la réalité et le signe des abscisses des points de rencontre.

Remplaçons dans l'équation de la courbe y par $t - x$; nous obtenons

$$2t(t^2 + 4x^2) - a(3t^2 + 4x(t-x)) + 2a^2(t-x) = 0,$$

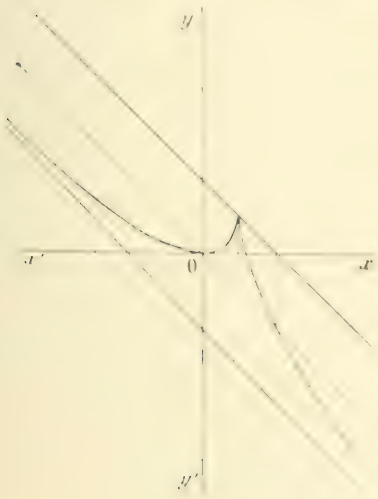
ou, en ordonnant par rapport à x,

$$4x^2(2t+a) - 2ax(2t+a) + t(2t^2 - 3at + 2a^2) = 0.$$

A chaque valeur de t correspondent deux valeurs de x. Pour que ces valeurs soient réelles, il faut qu'on ait

$$a^2(2t+a)^2 - 4t(2t+a)(2t^2 - 3at + 2a^2) > 0, \qquad \text{ou} \qquad -(2t+a)(2t-a)^2 > 0.$$

Cette inégalité est vérifiée par les valeurs de t comprises entre $-\frac{a}{2}$ et $+\frac{a}{2}$; les signes et les valeurs remarquables des deux valeurs de x sont indiqués dans le tableau suivant :



t	$-\frac{a}{2}$		0		$\frac{a}{2}$
x_1	$+\infty$	$+$	$\frac{a}{2}$	$-$	$\frac{a}{4}$
x_2	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\frac{a}{4}$

On en déduit la forme de la courbe. La droite $y = x = -\frac{a}{2}$ est asymptote d'inflexion; la courbe passe par l'origine et est tangente en ce point à Ox.

Le point $x = \frac{a}{4}$, $y = \frac{a}{4}$ est un point de rebroussement.

car si l'on désigne par $f(x, y)$ le premier membre de l'équation de la courbe pour ces valeurs de x et y, on a $f = 0$, $f_x = 0$, $f_y = 10a$, $f_{x^2} = 0$, $f_{xy} = 0$. La tangente de rebroussement est parallèle à Oy.

J. OTTENHEIMER, lycée de Nancy.

Bonnes solutions de MM. J. Dessirier ; G. Foucry.
Solutions satisfaisantes par MM. Charles Guillerme ; L. Simon ; J. Surateau ; Pierre Verlaine.

Solution géométrique. — Toute sécante Δ parallèle à la direction fixe rencontre le lieu en trois points (dont deux peuvent être imaginaires) qui sont les milieux des trois cordes interceptées par cette sécante sur la cissoïde. Ceux de ces points qui sont réels se construisent facilement, comme nous allons le montrer, lorsqu'on connaît le lieu du centre des moyennes distances des intersections de la sécante et de la cissoïde quand la sécante se déplace parallèlement à elle-même. Appliquons à la cissoïde ce théorème bien connu :

Le centre des moyennes distances des points [illegible] d'une courbe de degré n est aussi celui des points où cette transversale rencontre les n asymptotes.

Et choisissons tout d'abord pour transversale la tangente de rebroussement. Elle rencontre la cissoïde en trois points confondus avec le rebroussement O, qui est par suite le centre des moyennes distances cherché. D'autre part elle coupe l'asymptote en un point D, d'abscisse a, et, par raison de symétrie, elle contient le foyer singulier F de la cissoïde; autrement dit elle rencontre les deux asymptotes isotropes en deux points confondus au point F : ce point a par suite pour coefficient 2 ; le centre des moyennes distances O a pour coefficient 3, et enfin le point D pour coefficient 1. Il s'ensuit que F est le point de la tangente de rebroussement, axe des x, qui a pour abscisse $-\frac{a}{2}$.

Si l'on remarque que le centre du cercle générateur de la cissoïde droite est le milieu de OD, on peut énoncer le résultat précédent sous la forme suivante :

Le foyer singulier de la cissoïde droite est le symétrique du centre du cercle générateur par rapport à son point de rebroussement.

Les droites isotropes d'un point F rencontrent une transversale quelconque Δ en deux points imaginaires, mais le milieu M du segment qu'elles interceptent sur cette transversale est réel : c'est la projection orthogonale de F sur Δ. En effet, d'après le théorème rappelé ci-dessus, c'est le milieu du segment (réel ou imaginaire) qu'un cercle de centre F et de rayon arbitraire intercepte sur Δ, car les droites isotropes de F sont asymptotes de ce cercle. Par conséquent,

Le milieu M du segment qu'une sécante Δ intercepte sur les asymptotes isotropes de la cissoïde est la projection du foyer singulier F sur Δ.

Quand Δ se déplace parallèlement à elle-même, M décrit la perpendiculaire abaissée de F sur Δ.

Désignons par A et Q les points où l'asymptote réelle de la cissoïde rencontre respectivement cette perpendiculaire et Δ. Le centre des moyennes distances C des intersections de Δ et de la cissoïde, qui est d'après ce qui précède situé entre M et Q et deux fois plus près de M (puisque M a pour coefficient 2) que de Q, décrit la droite fixe AC.

Soit alors P l'un des points réels où Δ coupe la cissoïde, le milieu P′ de la corde interceptée dans la cissoïde par les deux autres points où cette courbe rencontre Δ (points qui sont ou tous deux réels ou tous deux imaginaires) s'obtiendra en prenant sur Δ $CP' = -\frac{CP}{2}$. A chaque point réel P où Δ coupe la cissoïde correspondra un point réel P′ du lieu tel que $CP' = -\frac{CP}{2}$. Les tangentes en P à la cissoïde et en P′ au lieu cherché se coupent d'ailleurs sur AC, de sorte que si la tangente en P est tangente d'inflexion de la cissoïde, la tangente en P′ est tangente d'inflexion au lieu cherché.

Ce lieu est par suite une cubique cuspidale à asymptote d'inflexion, dont le point de rebroussement, R, s'obtient en menant par O la parallèle OΔ' à la direction fixe, prenant sur cette droite le point C′ où elle rencontre AC et prolongeant OC′ de la longueur $C'R = \frac{OC}{2}$. Cette courbe passe évidemment par les trois points où AC rencontre la cissoïde ; elle passe également par le rebroussement, O, de cette dernière, ainsi que par les trois points de contact, réels ou imaginaires, des tangentes à la cissoïde parallèles à Δ. En effet, la parallèle OΔ' à Δ menée par le rebroussement O de la cissoïde coupe cette courbe au point O,

qui compte pour deux points d'intersection, et en un point N. Le point C' où OΔ' rencontre AC est le centre des moyennes distances des intersections de OΔ' et de la cissoïde ; par conséquent on a $\overline{OC'} = \frac{\overline{CN}}{2}$. Or, au point N de la cissoïde correspond, d'après ce qui précède, le point O' du lieu tel que

$$\overline{C'O'} = \frac{\overline{CN}}{2} = \overline{C'O} ;$$

ce point O' coïncide donc avec le rebroussement de la cissoïde. De même, une tangente à la cissoïde, parallèle à Δ, touche cette courbe en un point T, qui compte pour deux points d'intersection, et la coupe en un point T'. Soit C'' le point où TT' rencontre AC, on a $\overline{TC''} = \frac{\overline{CT}}{2}$. Donc au point T de la cissoïde correspond sur le lieu le point T.

Nous ajouterons encore que la tangente au point T à la cissoïde touche aussi la cubique trouvée, le point de contact étant le point T'', correspondant au point T considéré comme appartenant à la cissoïde, c'est-à-dire le point T'' tel que $\overline{T''C''} = \frac{\overline{CT}}{2}$; c'est en effet ce qui ressort de ce que les tangentes en T et T'' se coupent sur AC. Ainsi les trois tangentes à la cissoïde, réelles ou imaginaires, parallèles à Δ, sont tangentes au lieu.

On peut considérer le lieu trouvé comme obtenu en traçant d'abord la symétrique oblique (S') de la cissoïde donnée, par rapport à AC, pour la direction Δ, et prenant les milieux des segments parallèles à Δ compris entre AC et (S'). On en conclut que son asymptote est la droite FA, c'est-à-dire la perpendiculaire menée par F à la direction fixe.

D'un autre côté, l'aire comprise entre la symétrique oblique de la cissoïde et son asymptote est égale à celle qui est comprise entre la cissoïde et son asymptote.

Il s'ensuit que l'aire comprise entre la cubique cherchée et son asymptote est, **dans tous les cas**, égale à la moitié de l'aire analogue relative à la cissoïde, c'est-à-dire à $\frac{3\pi a^2}{8}$.

Lorsque la direction Δ est perpendiculaire à l'asymptote de la cissoïde, la droite AC se confond avec l'axe Oy, la cubique a pour asymptote la parallèle menée par F à Oy, pour rebroussement le point O, et, pour une même ordonnée, les abscisses de ses points sont égales à la moitié de celles des points correspondants de la cissoïde et de signe contraire.

L. LEMOYNE.

PHYSIQUE.

1920. — *Un barreau aimanté horizontal, long et mince, est suspendu par son milieu à un fil de torsion. Placé d'abord dans un champ magnétique négligeable et écarté de sa position d'équilibre, il fait $p = 150$ oscillations en 5 minutes. On produit ensuite un champ horizontal H parallèle à sa position d'équilibre ; il fait alors $p' = 430,5$ oscillations en 5 minutes. Le même barreau, placé verticalement et suspendu par un axe horizontal passant par une de ses extrémités, exécute, sous l'action de son poids, $q = 800$ oscillations en 5 minutes. On produit un champ égal au précédent, mais vertical. Combien le barreau fera-t-il d'oscillations en 5 minutes ?*

Désignons par I_1 le moment d'inertie du barreau par rapport au premier axe de rotation, par C le coefficient de l'angle d'écart dans l'expression du couple de torsion. La première expérience donne une durée d'oscillation

$$t = \pi\sqrt{\frac{I_1}{C}}.$$

Désignons par M le moment magnétique du barreau, la deuxième expérience donne une durée d'oscillation

$$t = \pi\sqrt{\frac{I_1}{C - MH}}$$

L'élimination de C donne

$$MH = \pi^2 I_1 \frac{p^2 - p'^2}{p'^2}$$

Sous l'action de son poids, le barreau, dans la troisième expérience, oscille avec une durée $s = \pi\sqrt{\frac{I_2}{mag}}$, I_2 désignant le moment d'inertie autour d'un axe passant par l'extrémité.

Enfin, dans la quatrième expérience, on a la durée d'oscillation $s' = \pi\sqrt{\frac{I_2}{mag + MH}}$.

L'élimination de mag donne $MH = \pi^2 I_2 \frac{s'^2 - s^2}{s^2 s'^2}$. En égalant ces deux expressions de MH, on a $I_2\left(\frac{1}{s'^2} - \frac{1}{s^2}\right) = I_1\left(\frac{1}{t'^2} - \frac{1}{t^2}\right)$; ou bien, en remplaçant les inverses $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{t'}$, $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{s'}$ par les quantités proportionnelles p, p', q, q',

$$q'^2 = q^2 - \frac{I_1}{I_2}(p'^2 - p^2).$$

Or $$I_1 = 2\int_0^{\frac{l}{2}} s\delta x^2 dx = \frac{2}{3} s\delta a \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} s\delta x^2 dx = \frac{8}{3} s\delta a = 4I_1.$$

Donc $$q'^2 = q^2 - \frac{p'^2 - p^2}{4},$$

ce qui donne, tous calculs effectués, $q' = 825$.

P. VERGNES.

Solution en partie exacte de M. J. Ortemann.

N. B. — Les données numériques se rapportent à un barreau qui aurait les caractéristiques suivantes : longueur 24 cm, section 0 cm.1, poids 40 g, masse magnétique de chaque pôle 50, moment magnétique 1050, coefficient C = 1450, champ magnétique H = 10.

Il est à noter que le champ magnétique a beaucoup plus d'influence sur les oscillations horizontales qui se font à l'extrémité du fil de torsion que sur les oscillations verticales. L'observation de ces dernières constituerait une très mauvaise méthode pour mesurer un champ faible ; par exemple, la composante verticale du champ terrestre ne modifierait guère que d'un millième la durée d'oscillation d'un barreau de 40 cm de long ayant des pôles de masse magnétique égale à 50 unités.

CONCOURS DE 1911 (*Suite*)

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Mathématiques.

I. — Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, les fonctions primitives des fonctions $e^{ax}\cos(\alpha x + \beta)$ et $e^{ax}\sin(\alpha x + \beta)$.

II. — **1995.** Étudier le mouvement d'un mobile M dont l'accélération γ et la vitesse v font un angle obtus constant φ et sont dans un rapport constant k.

1° Nature de l'hodographe du mouvement, qu'on rapportera aux coordonnées polaires v, ω en prenant comme pôle le centre O de l'hodographe ; on supposera donnée la valeur de v pour $\omega = 0$.

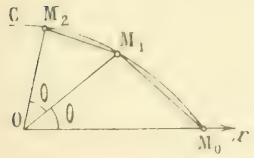
Relation entre l'accélération tangentielle et la vitesse du mouvement. Variation de la vitesse avec le temps t : on supposera $\omega = 0$ pour $t = 0$.

Variation de l'angle ω avec le temps.

2° Expression en fonction du temps des composantes cartésiennes $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$

de la vitesse du mobile M. Expression des coordonnées x, y du mobile en fonction de ω, de ω_0 et de la vitesse initiale : on déterminera les constantes d'intégration en écrivant que x et y sont nuls pour $t = \infty$.

Comparer le mouvement de M à celui du point représentatif sur l'hodographe.



III. — **1996**. On considère la courbe C dont l'équation en coordonnées polaires est $\rho = ae^{\omega}$.

Au point M_0 ($\rho = a$, $\omega = 0$) de C l'on associe une infinité de points $M_1(\rho_1, \omega_1)$, ..., $M_n(\rho_n, \omega_n)$, ..., de la même courbe, tels que $\omega_1 = \theta$, ..., $\omega_n = n\theta$ ... ; l'on suppose que les points M_0, M_1, ..., M_n, ... sont des points matériels de masses respectives $m_0 = \rho^2$, $m_1 = \rho_1^2$, ..., $m_n = \rho_n^2$, ..., proportionnelles à leurs distances au point O.

1° Définir le centre de gravité G de ces points matériels en nombre infini. Calculer les coordonnées cartésiennes X, Y, puis les coordonnées polaires R, α du point G.

On calculera au préalable les expressions $S_c = \sum^n q^k \cos k\theta$ et $S_s = \sum^n q^k \sin k\theta$, où k prend toutes les valeurs entières comprises entre 0 et n ($0 \leqslant k \leqslant n$) ; on pourra utiliser à cet effet la formule de Moivre.

2° Construire, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, l'arc de courbe décrit par le point G lorsque α varie de 0 à ∞.

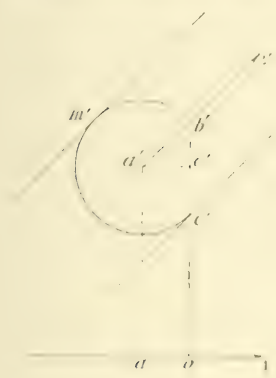
Calcul trigonométrique.

On donne dans un triangle les côtés $a = 31^{m},025$, $b = 43^{m},162$ et l'angle A $= 78^{g},126$.

Calculer, pour chacune des deux solutions, les angles B, C en grades (G), le côté c en mètres (m), la surface S en ares.

Épure.

1997. — Intersection d'un tore et d'un cylindre de révolution. — Données : $oo' = 18^{cm}$, $bb' = ob = a'b' = 4^{cm}$.



Un arc de circonférence situé dans le plan de front 1 est projeté verticalement suivant $b'm'c'$ de centre a'.

Le tore est engendré par cet arc de circonférence tournant autour de la verticale du point o.

Le cylindre de révolution a pour axe la droite (1, 1'), et pour contour apparent vertical les deux tangentes à l'arc $b'm'c'$, menées parallèlement à 1'.

Représenter, en faisant la distinction des parties vues et cachées :

1° En projection horizontale, la partie du cylindre extérieure au tore ;

2° En projection verticale, la partie du tore extérieure au cylindre.

Le cylindre sera limité par deux plans de profil situés à 8 centimètres de distance du point o, o'.

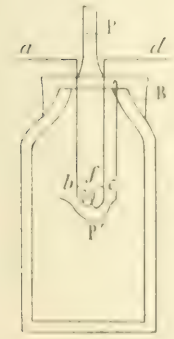
On représentera en traits noirs discontinus ou en traits rouges la construction d'un point quelconque et de sa tangente.

Titre et cadre inutiles.

Physique et chimie.

1998. — 1. — On brûle en vase clos dans une atmosphère d'oxygène pur un gramme d'un hydrocarbure liquide de formule $C^{\alpha}H^{\beta}$, de façon à réaliser une combustion complète selon la formule :

$$2C^{\alpha}H^{\beta} + 4\alpha O^2 = \beta H^2O + 2\alpha CO^2 + \beta H^2O.$$



L'opération est effectuée dans une bombe calorimétrique constituée essentiellement comme suit :

La bombe est fermée par un bouchon B. L'oxygène est introduit par le dispositif spécial P. La matière combustible est placée dans une nacelle de platine P'. Le bouchon de [illegible] est traversé par deux conducteurs isolés [illegible] et [illegible] servant pour l'allumage. Le courant électrique qui parcourt ces conducteurs porte au rouge et fait brûler le fil de fer f, disposé de façon à pénétrer en partie dans la matière combustible. La bombe est placée dans un calorimètre de Berthelot. Le thermomètre plonge dans ce calorimètre est gradué en centièmes de degré.

On a réalisé avant l'expérience l'équilibre de température entre l'eau du calorimètre et l'air de la pièce. On constate que la température de l'eau du calorimètre est de 15°,61. On fait passer le courant et l'on obtient toutes les 30 secondes les températures suivantes :

30 sec.	après le passage du courant	18°.	60 sec.	après le passage du courant	18°,14,
90 sec.	—	18°,23,	120 sec.	—	18°,30,
150 sec.	—	18°,29,	180 sec.	—	18°,32.

On note, après cette dernière mesure, que la diminution de la température observée par minute reste sensiblement constante, et l'on constate que la température du thermomètre est de 18°,15 six minutes après le passage du courant. Une expérience spéciale a permis d'évaluer à 180g la valeur en eau du calorimètre et des appareils qu'il contient. Le poids de l'eau contenue dans le calorimètre est de 3273g. La spirale de fer pèse 0g,025 et la chaleur dégagée par la combustion d'un gramme de fer est de 1,6 grande calorie.

On demande de calculer en grandes calories la chaleur dégagée par la combustion complète d'un gramme de l'hydrocarbure précité.

On admet que l'on évalue la température lue et la correction de température en commettant pour chacune de ces deux déterminations une erreur inférieure à 1/100 de degré, et que l'erreur dont peut être affectée la valeur en eau du calorimètre est inférieure à 2 grammes. On demande de calculer la valeur maximum de l'erreur relative commise dans la détermination précitée.

2. — *a*) La densité de vapeur de l'hydrocarbure C^nH^p par rapport à l'air est de 2,5. Le quotient du poids de carbone par le poids d'hydrogène contenu dans l'hydrocarbure est de 5. On sait que le poids spécifique de l'air est égal à 14,4 fois celui de l'hydrogène.

On demande de déterminer la formule du composé C^nH^p.

b) On a établi d'autre part par des expériences analogues que les réactions ci-dessous effectuées à volume constant comportent les dégagements de chaleur suivants par molécule gramme de CO^2 ou de H^2O formé :

(1) $C + O^2 = CO^2 + 94,3$ grandes calories,

(2) $H^2 + O = H^2O$ (à l'état de vapeur) $+ 57,4$ grandes calories.

La chaleur de vaporisation d'une molécule-gramme d'eau liquide est de 10 grandes calories, 8. Le poids atomique du carbone est 12.

On demande d'indiquer si le composé C^nH^p est endothermique ou exothermique et de calculer la chaleur de formation d'un gramme de ce carbure à l'état liquide, en se reportant aux résultats de l'expérience précédente.

Les chaleurs dégagées dans les réactions (1) et (2) étant supposées déterminées avec une erreur relative inférieure à $\frac{1}{100}$, on demande de calculer la valeur maximum de l'erreur absolue commise dans la détermination précitée.

3. On brûle en une heure par combustion complète 10 kilogrammes du même hydrocarbure dans un moteur à pétrole qui fournit un travail effectif équivalent aux 2/10 de la chaleur dégagée par la combustion de l'hydrocarbure.

On demande d'évaluer en unités C. G. S. le travail fourni par la machine en une seconde, en prenant comme point de départ l'équivalence entre une grande calorie et un travail égal à 425 kilogrammètres, et en indiquant la méthode suivie.

1999. — 1° On traite à chaud dans un ballon un mélange d'acide sulfurique concentré et de mercure. On recueille le gaz qui se dégage du ballon dans l'eau de chlore. On ajoute dans le liquide, une fois l'opération terminée, un excès de chlorure de baryum et l'on recueille un précipité dont le poids à l'état sec est de 10 grammes.

2° On fait couler de l'acide sulfurique sur du soufre fondu et l'on recueille le gaz dégagé dans l'eau de chlore, comme il est dit ci-dessus. Le poids du précipité obtenu après addition de chlorure de baryum est de 10g à sec.

3° On chauffe de l'acide sulfurique concentré avec du charbon et l'on recueille le gaz dégagé dans l'eau de chlore. On précipite comme ci-dessus par le chlorure de baryum, mais on reprend après filtration le précipité obtenu par l'acide chlorhydrique dilué dans l'eau, et l'on pèse le précipité sec obtenu par filtration de la liqueur chlorhydrique. Le poids de ce précipité est de 10 grammes.

On demande de calculer les poids d'acide sulfurique décomposés dans chacune des trois opérations précédentes.

$S = 32$, $O = 16$, $Ba = 137$, $C = 12$, $Hg = 200$.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

22e Année. Janvier 1912. N° 4.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LE RAYON DE COURBURE D'UNE CONIQUE (fin)

par M. **Louis Sire**.

6. Supposons le point C confondu avec le point B, les points m et c seront confondus avec le point b; par suite :

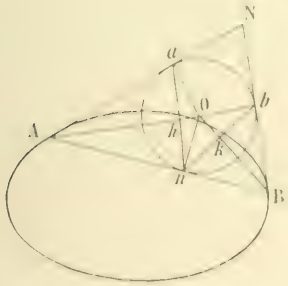
Le rayon de courbure en un point d'une conique est proportionnel au cube de la distance du pôle d'une de ses tangentes par rapport à un cercle, à la polaire du point et inversement proportionnel au cube de la distance du pôle de la tangente au point considéré à la polaire du point de contact de la tangente quelconque et au cube du sinus de l'angle de la tangente à la conique avec le rayon vecteur joignant le point de contact au centre du cercle.

Désignons par n le point de rencontre des polaires des points A et B par rapport au cercle O ; nous déduisons du théorème précédent, $\rho = k\left(\frac{nb}{na}\right)^3 \cdot \frac{1}{\sin^3 \varphi}$; pour le rayon ρ_1 de la conique au point B, nous aurons $\rho_1 = \frac{k}{\sin^3 \varphi_1}$; par suite,

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{nb \,.\, \sin \varphi_1}{na \,.\, \sin \varphi}\right)^3.$$

Soit N le point de rencontre des tangentes en A et B à la conique (C), et prenons pour cercle O le cercle inscrit au triangle NAB.

D'après ce qui précède, nous avons



$$\frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{nb \,.\, \sin \widehat{OBb}}{na \,.\, \sin \widehat{OAa}}\right)^3 = \left(\frac{nb \,.\, \sin \widehat{Onb}}{na \,.\, \sin \widehat{Ona}}\right)^3 ; \quad \text{or} \quad \frac{\sin \widehat{Onb}}{\sin \widehat{Ona}} = \frac{Oh}{Ok},$$

par suite $\frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{nb \,.\, Ok}{na \,.\, Oh}\right)^3$; d'où la relation $\frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{\text{surface } Onb}{\text{surface } Ona}\right)^3$.

Nous avons aussi $\frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{NA}{NB}\right)^3$; par suite, nous en déduisons la relation, relative à un triangle quelconque, $\frac{NA}{NB} = \frac{\text{surf. } Onb}{\text{surf. } Ona}$.

7. Supposons que les points B et C soient les points à l'infini de la conique (C) ; la droite bc sera la polaire du centre de la conique par rapport au cercle O et le point m sera confondu avec le point O, par suite :

Le rayon de courbure en un point d'une conique est proportionnel au cube de la distance du centre d'un cercle quelconque à la polaire du point par rapport à ce cercle, et inversement proportionnel au cube de la distance du pôle de la tangente au point considéré à la polaire du centre de la conique par rapport au cercle et au cube du sinus de l'angle de la tangente à la conique avec le rayon vecteur joignant le point de contact au centre du cercle ;

ou encore :

Le rayon de courbure en un point d'une conique est inversement proportionnel au cube de la distance du point au centre d'un cercle quelconque, au cube de la distance du pôle de la tangente au point considéré à la polaire du centre de la conique par rapport au cercle et au cube du sinus de l'angle de la tangente à la conique avec le rayon vecteur joignant le point de contact au centre du cercle.

Si le cercle O est concentrique à la conique, nous voyons que :

Le rayon de courbure en un point d'une conique est inversement proportionnel au cube de la distance du point au centre de la conique et au cube du sinus de l'angle de la tangente à la conique avec le rayon vecteur joignant le point de contact au centre de la conique,

ce qui donne le théorème connu :

Le rayon de courbure en un point d'une conique est inversement proportionnel au cube de la distance de son centre à la tangente à la conique au point considéré.

Si le cercle O a son centre en l'un des foyers de la conique, le rayon de courbure de la conique au point A a une expression de la forme $\rho = k \frac{1}{(dd' \sin \varphi)^3}$ d étant la distance du point A au foyer F, d' la distance du pôle de la tangente au point A à la polaire du centre de la conique par rapport au cercle. Or nous avons démontré que $\rho = \frac{k}{\sin \varphi}$ de la propriété : en chaque point d'une conique, le produit (dd') est constant.

8. Supposons que les points B et C soient les points de contact des tangentes issues du centre O du cercle à la conique ; la distance d est infinie et par suite constante, il reste $\rho = k \left(\frac{H}{\sin \varphi}\right)^3$, c'est-à-dire :

Le rayon de courbure en un point d'une conique est proportionnel au cube de la distance du pôle par rapport à un cercle de la polaire du centre de ce cercle par rapport à la conique, à la polaire du point considéré par rapport au cercle, et inversement proportionnel au cube du sinus de l'angle de la tangente à la conique avec le rayon vecteur joignant le point de contact au centre du cercle.

Il en résulte qu'en chaque point du cercle le rapport $\frac{H}{\sin \varphi}$ est constant.

Si le centre du cercle coïncide avec le centre de la conique, nous avons l'énoncé suivant :

Le rayon de courbure en un point d'une conique est proportionnel au cube de la distance de son centre à la polaire du point par rapport à un cercle concentrique, et au cube du sinus de l'angle de la tangente à la conique avec le rayon vecteur joignant son centre au point du contact.

Si le centre du cercle coïncide avec un des foyers de la conique, nous avons $\rho = k \left(\frac{H}{\sin \varphi}\right)^3$; or, nous avons également $\rho = \frac{k}{\sin \varphi}$; donc, dans le cas considéré, H est constant ; autrement dit :

La polaire réciproque d'une conique par rapport à un cercle ayant son centre en l'un des foyers de la conique est un cercle qui a pour centre le pôle de la directrice correspondante par rapport au cercle considéré.

9. Supposons que la droite BC passe par le centre O du cercle, le point m est à l'infini, par suite :

Le rayon de courbure en un point d'une conique est inversement proportionnel au cube de la distance du pôle de la tangente au point considéré par rapport à un cercle, à la polaire par rapport à ce cercle du pôle par rapport à la conique d'une droite quelconque passant par le centre du cercle, et au cube du sinus de l'angle de la tangente à la conique avec le rayon vecteur joignant le point de contact au centre du cercle.

Si la droite BC passe par le centre de la conique, nous voyons que :

Le rayon de courbure en un point d'une conique est inversement proportionnel au cube de la distance du pôle de la tangente au point considéré à la droite, issue du centre du cercle, perpendiculaire à la direction

conjuguée du diamètre de la conique qui passe par le centre du cercle, et au cube du sinus de l'angle de la tangente à la conique avec le rayon vecteur joignant le point de contact au centre du cercle.

Enfin, si le centre du cercle se trouve sur l'un des axes de la conique :

Le rayon de courbure en un point d'une conique est inversement proportionnel au cube de la distance du pôle de la tangente au point considéré par rapport à un cercle ayant son centre sur l'un des axes de la conique, à cet axe, et au cube du sinus de l'angle de la tangente à la conique avec le rayon vecteur joignant le point de contact au centre du cercle.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1938. — *On considère deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox *et* Oy *et un point* M′ *ayant pour coordonnées* x' *et* y'; *soient* P *la projection du point* M′ *sur* Ox *et* M *le symétrique de* P *par rapport à* OM′.

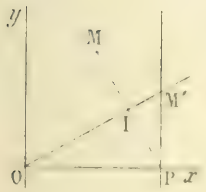
1° *On demande d'exprimer l'affixe du point* M *en fonction de celle du point* M′ *et de celle du point symétrique de* M′ *par rapport à* Ox; *de calculer les coordonnées* x *et* y *de* M *en fonction de celles de* M′; *de montrer qu'à tout point* M′ *correspond un point* M *unique et qu'à tout point* M *correspondent deux points* M′. *Placer ces points quand le point* M *est donné.*

2° *Trouver le lieu du point* M′ *quand le point* M *décrit une parallèle à* Ox *ou à* Oy, *un cercle ayant son centre au point* O, *un cercle tangent à* Oy *ou à* Ox *au point* O.

3° *Lieu du point* M *quand le point* M′ *décrit une parallèle à l'un des axes, ou un cercle ayant pour centre le point* O.

4° *On suppose le point* M′ *sollicité par une force représentée par le vecteur* M′M. *Trouver les lignes de force et les lignes de niveau du champ ainsi créé. Évaluer le travail total de la force du champ, quand le point* M′ *parcourt une ligne de force tout entière ou une partie seulement de cette ligne de force.*

1° Soient z l'affixe du point M et z' celle du point M′, z_1 celle du symétrique de M′ par rapport à Ox. L'affixe du point P est $\frac{z'+z_1}{2}$ et celle du point M est égale à celle du point P multipliée par $e^{i\theta}$, θ étant l'angle de OM avec Ox. On a $z'=x'+iy'$, $z_1=x'-iy'$, donc $e^{i\theta}=\frac{z}{z_1}$.



Nous avons finalement

$$(1)\qquad z=\frac{z'}{z_1}\,\frac{z'+z_1}{2}, \qquad \text{ou} \qquad x+iy=\frac{x'+iy'}{x'-iy'}\,x'$$

Cette relation peut s'écrire $x+iy=x'\,\frac{(x'+iy')^2}{x'^2-y'^2}$, et donne de suite

$$(2)\qquad x=\frac{x'(x'^2-y'^2)}{x'^2+y'^2}, \qquad y=\frac{2x'y'}{x'^2+y'^2}$$

Les formules (1) et (2) résolvent la première partie, au point de vue analytique. Il reste à étudier la correspondance qui existe entre M et M′.

Il est d'abord évident, aussi bien d'après les formules (2) que par des considérations géométriques, qu'à un point M′ donné arbitrairement correspond un point M et un seul.

Si nous nous donnons le point M, c'est-à-dire les deux nombres x et y, nous avons, pour calculer x' et y', deux équations du troisième degré : le point M se présente comme étant le point de rencontre de deux cubiques ; ces deux cubiques ont en commun un point double à l'origine et les tangentes aux

deux courbes sont les mêmes; elles se coupent donc en six points confondus avec l'origine et qu'il faut éliminer; restent trois autres points; l'un de ceux-ci est à l'infini sur Oy et ne convient pas non plus. Il n'y a donc que deux solutions acceptables.

Pour les déterminer géométriquement, il faut décrire le cercle de centre O et de rayon OM, joindre le point M aux points de rencontre avec Ox, P et P_1, abaisser du point O des perpendiculaires sur MP et MP_1 et prendre leurs points de rencontre respectifs avec les parallèles à Oy menées par les points P et P_1.

2° Lorsque le point M se meut sur une parallèle à Ox, $y = a$, on a entre les coordonnées, x' et y', du point M′ la relation

$$2x'^2y' - a(x'^2 - y'^2) = 0.$$

Cette équation représente une cubique ayant un point double isolé à l'origine avec tangentes isotropes, et les axes pour directions asymptotiques. Les branches parallèles à Ox sont asymptotes à la droite $y' = \frac{a}{2}$, et les branches parallèles à Oy sont des branches paraboliques.

Quand le point M se meut sur une parallèle à Oy, $x = a$, le point M′ décrit la cubique

$$x'(x'^2 - y'^2) - a(x'^2 + y'^2) = 0.$$

Elle a le même point double à l'origine que la précédente et a trois asymptotes réelles et distinctes.

Quand le point M décrit un cercle ayant son centre à l'origine, $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, le point M′ décrit les deux droites $x'^2 - a^2 = 0$, ce qui était évident *a priori*, d'après la manière dont le point M′ se déduit du point M.

Lorsque le point M décrit le cercle $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, le point M′ décrit la strophoïde

$$x'(x'^2 + y'^2) - 2a(x'^2 - y'^2) = 0,$$

et l'axe des y, $x' = 0$, qui correspond à l'origine des coordonnées.

Enfin, quand le point M décrit un cercle tangent à Ox au point O et de rayon a, le point M′ décrit un cercle tangent à Ox en O ayant pour rayon $2a$ et aussi l'axe des y.

3° Supposons maintenant que ce soit le point M′ qui se meuve dans le plan et examinons les cas simples signalés.

Si le point se meut sur une parallèle à Oy, $x' = a$, et, que l'on pose $y' = at$, les équations paramétriques du lieu de M sont $x = a\frac{1-t}{1+t^2} = a\cos\varphi$, $y = \frac{2at}{1+t} = a\sin\varphi$; ce sont les équations paramétriques du cercle $x^2 + y^2 = a^2$. Ce résultat est évident aussi, *a priori*.

Si le point M′ se meut sur une parallèle à Ox, on a $y' = a$, et, en posant $x' = at$, on trouve, pour équations paramétriques du lieu de M,

$$x = \frac{at^2 - 1}{t^2 + 1}, \qquad y = \frac{2at^3}{t^2 + 1}.$$

C'est encore, comme il est facile de s'en assurer, une strophoïde ayant pour point double le point $y = a$ de l'axe des y.

Enfin, quand le point M′ parcourt un cercle ayant pour centre l'origine, $x'^2 + y'^2 = a^2$, on peut poser $x' = a\cos\varphi$, $y' = a\sin\varphi$; alors x et y deviennent

$$x = a\cos\varphi\cos 2\varphi, \qquad y = a\cos\varphi\sin 2\varphi.$$

Ce sont les équations paramétriques du lieu de M. L'équation cartésienne est du sixième degré; mais si l'on veut étudier la courbe, il vaut mieux se servir des équations paramétriques qui sont particulièrement simples [1].

---

[1] En remarquant que l'on a $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} 2\varphi$ et en posant $\varphi = \frac{\omega}{2}$ on voit facilement que l'équation polaire de la courbe est $\rho = a\cos\frac{\omega}{2}$. On a déjà rencontré ce lieu dans *La Revue*, n° de décembre 1909, p. 394.

4° Le vecteur MM′ a pour composantes $x - x'$, $y - y'$, ou $X = \frac{-2x'y'^2}{x'^2 + y'^2}$, $Y = \frac{y'(x'^2 - y'^2)}{x'^2 + y'^2}$.

Maintenant que toute confusion a disparu, appelons x et y les coordonnées du point mobile M′ : les composantes de la force seront $X = \frac{-2xy^2}{x^2 + y^2}$, $Y = \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$, et les équations différentielles des lignes de force et des lignes de niveau, respectivement $\frac{X}{dx} = \frac{Y}{dy}$, $Xdx + Ydy = 0$.

La première de ces équations se simplifie et devient $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$; c'est une équation homogène, qui s'intègre en posant $y = tx$ et, par suite, $dy = tdx + xdt$; l'équation devient alors $(1 - t^2)dx + 2t(tdx + xdt) = 0$ ou $(1 + t^2)dx + 2xtdt = 0$; elle s'écrit à ce moment

$$\frac{dx}{x} + \frac{2tdt}{1 + t^2} = 0,$$

et son intégration est immédiate.

On trouve $Lx + L(1 + t^2) = C^{te}$, $x(1 + t^2) = C^{te}$, $x^2 - y^2 - Cx = 0$.

Les lignes de force sont les cercles du faisceau linéaire tangents à l'origine à Oy.

Par un procédé analogue on trouvera les lignes de niveau ; ce sont les trajectoires orthogonales de celles-ci, et, par suite évidemment, les cercles du faisceau linéaire tangents à Ox au point O.

Quand le point parcourt une ligne de force, c'est-à-dire un cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$, l'expression du travail élémentaire devient

$$d\mathfrak{T} = \frac{-2xy^2dx + y(x^2 - y^2)dy}{2Rx} ;$$

d'autre part $x = R + R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, le point étant sur Ox pour $\varphi = 0$, et à l'origine pour $\varphi = \pi$: on a donc $dx = -R\sin\varphi d\varphi$, $dy = R\cos\varphi d\varphi$, $xdy - ydx = R^2d\varphi + R^2\cos\varphi d\varphi$ et

$$xdx + ydy = -R^2\sin\varphi d\varphi.$$

L'expression de $d\mathfrak{T}$ devient alors

$$d\mathfrak{T} = R^2\frac{\sin\varphi(1 + \cos\varphi)^2 + \sin^3\varphi}{2(1 + \cos\varphi)}d\varphi = \frac{R^2}{2}\sin\varphi\frac{(1 + \cos\varphi)^2 + (1 - \cos^2\varphi)}{1 + \cos\varphi}d\varphi,$$

et enfin

$$d\mathfrak{T} = R^2\sin\varphi d\varphi.$$

Par conséquent, $\mathfrak{T} = -R^2\cos\varphi + C^{te}$, et, en prenant comme position initiale du mobile celle qui correspond à $\varphi = 0$,

$$\mathfrak{T} = R^2(1 - \cos\varphi).$$

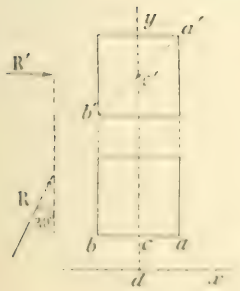
Pour $\varphi = 2\pi$, $\mathfrak{T} = 0$. Le travail total accompli sur le cercle entier est nul.

L'expression de $d\mathfrak{T}$ est facile à trouver : en effet, le vecteur MM′ a même valeur numérique que PM′, c'est-à-dire $R\sin\varphi$ et $ds = Rd\varphi$; donc, comme ici $d\mathfrak{T} = Fds$, on a

$$d\mathfrak{T} = R^2\sin\varphi d\varphi.$$

Bonnes solutions : MM. J. Dessirier ; J. Ottenheimer ; A. Rousseau ; J. Soulatges ; P. Vienney.
Assez bonne solution : M. A. Courtois.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE



1949 — *Un cube a une face de front et une face horizontale. Un hyperboloïde de révolution a pour axe l'axe vertical du cube, et pour l'axe de ses génératrices la droite (ab, a′b′), diagonale de la face antérieure.*

On considère le solide S limité par cet hyperboloïde et par les plans des deux faces horizontales du cube.

On représentera ce qui reste du solide S, quand on supprime la partie comprise à l'intérieur d'une sphère ayant pour centre le point (a, a′), et passant par le point (c, c′), centre de la face antérieure du cube.

On supposera que le solide ainsi obtenu est éclairé par des rayons horizontaux (R, R'), *dirigés conformément aux indications du croquis.*

Légende : dx, bord inférieur de la feuille ; dy, grand axe de la feuille ; dz = [illegible] ; $\omega\omega = 25$[illegible] ; $\omega a = 7$[illegible]

(*Ecole Polytechnique, concours de 1911.*)

La droite AB engendre un hyperboloïde de révolution dont le cercle de gorge a pour rayon la distance de l'axe vertical à cette droite ; on peut donc tracer immédiatement sa projection horizontale ωcd et en déduire les sommets d' et p' de l'hyperbole méridienne de front qui donne le contour apparent vertical de la surface. Cette hyperbole a pour asymptotes les projections verticales $b'a'$ et $b'_1a'_1$ des deux génératrices de front de l'hyperboloïde. On peut donc la construire par points ; nous rappellerons qu'un procédé assez avantageux consiste à déterminer les points d'intersection d'une série de parallèles à l'axe transverse avec les circonférences passant par les sommets de l'hyperbole et dont le centre est un point d'intersection de chaque parallèle avec l'axe non transverse.

Le contour apparent vertical de l'hyperboloïde se compose donc des deux arcs d'hyperbole limités aux deux parallèles $e'f'$ et $g'h'$ dont la projection verticale complète ce contour apparent.

Intersection. — La sphère se projette suivant les deux grands cercles ak et $a'k'$.

Pour obtenir l'intersection des deux surfaces on peut les couper soit par des sphères concentriques ayant leur centre en un point quelconque de l'axe de l'hyperboloïde, soit par des plans horizontaux qui donnent sur chaque surface des parallèles dont les points communs sont des points de la courbe cherchée. Ce dernier procédé donne ici les constructions les plus simples.

Points remarquables. — Nous commencerons par déterminer les points remarquables : nous avons d'abord en l, l' les points sur le parallèle supérieur qui limite l'hyperboloïde, puis en p, p' et c, c' les points situés sur le cercle de gorge, l'un d'eux p, p' étant en même temps sur le contour apparent vertical de l'hyperboloïde. On sait qu'en ce point la courbe va toucher l'hyperbole méridienne. La tangente en l, l' est la perpendiculaire au plan des normales en ce point à chaque surface. Nous avons déterminé la ligne de front $\sigma'\zeta'$ de ce plan et lui avons mené la perpendiculaire $l'\theta'$ qui est la tangente en l'. En projection horizontale, la tangente est manifestement $l\theta$ tangente au grand cercle al.

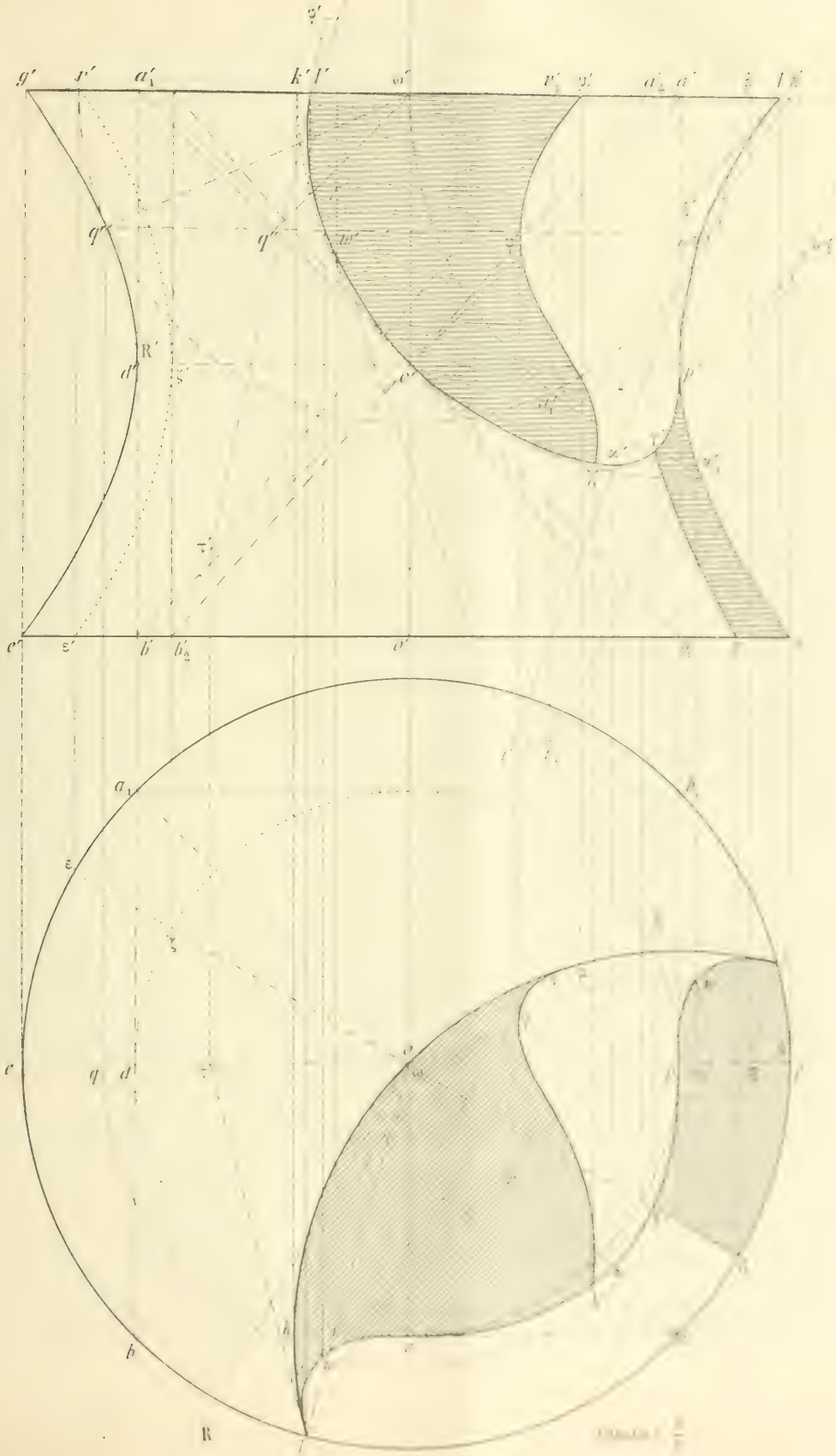
Remarquons maintenant que si nous employons les sphères auxiliaires qui ont pour centre le point ω, ω' situé sur le diamètre horizontal de la sphère, nous obtiendrons une sphère limite en menant une normale à l'hyperbole méridienne par le point ω', et pour cela il suffit d'abaisser de ω' la perpendiculaire $\omega'q''$ sur l'asymptote et de mener le parallèle $q''q'$ qui détermine le pied q' de la normale cherchée. La sphère de rayon $\omega'q'$ est inscrite à l'hyperboloïde le long de ce parallèle $q'q''$, dont l'intersection avec le petit cercle vertical de la sphère donnée, situé sur la sphère auxiliaire détermine deux points en chacun desquels la projection horizontale de ce petit cercle vertical sera la tangente à la courbe d'intersection. Pour avoir cette projection horizontale, nous pouvons amener la sphère a, a' par une rotation de 45° autour de l'axe de l'hyperboloïde, à avoir son centre en h, h' dans le plan de front de cet axe ; la longueur $a'_1v'_1$ donne le rayon du petit cercle dont la distance au centre de la sphère est $h'v'_1$. Il suffit donc de prendre $av = h'v'_1$ et de mener la perpendiculaire à ωa par le point v pour obtenir les deux points cherchés w en chacun desquels la tangente est la droite vw. On obtient les projections verticales de ces deux points sur le parallèle $q'q''$ par des lignes de rappel, et les tangentes en w' sont les tangentes à l'ellipse, projection verticale du petit cercle vw. Ces tangentes coupent le diamètre vertical V du petit cercle en un point T, qu'il est facile de déterminer par le rabattement de ce petit cercle en $v'_1z'_1$ sur le plan de front de son centre. On mène la tangente en w'_1 à ce rabattement, puis on prend le point t'_1 où elle coupe le diamètre vertical et l'on ramène ce point en t' par où passeront les tangentes cherchées $t'w'$.

Le point le plus bas de la courbe sera à l'intersection du grand cercle vertical $a\omega$ avec l'hyperbole méridienne qui est dans son plan. Il suffit, pour avoir ce point, d'amener le centre de la sphère en h, h' dans le plan de front de l'axe de l'hyperboloïde et de prendre le point α'_1 d'intersection de l'hyperbole avec la circonférence de rayon $h'\omega'$. On ramène ensuite ce point en α, α' par une rotation inverse. La tangente en α est la tangente au parallèle $\omega\alpha$.

La construction d'un point courant et de la tangente en ce point est identique à celle qui a donné le point l, l' et sa tangente.

Pour tracer la courbe il faut observer qu'elle est symétrique par rapport au plan vertical $A\omega$ et par suite sa projection horizontale est symétrique par rapport à ωa.

Ombre propre et ombre portée. — La ligne d'ombre propre sur le solide qui reste quand on a enlevé la sphère comprend les arcs de l'hyperbole méridienne dont le plan est perpendiculaire à la direction ωR des rayons lumineux. Ils se projettent horizontalement suivant deux droites $\gamma\delta$ et $\varepsilon\zeta$ et verticalement suivant les


g'
a'
k'
l'
q'
R'
d'
c'
b'
o'
a
c
q
d
b
R

arcs $\gamma'\delta'$ et $\varepsilon'\zeta'$ qui ont pour asymptotes les droites telles que $b'_2a'_2$, obtenues en faisant tourner les asymptotes de la méridienne de front d'un angle de 30° autour de l'axe.

L'ombre portée s'obtient en prenant l'intersection du cylindre horizontal dont les génératrices sont parallèles à R, R′ et qui a pour directrice cette courbe d'intersection, avec la surface creuse de la sphère qui limite intérieurement le solide. Il est dès lors évident que cette intersection sera symétrique de la courbe d'intersection des deux solides par rapport au plan méridien de la sphère qui est perpendiculaire à R, R′, soit $a\tau$. On construira donc l'arc $\lambda\nu\mu$, symétrique de λl par rapport à $a\tau$, et on en déduira par points la projection verticale $\lambda'\nu'\mu'$.

La tangente au point μ se confond avec la tangente au cercle contour apparent horizontal de la sphère. La tangente en μ' s'obtient en prenant le point τ, τ' où la tangente en l, l' perce le plan vertical de symétrie et en joignant $\tau\mu'$.

La ponctuation n'offre aucune difficulté.

Bonne épure de M. A. Boussiat, à Fourmies.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1911).

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*fin*).

8511. — Intersection de deux surfaces gauches de révolution à axe vertical dont l'une se déduit de l'autre par translation. Solution analytique.

8512. — Intersection de deux cylindres de révolution égaux dont les axes se coupent à angle droit. Ombre du système à 45°.

8513. — Intersection d'une sphère et d'un cylindre qui a pour base une ellipse dans le plan horizontal.

8514. — Intersection d'une frontale et d'un cône qui a pour base une section plane de paraboloïde de révolution à axe vertical.

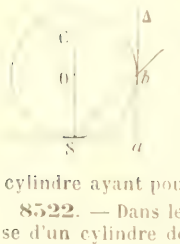
8515. — Intersection d'une sphère et d'un cylindre de révolution à axe quelconque.

8516. — Construire un point quelconque et la tangente en ce point de la courbe lieu des pieds des normales abaissées de tous les points d'une droite sur un cône de révolution à axe vertical.

8517. — Intersection d'un paraboloïde hyperbolique équilatère admettant les plans de projection pour plans directeurs et d'une sphère ayant pour centre le sommet du paraboloïde. Le paraboloïde est défini par son sommet et un point.

8518. — On considère le solide formé par un cône de révolution à axe vertical et une sphère dont le centre est sur une génératrice de front du cône. Trouver les ombres propre et portées sur les plans de projection.

8519. — Intersection d'un tore engendré par un cercle de front tournant autour d'une de ses tangentes Δ et d'un cône de révolution ayant pour contour apparent vertical Sa et SC, et pour axe Sb. Étude analytique.



8520. — Un cercle de front tourne autour d'un axe vertical situé dans le même plan de profil que le centre du cercle, et engendre une surface de révolution. On demande l'intersection de cette surface et d'un cône ayant pour base le cercle et pour sommet un point situé dans le plan horizontal du centre du cercle.

8521. — On donne une surface gauche de révolution à axe vertical, définie par une génératrice de front G, G′, qui rencontre le cercle de gorge au point a. Dans le plan de ce cercle on donne un cercle (γ) passant par le point a et le point diamétralement opposé du cercle de gorge, et on considère le cylindre ayant pour base le cercle (γ) et pour génératrice la droite (G, G′). Intersection des deux surfaces.

8522. — Dans le plan vertical de projection on donne une parabole à axe vertical, tangente à la ligne de terre. C'est la base d'un cylindre dont les génératrices sont de bout. On demande l'intersection de ce cylindre et d'un cône de révolution dont l'axe est dans le plan vertical et qui a pour génératrices l'axe de la parabole et la ligne de terre. Étude analytique.

8523. — Ombres portées par un cône de révolution à axe vertical sur un cylindre de révolution tangent au plan horizontal. Ombres portées par le système des deux corps sur le plan horizontal.

8524. — Construire le cône asymptote d'un hyperboloïde à une nappe défini par trois génératrices, dont l'une est verticale. On coupe la surface par un plan parallèle au plan asymptote vertical; la section est une parabole. Construire le sommet de la projection verticale.

8525. — Ombres au soleil d'un tore sur les plans de projection.

8526. — Intersection d'un cylindre de révolution et d'une surface gauche de révolution ayant leurs axes dans un même plan de front et admettant une génératrice commune de front.

8527. — Intersection d'un paraboloïde hyperbolique ayant pour plans directeurs les plans de projection et d'un cylindre de révolution, à axe vertical, ayant une génératrice verticale commune avec le paraboloïde. Équation de la projection verticale de l'intersection.

8528. — Contours apparents d'un hyperboloïde à une nappe défini par trois génératrices de même système. Incidemment, construire une conique connaissant trois tangentes et les points de contact. Déterminer le centre.

8529. — On donne un paraboloïde de révolution à axe vertical et un paraboloïde hyperbolique quelconque dont l'un des plans principaux est le plan de front qui contient l'axe du paraboloïde de révolution. On donne en outre la parabole principale horizontale du paraboloïde hyperbolique. Construire un point quelconque de l'intersection des deux surfaces. Quelle est la projection verticale de l'intersection ? Etude analytique.

8530. — Intersection d'un tore à axe vertical et d'une sphère dont le centre est dans le plan de front de l'axe du tore.

8531. — Intersection d'une droite et d'un ellipsoïde de révolution dont l'axe est vertical ou de bout.

8532. — Intersection d'une droite et d'un ellipsoïde quelconque dont les plans principaux sont l'un horizontal, un autre de front et le troisième de profil.

8533. — Intersection d'une sphère et d'une surface gauche de révolution dont l'axe passe par le centre de la sphère.

8534. — On considère un cylindre de révolution dont l'axe est horizontal ; on le limite à deux plans de profil et au plan méridien horizontal. On demande l'ombre à 45° de la gouttière ainsi formée.

8535. — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical et d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal, les deux surfaces ayant en commun deux génératrices de même système.

8536. — Intersection d'une sphère et d'un cône ayant pour base un cercle situé dans le plan horizontal dont la projection coïncide avec le contour apparent horizontal de la sphère.

8537. — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical et d'un cône de révolution ayant son sommet dans le plan du cercle de gorge et ses génératrices parallèles à celles de l'hyperboloïde.

8538. — On considère un paraboloïde hyperbolique équilatère ayant pour plans directeurs les plans de projection et défini par son sommet et un point. On le coupe par un plan parallèle à la ligne de terre, et on prend la section comme base d'un cône de sommet donné. Construire les contours apparents de ce cône.

8539. — Ombre d'un hémisphère creux.

8540. — Ombre de la niche.

8541. — Intersection de deux paraboloïdes hyperboliques ayant un plan directeur commun. Etude analytique. Examiner le cas particulier où les deux surfaces ont une génératrice horizontale commune.

8542. — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical et d'un tore engendré par le cercle de gorge tournant autour d'un axe de bout situé dans son plan.

VI. — Cinématique.

8543. — Etudier le mouvement d'un point sur une parabole sachant que le mouvement projeté sur l'axe est uniforme.

8544. — Trouver un mouvement circulaire où l'accélération totale est proportionnelle à la vitesse.

8545. — On donne un cercle, un point fixe A sur ce cercle, et on considère un point variable M qui décrit ce cercle d'un mouvement uniforme. Sur la tangente au point M on prend une longueur MP égale à l'arc AM et en sens contraire de cet arc. Etudier le mouvement du point P.

8546. — Deux droites tournent dans un même plan autour de deux points O et O_1 avec des vitesses angulaires constantes ω et ω_1. Etudier le mouvement du point d'intersection de ces droites.

8547. — Soient M et M_1 deux points mobiles ; à quelles conditions leurs vitesses et leurs accélérations sont-elles parallèles ?

8548. — Un point M se déplace dans un plan de façon que le rayon vecteur OM tourne autour du point O avec une vitesse angulaire constante. En outre, l'hodographe du mouvement relatif au point O est une parabole de foyer O. Déterminer le mouvement.

8549. — Etudier le mouvement d'un point sur un cercle sachant que l'accélération fait un angle constant avec la vitesse.

8550. — Déterminer le centre de courbure de la cycloïde en s'appuyant sur la composition des accélérations.

8551. — Un point se meut sur une hélice circulaire d'un mouvement uniforme ; calculer l'accélération. En déduire la normale principale et le rayon de courbure. Lieu du centre de courbure ; centre de courbure de ce lieu.

8552. — Soient M la position d'un mobile sur sa trajectoire à l'instant t, M sa position à l'instant $t + \Delta t$; on suppose qu'un mobile, placé en M à l'instant t, se déplace sur la tangente au point M d'un mouvement uniforme avec la vitesse du point M, et soit M_1 la position de ce mobile à l'instant $t + \Delta t$. Evaluer le vecteur MM_1 lorsque l'accélération totale du point M est égale à la limite du vecteur $\frac{2MM_1}{\Delta t^2}$.

8553. — On donne dans trois plans différents trois points qui se déplacent uniformément sur des cercles. Etudier le mouvement du centre de gravité de ces trois points.

VII. — Dynamique.

8554. — Etudier le mouvement d'un point pesant sur une parabole dont l'axe est vertical. Calcul de la réaction.

8555. — Lignes de force du champ défini par $X = y(y^2 - z^2)$, $Y = z(z^2 - x^2)$, $Z = x(x^2 - y^2)$.

8556. — Mouvement d'un point pesant sur une hélice à axe vertical.

8557. — Un mobile décrit la courbe $\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{p}$ suivant la loi des aires. Exprimer la force en fonction du rayon vecteur.

8558. — Mouvement d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de sa distance. La trajectoire peut-elle être un cercle ?

8559. — Etudier le mouvement d'un point pesant sur une cycloïde située dans un plan vertical.

8560. — On considère le champ de forces $X = 2x$, $Y = 2y - 1$, $Z = 0$. Trouver et construire les surfaces de niveau.

8561. — Un point pesant, assujetti à décrire une courbe située dans un plan vertical, se déplace de telle sorte que la composante verticale de la vitesse soit constante. Déterminer la courbe et la construire.

8562. — Etudier le champ de forces $X = k^2y$, $Y = k^2x$, $Z = k^2h$. Fonction des forces, surfaces de niveau, lignes de force.

8563. — On considère un cercle horizontal ; un anneau est mobile avec frottement sur ce cercle. On le lance avec une certaine vitesse, et on demande quand il s'arrêtera.

8564. — Un corps est lancé de bas en haut avec une vitesse v_0 : il retombe et rebondit avec une vitesse $\frac{v_0}{2}$ et ainsi de suite. Montrer qu'au bout d'un temps fini le mobile s'arrête.

8565. — On donne un cercle dans un plan vertical, et on désigne par AA′ le diamètre vertical, A étant le point le plus haut et A′ le plus bas. On joint le point A à un point B du cercle, et sur la droite AB on laisse glisser un point pesant abandonné en A sans vitesse initiale. Arrivé en B le point se réfléchit sur le cercle et décrit alors une parabole. Cette parabole peut-elle passer par le point A′ ?

8566. — Etudier le mouvement d'un point matériel pesant qu'on laisse tomber sans vitesse initiale et qui est soumis à la résistance du milieu égale à $\frac{2mvl}{r^2}$, m étant la masse du point et v la vitesse.

8567. — On demande les relations qui existent dans un mouvement à accélération centrale entre l'hodographe et la trajectoire.

8568. — Calculer le travail élémentaire d'une force dans un mouvement de rotation.

8569. — Un point est assujetti à décrire une ellipse sans frottement : il est attiré par l'un des foyers en raison inverse du carré de la distance. Calculer la réaction de l'ellipse.

8570. — Etudier le mouvement parabolique des comètes.

8571. — Un point pesant est mobile avec frottement sur un cercle horizontal. On le lance avec une certaine vitesse initiale. Trouver la relation entre la vitesse et l'espace.

8572. — Etudier le champ de forces $X = -\frac{2y}{r^2} - \frac{2p}{r^2}$, $Y = \frac{2x}{r^2}$, $Z = 0$. Surfaces de niveau.

8573. — Etudier le champ de forces $X = \frac{2y}{r^2} + \frac{2p}{r^2}$, $Y = -\frac{2x}{r^2}$, $Z = 0$. Surfaces de niveau.

8574. — Un point mobile M décrit un cercle sous l'action d'une force centrale émanée d'un point O du cercle. Calculer la valeur de cette force en fonction du rayon vecteur $OM = r$.

8575. — On donne une ellipse dont l'un des axes est vertical et l'autre horizontal, et on considère un point pesant assujetti à décrire cette ellipse. On lance ce point à partir d'un des sommets de l'axe horizontal. Etudier le mouvement. On suppose que le point peut quitter l'ellipse vers l'intérieur. En quel point la quittera-t-il ?

8576. — On suppose que les surfaces $x^2 - 2xy - y^2 = k$ sont surfaces de niveau d'un champ de forces. Trouver la loi des forces.

8577. — Un point décrit la courbe $x^4 + y^4 - a^2xy = 0$ suivant la loi des aires. Exprimer la force en fonction du rayon vecteur.

VIII. — Statique.

8578. — On considère un tétraèdre SABC, et on envisage l'ensemble des vecteurs SA, SB, SC, BC, CA, AB. Quelle est la signification géométrique des invariants de ce système ?

8579. — On donne un triangle ABC et deux forces P, P′ sur BC, deux forces Q, Q′ sur CA, enfin deux forces R, R′ sur AB. Conditions pour les résultantes des deux systèmes (P, Q, R) et (P′, Q′, R′) soient parallèles.

8580. — Etant donné un système de forces et un couple, peut-on trouver une force qui constitue avec le couple un système équivalent au système donné ? Quelle condition doit remplir l'axe du couple ?

8581. — Réduire un système de forces à deux dont l'une soit placée sur une droite donnée.

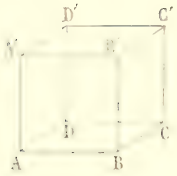
8582. — Etant donnée une force située dans le plan d'un triangle, décomposer cette force en trois forces ayant pour supports les côtés du triangle.

8583. — Condition d'équilibre des quatre forces AB, BC, CD, DA.

8584. — Réduire un système de forces à deux passant par deux points donnés. Condition de possibilité. Solutions géométrique et analytique.

8585. — Réduire un système de forces à deux forces égales dont l'une est appliquée en un point donné. Trouver la surface engendrée par le support de cette dernière.

8586. — On donne un cube ABCDA′B′C′D′. On demande de faire la réduction des forces représentées par les vecteurs A′B′, BC et D′D.



8587. — Une barre pesante OA est mobile autour de son extrémité O. Au milieu C de cette barre est attaché un fil qui passe sur une poulie B située sur la verticale du point O et supporte un poids P. Déterminer ce poids pour que la barre OA soit en équilibre dans la position horizontale, ou dans la position qui fait un angle θ avec l'horizontale.

8588. — Un point pesant M est assujetti à se déplacer sur une horizontale avec frottement. Il est attaché par un fil élastique à un point O de la droite. Position d'équilibre, sachant que la tension du fil est proportionnelle à son allongement.

8589. — On considère deux barres pesantes OA et AB articulées au point A. Le point O est fixe et le point B est assujetti à se déplacer sans frottement sur une horizontale Δ située dans un même plan vertical avec le point O et au-dessous de ce point. Etudier les positions d'équilibre du système.

8590. — On donne un cercle vertical et un point M pesant assujetti à rester sur ce cercle. Ce point est repoussé proportionnellement à la distance par un centre fixe placé à l'une des extrémités du diamètre horizontal. Déterminer les positions d'équilibre du point M.

8591. — On donne une tige pesante AB et un cercle de centre A et situé dans le plan de la tige. Un point pesant M décrit le cercle d'un mouvement uniforme. Etudier comment varie le centre de gravité du système formé par la tige et le point M.

8592. — Centres de gravité d'une calotte sphérique, de la surface d'un paraboloïde de révolution limitée à un plan perpendiculaire à l'axe.

8593. — Centre de gravité de l'aire d'une boucle de la courbe $\rho^2 = a^2 \cos 2\omega$.

QUESTIONS PROPOSÉES

2000. — On donne dans le plan les deux points fixes O et A. A tout point M on fait correspondre le point M_1 intersection de AM et de la droite symétrique de OA par rapport à OM. M décrivant une ligne (C), M_1 décrit une ligne (C_1).

1° Démontrer que les tangentes à ces deux lignes, en deux points correspondants se coupent sur la perpendiculaire à OM_1 au point O.

2° Lorsque C est une droite Δ, C_1 est une conique de foyer O et passant par A. Quelle est la directrice associée au foyer O ?

3° L'enveloppe des droites Δ pour lesquelles C_1 est une parabole est le cercle de centre A passant par O.

M. [illegible]

2001. — Un faisceau de lumière parallèle, monochromatique, de *petite* section, venu d'un point lumineux très éloigné, tombe et se réfléchit sous un angle de 60° sur un miroir sphérique M de rayon R, puis rencontre un *petit* prisme P dont la section principale se confond avec le plan d'incidence moyen en M.

1° En supposant la distance MP notablement supérieure à R, étudier la forme du faisceau entre les points M et P, puis au delà du prisme.

2° En supposant la distance MP peu supérieure à R, quelle incidence faut-il donner sur le prisme pour que l'image obtenue sur le faisceau émergent soit aussi nette que possible ?

Angle du prisme. $\alpha = 45°$. Indice du prisme. $n = \sqrt{2}$.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1933. — *On considère un cercle de rayon* R *et un diamètre fixe* AA'. *Sur ce diamètre on prend un point mobile* P *tel que si on le joint à un point* M *du cercle le triangle* AMP *soit isocèle.* MP' = MA. *En* A *on mène la tangente au cercle et l'on projette* M *en* M' *sur cette tangente.*

1° *Construire et rectifier l'enveloppe de* M'P.

2° *Construire l'enveloppe de la perpendiculaire élevée au milieu de* M'P *et calculer l'aire comprise par la courbe.*

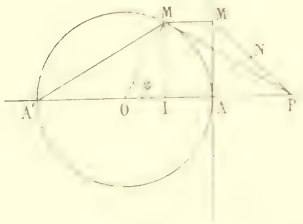
3° *Lieu du centre du cercle circonscrit et du point de concours des hauteurs du triangle* M'MP.

4° *Enveloppe de la hauteur abaissée de* M' *sur* MP.

5° *Enveloppe de la hauteur abaissée de* M *sur* M'P. *Construire et rectifier le développée de cette enveloppe.*

6° *On considère les ellipses ayant trois sommets en* A, M *et* P. *Lieu des points de rebroussement des développées de ces ellipses.*

1° *Enveloppe de* M'P. — Prenons pour axes le diamètre A'A et la tangente AM' et pour paramètre variable l'angle $AOM = \varphi$. On a $AM = IM = R \sin \varphi$. $AP = AP - 2R = 2AI - 2R = 2R \cos \varphi$.



L'équation de M'P est donc

$$(1) \qquad \frac{x}{2R\cos\varphi} + \frac{y}{R\sin\varphi} = 1 \quad \text{ou} \quad x\sin\varphi + 2y\cos\varphi = R\sin 2\varphi.$$

La dérivée est

$$(2) \qquad x\cos\varphi - 2y\sin\varphi = 2R\cos 2\varphi.$$

Il suffit d'éliminer φ entre (1) et (2). Calculons x et y en fonction de φ.

On a $$x = \frac{-2R\sin\varphi\sin 2\varphi + 4R\cos\varphi\cos 2\varphi}{-2\sin^2\varphi - 2\cos^2\varphi} = 2R\cos^3\varphi.$$

De même,

$$y = \frac{2R\sin\varphi\cos 2\varphi - R\cos\varphi\sin 2\varphi}{-2\sin^2\varphi - 2\cos^2\varphi} = \frac{R\sin\varphi\cos 2\varphi - R\sin\varphi}{-2} = \frac{R}{2}\sin\varphi(1 - \cos 2\varphi) = R\sin^3\varphi.$$

On en tire $\sin\varphi = \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{1}{3}}$ et $\cos\varphi = \left(\frac{x}{2R}\right)^{\frac{1}{3}}$. L'équation du lieu est donc

$$\left(\frac{x}{2R}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

c'est la développée d'une ellipse (*).

L'équation de la développée est $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$. On a donc $\frac{a^2}{b} = 2R$ et $\frac{b^2}{a} = R$,

car il est facile de voir que le grand axe de l'ellipse est sur l'axe des y.

De plus, on a ici $b^2 = a^2 - c^2$. On en tire $b = \frac{4R}{3}$ et $c = \frac{2R}{3}$.

La construction de cette courbe étant classique, nous ne nous y arrêterons pas.

Rectification. — Nous avons $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

Or $$dx = -6R\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi \quad \text{et} \quad dy = 3R\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi,$$

d'où $$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (3R\sin\varphi\cos\varphi)^2(1 + 3\cos^2\varphi)\,d\varphi^2$$

et $$ds = \pm 3R\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1 + 3\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

La courbe étant symétrique par rapport aux deux axes, il suffit de faire varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et de multiplier le résultat par 4.

On a $$s = \pm 3R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1 + 3\cos^2\varphi}\,d\varphi = \pm 3R\left[-\frac{1}{9}(1 + 3\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$s = \pm\frac{R}{3}\left[-1 + (1 + 3)^{\frac{3}{2}}\right] = \pm\frac{R}{3}(-1 + 8) = \frac{7}{3}R,$$

car l'arc est essentiellement positif.

La longueur totale de la courbe est $\frac{7}{3}R \times 4 = \frac{28}{3}R$.

Remarque. — Si par le même procédé on cherche l'enveloppe de MP, on trouve une hypocycloïde à trois rebroussements tangente extérieurement au cercle donné.

(*) C'est ce qu'on voit géométriquement en remarquant que le quatrième sommet du rectangle qui a pour sommets P, A, M' décrit une ellipse dont les axes sont AP, AM' et ont pour demi-longueurs 2R et R.

2° *Enveloppe de la perpendiculaire élevée au milieu* N *de* MP. — Les coordonnées de N milieu de MP sont $x = R\cos\varphi$ et $y = \frac{R}{2}\sin\varphi$. L'équation de MP est déjà connue,

$$x\sin\varphi - 2y\cos\varphi = R\sin 2\varphi.$$

L'équation de la perpendiculaire en N est donc

$$2\cos\varphi(x - R\cos\varphi) - \sin\varphi\left(y - \frac{R}{2}\sin\varphi\right) = 0.$$

ou $$2x\cos\varphi - y\sin\varphi = 2R\cos^2\varphi - \frac{R}{2}\sin^2\varphi = \frac{5R}{2}\cos^2\varphi - \frac{R}{2} = \frac{5R}{4}\cos 2\varphi + \frac{3R}{4}.$$

ou

(3) $$8x\cos\varphi - 4y\sin\varphi = 5R\cos 2\varphi + 3R.$$

La dérivée est

(4) $$4x\sin\varphi + 2y\cos\varphi = 5R\sin 2\varphi.$$

Les équations (3) et (4) donnent les valeurs de x et de y : on trouve d'abord

$$8x = 5R(2\sin\varphi\sin 2\varphi + \cos\varphi\cos 2\varphi) + 3R\cos\varphi = 5R(\cos\varphi + \sin\varphi\sin 2\varphi) + 3R\cos\varphi,$$

et enfin $$x = \frac{R\cos\varphi}{4}(4 + 5\sin^2\varphi);$$

de là et de la première équation, on déduit facilement y, $y = \frac{R\sin\varphi}{2}(1 + 5\cos^2\varphi)$.

Les équations paramétriques de la courbe enveloppe sont donc

$$x = \frac{R\cos\varphi}{4}(4 + 5\sin^2\varphi), \qquad y = \frac{R\sin\varphi}{2}(1 + 5\cos^2\varphi),$$

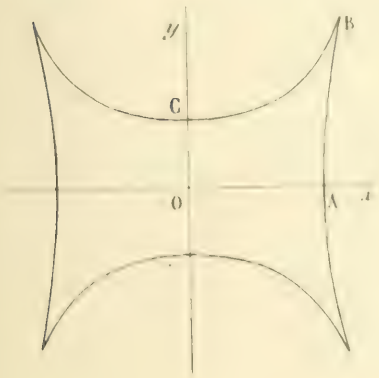
et l'on a

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{3R}{4}\sin\varphi(5\cos^2\varphi - 3), \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{3R}{2}\cos\varphi(5\cos^2\varphi - 3), \qquad \frac{dy}{dx} = 2\operatorname{cotg}\varphi.$$

Les deux changements de φ en $-\varphi$ et de φ en $\pi - \varphi$ manifestent une double symétrie, la symétrie de la courbe par rapport à chacun des axes. Il suffit donc de faire varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Pour l'angle α tel que $\cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$ ou $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$ ou $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$, x et y changent de signe simultanément; elles passent du positif au négatif. Pour $\varphi = 0$, $x = R$, $y = 0$; pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $y = \frac{R}{2}$. La courbe est dès lors aisée à construire, surtout en tenant compte du coefficient angulaire de la tangente, $p = \frac{dy}{dx} = 2\operatorname{cotg}\varphi$.

Calcul de l'aire. — La différentielle de l'aire est $dA = \frac{x\,dy - y\,dx}{2}$.



$$dA = \frac{3R^2}{16}(5\cos^2\varphi - 3)(4\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{3R^2}{32}(5\cos 2\varphi - 1)\frac{(5\cos 2\varphi + 3)}{2}d\varphi$$

ou enfin $$dA = \frac{3R^2}{64}\left(\frac{25}{2} - \frac{25}{2}\cos 4\varphi - 10\cos 2\varphi - 3\right)d\varphi.$$

L'intégration est immédiate et donne

$$A = \frac{3R^2}{64}\left(\frac{19}{2}\varphi - \frac{25}{8}\sin 4\varphi - 5\sin 2\varphi\right) + C.$$

Il n'y a plus qu'à prendre cette intégrale de 0 à 2π, et l'on a sous

$$A = \frac{57\pi R^2}{64}.$$

3. *Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* MM'P. Il est au point de concours de la perpendiculaire à M'P élevée en N, et dont l'équation est

$$8x\cos\varphi - 4y\sin\varphi = 5R\cos 2\varphi + 3R,$$

avec la perpendiculaire élevée au milieu de MM', dont l'équation est

$$(5)\qquad x = \frac{MM'}{2} = -\frac{1}{2}(R - R\cos\varphi) = \frac{R}{2}(\cos\varphi - 1).$$

Il suffit d'éliminer φ entre ces deux équations. De (5) on tire $\cos\varphi = \frac{2x+R}{R}$, et alors l'équation (3) donne

$$\sin\varphi = \frac{1}{4y}\left[8x\,.\,\frac{2x+R}{R} - 5R\left(2\,\frac{(2x+R)^2}{R^2} - 1\right) - 3R\right]$$

$$= \frac{1}{4y}\left[\frac{8x}{R}(2x+R) - 5\left(\frac{8x^2+8Rx+R^2}{R}\right) - 3R\right]$$

$$= \frac{1}{4Ry}(16x^2+8Rx-40x^2-40Rx-8R^2) = -\frac{2}{Ry}(3x^2+4Rx+R^2).$$

L'équation est donc $\qquad \frac{4}{R^2y^2}(3x^2+4Rx+R^2)^2 + \frac{(2x+R)^2}{R^2} = 1.$

On en tire $\qquad y = \frac{-(3x+R)^2(x+R)}{x}.$

C'est une courbe du genre strophoïde admettant l'axe des y comme asymptote et coupant l'axe des x aux points $x = -R$ et $x = -\frac{R}{3}$. La construction complète ne présente aucune difficulté.

Lieu de l'orthocentre du triangle MM'P. — Transportons l'origine en A' (fig. 1). L'équation de la perpendiculaire abaissée de P sur MM' est $x = 2R(1-\cos\varphi)$.

Les coordonnées de M sont $x = R\sin\varphi$ et $y = 2R$. Celles de M' sont

$$x = R(1-\cos\varphi) \quad \text{et} \quad y = R\sin\varphi$$

L'équation de MP est $\qquad \frac{x - 2R(1-\cos\varphi)}{R(1-\cos\varphi) - 2R(1-\cos\varphi)} = \frac{y}{R\sin\varphi}.$

ou $\qquad x\sin\varphi + y(1-\cos\varphi) = 2R(1-\cos\varphi).$

L'équation de la perpendiculaire abaissée de M' sur MP est

$$(1-\cos\varphi)(x - 2R) - \sin\varphi(y - R\sin\varphi) = 0,$$

ou

$$(6)\qquad x(1-\cos\varphi) - y\sin\varphi = 2R(1-\cos\varphi) - R\sin^2\varphi = R(1-\cos\varphi)^2.$$

De l'équation $x = 2R(1-\cos\varphi)$, on tire $\cos\varphi = \frac{x-2R}{2R}$, et la précédente devient

$$\frac{x^2}{2R} - y\sin\varphi = R\,.\,\frac{x^2}{4R^2} = \frac{x^2}{4R}, \qquad \text{d'où} \qquad \sin\varphi = \frac{x^2}{4Ry}.$$

L'équation du lieu est $\qquad \left(\frac{x-2R}{2R}\right)^2 + \frac{x^4}{16R^2y^2} = 1.$

On en tire $(2y)^2 = \frac{x^4}{4R-x}$. Si l'on compare avec l'équation de la cissoïde $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, on voit que la courbe lieu de l'orthocentre dérive de la cissoïde relative au cercle de diamètre 4R par réduction des ordonnées à la moitié de leur valeur. Cette remarque suffit pour construire la courbe.

4° *Enveloppe de la hauteur abaissée de* M' *sur* MP. — L'équation de cette perpendiculaire est

$$(6)\qquad x(1+\cos\varphi) - y\sin\varphi = R(1+\cos\varphi)^2;$$

sa dérivée est $\qquad x\sin\varphi + y\cos\varphi = 2R\sin\varphi(1+\cos\varphi).$

On en tire

$$x = \frac{R[(1+\cos\varphi)^2\cos\varphi - 2\sin^2\varphi(1+\cos\varphi)]}{1+\cos\varphi} = R(2+\cos\varphi-\cos^2\varphi) = R(1+\cos\varphi)(2-\cos\varphi),$$

$$y = \frac{2R(1+\cos\varphi)^2\sin\varphi - R\sin\varphi(1+\cos\varphi)^2}{1+\cos\varphi} = R\sin\varphi(1+\cos\varphi).$$

Les dérivées sont

$$\frac{dx}{d\varphi} = R(-\sin\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi) = R\sin\varphi(2\cos\varphi - 1),$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = R\cos\varphi(1+\cos\varphi) - R\sin^2\varphi = R(1+\cos\varphi)(2\cos\varphi - 1).$$

On en tire

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}.$$

Ces dérivées s'annulent pour $\varphi = 0$ et π, et $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, d'où $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

La courbe est symétrique par rapport à l'axe des x, car x ne change pas en changeant φ en $-\varphi$ et y change de signe. On a donc le tableau ci-contre qui permet de construire facilement la courbe. On obtient la figure 3. C'est une hypocycloïde à trois rebroussements. Il est d'ailleurs facile d'identifier les deux courbes.

φ	$\frac{dx}{d\varphi}$	$\frac{dy}{d\varphi}$	$\frac{dy}{dx}$	x	y
	0		∞	2R	0
0		+			
	+		+		
$\frac{\pi}{3}$	0	0	$\sqrt{3}$	$\frac{9R}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}R$
$\frac{\pi}{2}$	—	—	+	2R	R
π	0	0	0	0	0

Soit (*fig.* 4) un point D de l'hypocycloïde. Prenons l'origine en S. Les coordonnées de D sont

$$x = 2r\cos\varphi + r\cos(2\pi - 2\varphi) = 2r\cos\varphi + r\cos 2\varphi,$$
$$x = r(2\cos^2\varphi + 2\cos\varphi - 1),$$
$$\text{et} \quad y = 2r\sin\varphi + r\sin(2\pi - 2\varphi) = 2r\sin\varphi(1-\cos\varphi).$$

Or transportons l'axe des y de A en S avec $AS = \frac{3R}{2}$ (*fig.* 3); on a $X = x - \frac{3R}{2}$, d'où

$$X = R\left(2+\cos\varphi-\cos^2\varphi-\frac{3}{2}\right) = R\left(\frac{1}{2}+\cos\varphi-\cos^2\varphi\right) = \frac{R}{2}(1+2\cos\varphi-2\cos^2\varphi),$$

$$Y = y = R\sin\varphi(1-\cos\varphi).$$

Faisons $R = 2r$ et changeons φ en $\pi - \varphi$, ce qui revient à changer le sens de l'axe des x, on a

$$X = r(1-2\cos\varphi-2\cos^2\varphi)$$
$$= -r(2\cos^2\varphi+2\cos\varphi-1)$$

et

$$Y = 2r\sin\varphi(1-\cos\varphi).$$

Les deux courbes sont donc identiques.

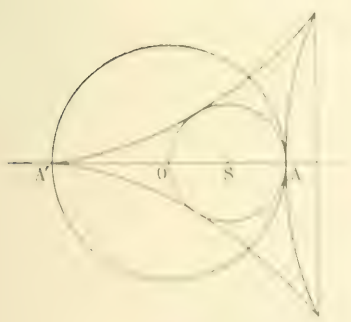


Fig. 3.

Fig. 4.

5° *Enveloppe de la hauteur abaissée de* M *sur* MP. — Prenons l'origine en O. L'équation de MP est $\frac{x - R(1+2\cos\varphi)}{R - R(1+2\cos\varphi)} = \frac{y}{R\sin\varphi}$, d'où $x\sin\varphi + y\cos\varphi = R(1+2\cos\varphi)$.

Les coordonnées de M sont $x = R\cos\varphi$ et $y = R\sin\varphi$. L'équation de la perpendiculaire abaissée de M sur M'P est donc

$$2\cos\varphi(x - R\cos\varphi) + \sin\varphi(y - R\sin\varphi) = 0,$$

ou

$$2x\cos\varphi + y\sin\varphi = 2R\cos^2\varphi + R\sin^2\varphi = R(3\cos^2\varphi - 1).$$

La dérivée est

$$2x\sin\varphi + y\cos\varphi = 6R\sin\varphi\cos\varphi.$$

On en tire

$$x = \frac{R\cos\varphi(3\cos^2\varphi - 1) + 6R\sin^2\varphi\cos\varphi}{2\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi} = \frac{R}{2}\cos\varphi(5 - 3\cos^2\varphi),$$

$$y = \frac{-2R\sin\varphi(3\cos^2\varphi - 1) + 12R\sin\varphi\cos^2\varphi}{2\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi} = R\sin\varphi(3\cos^2\varphi - 1).$$

Prenons les dérivées :

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{R}{2}(-5\sin\varphi + 9\cos^2\varphi\sin\varphi) = \frac{R}{2}\sin\varphi(9\cos^2\varphi - 5),$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = R\cos\varphi(3\cos^2\varphi - 1) + 6\sin^2\varphi\cos\varphi = R\cos\varphi(9\cos^2\varphi - 5).$$

Il est facile de voir que la courbe est symétrique par rapport aux deux axes. Il suffit donc de faire varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Or les dérivées s'annulent pour $\cos\varphi = \pm\sqrt{\frac{5}{9}}$, soit α la valeur de φ.

On a donc le tableau suivant. Il donne la courbe de la figure 5.

φ	$\frac{dx}{d\varphi}$	$\frac{dy}{d\varphi}$	$\frac{dy}{dx}$	x	y
0	0		$-\infty$	R	0
		+			
α	0	0	+	1.242 R	$\frac{10}{9}$ R
$\frac{\pi}{3}$	−	−	+	$\frac{17}{16}$ R	$\frac{7}{8}\sqrt{3}$R
$\frac{\pi}{2}$	−	0	0	0	R

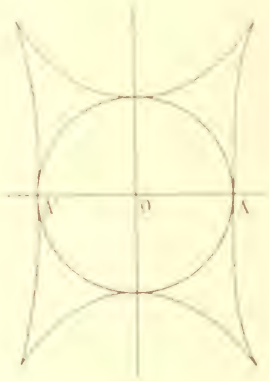


Fig. 5.

Développée. — Calculons le rayon de courbure :

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = \frac{R}{2}\cos\varphi(27\cos^2\varphi - 23), \qquad \frac{d^2y}{d\varphi^2} = -R\sin\varphi(27\cos^2\varphi - 5),$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{R^2}{4}(9\cos^2\varphi - 5)^2(1 - 3\cos^2\varphi)d\varphi^2,$$

d'où

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = -\frac{R}{4}(9\cos^2\varphi - 5)(1 - 3\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}.$$

Les coordonnées d'un point de la développée sont $X = x - \rho\frac{dy}{ds}$ et $Y = y + \rho\frac{dx}{ds}$.

Elles deviennent, calculs faits, $X = \frac{9R}{2}\cos^3\varphi(3\cos^2\varphi - 1)$, $Y = \frac{9R}{4}\sin^3\varphi(4 - 3\sin^2\varphi)$.

On en tire $\frac{dX}{d\varphi} = \frac{27R}{2}\sin\varphi\cos^2\varphi(1 - 5\cos^2\varphi)$, $\frac{dY}{d\varphi} = -\frac{27R}{4}\sin^2\varphi\cos\varphi(1 - 5\cos^2\varphi)$.

La courbe est symétrique par rapport aux deux axes. Pour l'étudier, il suffit de faire varier φ de 0 à

φ	$\frac{dX}{d\varphi}$	$\frac{dY}{d\varphi}$	$\frac{dY}{dX}$	X	Y
0	0	0	-0	9R	0
$\frac{\pi}{4}$	$-$	$+$	$-$	0,75...R	2R
β	$-$	$+$	$-$	0	$\sqrt{6}.R$
$\frac{\pi}{3}$				$-\frac{9}{64}$ R	2,55..R
γ	0	0	$-$	$-0,16$R	2,576.R
	$+$	$-$			
$\frac{\pi}{2}$	0	0	$-\infty$	0	$\frac{9R}{4}$

$\frac{\pi}{2}$. Or X s'annule pour $\cos\varphi = 0$, d'où $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et pour $\cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, d'où $\varphi = \beta$. Y ne s'annule que pour $\varphi = 0$.

Les dérivées s'annulent pour $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{5}}$, d'où $\varphi = \gamma$.

On peut donc dresser le tableau ci-contre. Il permet de construire la branche LUNT (fig. 6). On achève la courbe par symétrie.

Rectification. — On a $dS^2 = dX^2 + dY^2$

$$= \left[\frac{27R}{4}\sin\varphi\cos\varphi(1-5\cos^2\varphi)\right]^2 (1+3\cos^2\varphi)\,d\varphi^2,$$

d'où
$$dS = \pm\frac{27R}{4}(1-5\cos^2\varphi)\sin\varphi\cos\varphi(1+3\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\,d\varphi.$$

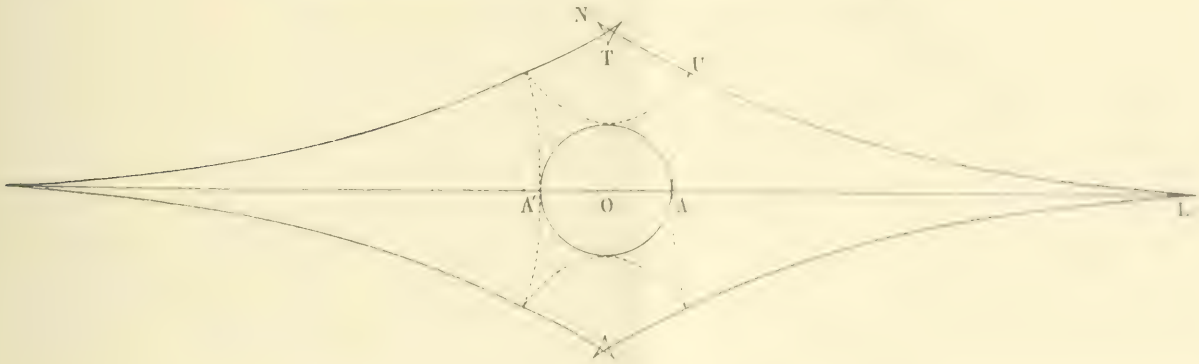


Fig. 6

Calculons d'abord les intégrales indéfinies

$$I_1 = (1+3\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi, \qquad \text{et} \qquad I_2 = (1+3\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi.$$

La première est immédiate et donne, en négligeant les constantes, $I_1 = -\frac{1}{9}(1+3\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}$.

La seconde s'intègre par parties en posant $u = \cos^2\varphi$ et $dv = (1+3\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$.

On a
$$I_2 = -\frac{\cos^2\varphi}{9}(1+3\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9}\int(1+3\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$
$$= -\frac{\cos^2\varphi}{9}(1+3\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9\times 15}(1+3\cos^2\varphi)^{\frac{5}{2}}.$$

Alors l'intégrale indéfinie est, en négligeant les constantes,

$$I = \pm\frac{27R}{4}\left[-\frac{1}{9}(1+3\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}} + \frac{5\cos^2\varphi}{9}(1+3\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{27}(1+3\cos^2\varphi)^{\frac{5}{2}}\right]$$
$$= \pm\frac{R}{4}\left[3(1+3\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}(5\cos^2\varphi-1) - 2(1+3\cos^2\varphi)^{\frac{5}{2}}\right].$$

Cherchons les limites. Lorsque le point (X, Y) parcourt l'arc LUN, l'angle φ varie de 0 à

et $\cos^2\varphi$ varie de 1 à $\frac{1}{5}$. On a donc

$$\text{arc LUN} = -\frac{R}{4}\left[3(1-3\cos^2\varphi)^{\frac{2}{3}}(5\cos^2\varphi-1)-2(1-3\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\right]_{\cos^2\varphi=1}^{\cos^2\varphi=\frac{1}{5}} = R\left(8-\frac{64}{25}\sqrt{\frac{2}{5}}\right).$$

Pour avoir l'arc NT il faut faire varier φ de γ à $\frac{\pi}{2}$ ou $\cos^2\varphi$ de $\frac{1}{5}$ à 0. On a donc

$$\text{arc NT} = -\frac{R}{4}\left[3(1-3\cos^2\varphi)^{\frac{2}{3}}(5\cos^2\varphi-1)-2(1-3\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\right]_{\cos^2\varphi=\frac{1}{5}}^{\cos^2\varphi=0} = R\left(\frac{64}{25}\sqrt{\frac{2}{5}}-\frac{5}{4}\right).$$

La longueur de la partie LUNT est donc

$$R\left[8-2\left(\frac{64}{25}\sqrt{\frac{2}{5}}-\frac{5}{4}\right)\right] = \left(\frac{27}{4}-\frac{128}{125}\sqrt{10}\right)R.$$

La courbe totale est quatre fois plus grande, ou $\left(27+\frac{512}{125}\sqrt{10}\right)R$.

6° *Lieu des points de rebroussement des développées des ellipses ayant pour sommets* A, M *et* P. — Les ellipses dont les sommets sont A′, P, M et le symétrique M_1 de M par rapport à A′P ont respectivement pour demi-axes $R(1+\cos\varphi)$ et $R\sin\varphi$. Les points de rebroussement situés sur A′P admettent le diamètre A′A comme lieu ; il suffit de trouver le lieu des points de rebroussement situés sur MM_1.

Or, l'équation de la développée de l'ellipse est $\left(\frac{x}{\frac{c^2}{a}}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{\frac{c^2}{b}}\right)^{\frac{2}{3}}=1$. L'ordonnée du point de rebroussement situé sur MM_1 est donc $y=\pm\frac{c^2}{b}$. Ne prenons que le signe positif, car le lieu du second point est symétrique du premier par rapport à AA′.

Or $$c^2=a^2-b^2=R^2(1+\cos\varphi)^2-R^2\sin^2\varphi=2R^2\cos\varphi(1+\cos\varphi).$$

Par suite $$y=\frac{c^2}{b}=\frac{2R^2\cos\varphi(1+\cos\varphi)}{R\sin\varphi}=2R\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}(1+\cos\varphi).$$ Les équations paramétriques du point de rebroussement sont donc $x=R\cos\varphi$ et $y=\frac{2R\cos\varphi}{\sin\varphi}(1+\cos\varphi)$ en prenant l'origine en O. On en tire $\cos\varphi=\frac{x}{R}$ et $\sin\varphi=\frac{2x}{y}\left(1+\frac{x}{R}\right)=\frac{2x(R+x)}{Ry}$.

L'équation du lieu est donc $$\left(\frac{x}{R}\right)^2+\left[\frac{2x(R+x)}{Ry}\right]^2=1 \quad \text{ou} \quad (R^2-x^2)y^2=4x^2(R+x)^2,$$

d'où $$y=\frac{4x^2(R+x)^2}{R^2-x^2}=\frac{4x^2(R+x)}{R-x}.$$

On peut encore l'écrire

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2=\frac{x^2(R+x)}{R-x}. \tag{7}$$

Si l'on compare avec l'équation de la strophoïde $y^2=\frac{x^2(a-x)}{a+x}$, on voit que la courbe précédente dérive de la strophoïde par un changement dans le sens de l'axe des x et en doublant les ordonnées correspondantes.

Lorsque le point P pénètre dans l'intérieur du cercle de centre O, la ligne A′P devient le petit axe de l'ellipse, et la valeur de c trouvée plus haut change de signe ; mais en élevant au carré on retrouve l'équation (7).

R. MANEN, école Sainte-Marie, Albi.

Bonnes solutions : MM. H. Frobert, à Vichy ; L. Simon, à Fourmies, G. Lacu, à Rodez, A. Rousseau, à Fournes-en-Weppe ; A. Marescalchi, J. Ottenheimer ; L. Perlin, à Trévoux.

PHYSIQUE

1946. — *Pour déterminer l'indice n d'un prisme solide de très petit angle ε, on dispose d'une lunette autocollimatrice à oculaire micrométrique mise au point sur l'infini et avec laquelle on fait les deux opérations suivantes :*

1° Ayant pointé sur un point éloigné, on place le prisme devant la lunette de façon que ses faces soient à peu près normales à l'axe de la lunette ; l'image paraît déplacée parallèlement au mouvement du réticule et il faut tourner le tambour de $a = 87$ divisions pour remettre le réticule sur l'image.

2° Ayant éclairé le réticule, on en voit deux images produites par réflexion sur le prisme ; le réticule ayant été amené en coïncidence avec l'une d'elles, il faut, pour l'amener en coïncidence avec l'autre, tourner le tambour de $b = 237$ divisions.

Expliquer les effets observés et calculer l'indice.

Le premier déplacement du réticule mesure la déviation produite par le prisme. Or l'angle de ce prisme est petit, ainsi que l'angle d'incidence des rayons venus du point visé ; dans ce cas, et d'après une formule connue, l'expression de la déviation se réduit à $(n-1)\varepsilon$. Si donc k désigne le déplacement correspondant à une division du tambour et f la distance focale de l'objectif, on a

$$(n-1)\varepsilon f = 87k.$$

Dans la seconde expérience, les deux images observées sont produites par réflexion respectivement sur les deux faces du prisme. Quand le réticule est amené en coïncidence avec l'une d'elles, le rayon lumineux émis par le réticule et représenté par l'axe optique de la lunette doit revenir sur lui-même et rencontre, par conséquent, normalement la face réfléchissante. On donne donc successivement à l'axe optique une direction normale à la première face du prisme et une direction correspondant, par réfraction, à la normale à la seconde face ; or celle-ci fait avec la normale à la première face un angle ε, ce qui correspond, dans l'air, à un angle $n\varepsilon$. On a donc

$$n\varepsilon f = 237k.$$

On tire de là $$\frac{n}{n-1} = \frac{237}{87}, \qquad \text{d'où} \qquad n = 1{,}58.$$

On peut encore faire le raisonnement un peu plus compliqué que voici. Considérons, dans la section principale du prisme, un rayon représentant l'axe optique de la lunette et rencontrant la première face du prisme sous une incidence quelconque mais petite, α. Ce rayon sera situé, par exemple, du même côté que le sommet du prisme par rapport à la normale. Le rayon réfléchi fera avec la normale l'angle α, mais de l'autre côté.

Le rayon réfracté pénétrera dans le prisme sous l'angle $\frac{\alpha}{n}$, tombera sur la seconde face sous l'angle $\frac{\alpha}{n} + \varepsilon$, se réfléchira sous le même angle, reviendra sur la première face sous l'angle $\frac{\alpha}{n} + 2\varepsilon$ et enfin se réfractera sous l'angle $n\left(\frac{\alpha}{n} + 2\varepsilon\right)$ ou $\alpha + 2n\varepsilon$. Il sera alors situé du même côté de la normale que le premier rayon réfléchi et formera avec lui un angle $\alpha - \alpha - 2n\varepsilon = 2n\varepsilon$. Les deux images aperçues sont donc distantes l'une de l'autre de $2n\varepsilon f$. Mais il ne faut pas oublier que, quand on déplace le réticule pour aller de l'une à l'autre, on change la direction de l'axe de la lunette et, par conséquent, la direction des rayons réfléchis, de sorte que les images se déplacent de la même quantité que le réticule, mais en sens inverse. Le déplacement de celui-ci n'est donc que $n\varepsilon f$.

Solutions exactes, sauf ce dernier point, de MM. Ch. Guillaume et J. Grynebaum, lycée de Nancy.

ÉCOLE CENTRALE (1911)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Suite.*)

5638. — Théorème des forces vives pour un point matériel. — Application au mouvement d'un point pesant lancé sur un plan horizontal dans une direction donnée et soumis à une force qui tend à s'opposer à ce mouvement.

5639. — Equilibre d'un point pesant sur la face interne d'un cône de révolution dont l'axe est horizontal, avec frottement.

5640. — Equilibre d'un point pesant sur un cylindre de révolution, dont l'axe fait un angle α avec l'horizon, sachant qu'il y a frottement.

5641. — Equilibre d'un point pesant sur un fil circulaire, situé dans un plan incliné.

5642. — Equilibre sur une hélice à axe vertical d'un point pesant soumis à l'action d'une force répulsive émanant d'un point de l'axe et sans frottement.

5643. — Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné avec frottement.

5644. — Mouvement d'un anneau assujetti à glisser le long d'un fil faisant l'angle α avec l'horizon (avec frottement).

5645. — Mouvement d'un point pesant sur un plan horizontal rugueux, le point ayant été lancé sur ce plan.

5646. — Moment d'un vecteur par rapport à un axe ; expression analytique de ce moment.

5647. — Relation entre les moments d'un même vecteur par rapport à deux axes parallèles.

5648. — Un vecteur de grandeur constante tourne autour d'un point fixe dans un plan fixe. Lieu de l'extrémité du moment linéaire du vecteur par rapport à un autre point fixe.

5649. — Montrer que l'expression $LX + MY + NZ$ conserve la même valeur, quel que soit le point de l'espace par rapport auquel on fait la réduction d'un système de vecteurs.

5650. — Réduction d'un système de forces à deux forces orthogonales entre elles.

5651. — Réduction à deux forces par les opérations élémentaires.

5652. — Composition des couples.

5653. — Moment d'une force par rapport à un plan. Théorème relatif aux moments des forces parallèles par rapport à un plan.

5654. — Centre de gravité du périmètre d'un triangle ; de l'aire d'un quadrilatère homogène, de la surface d'un trapèze ; d'un prisme triangulaire (généraliser pour un prisme quelconque), d'un tétraèdre, d'un tronc de pyramide à bases parallèles ; centre de gravité d'un secteur circulaire.

5655. — Equilibre d'un solide invariable qui a un point fixe ; un axe fixe ; un, deux, trois points d'appui sur un plan. Calcul des réactions.

5656. — Equilibre d'un solide indéformable qui s'appuie sur trois plans rectangulaires.

5657. — Treuil (sans frottement). Calcul des réactions en supposant que l'on ait deux points d'appui.

5658. — Cabestan.

5659. — Poulie fixe avec frottement.

5660. — Poulie fixe avec frottement, les cordons étant rectangulaires. Pour une même charge donnée Q, trouver le maximum et le minimum de la puissance P.

5661. — Poulie mobile. Vérifier le principe du travail des forces appliquées dans le cas des cordons parallèles.

5662. — Bascule de Quintenz.

5663. — Equilibre d'un point pesant se déplaçant sur une droite, ce point étant relié à une poulie fixe supportant un poids Q, sans frottement.

5664. — Position d'équilibre d'une barre homogène pesante dont une extrémité O est fixe, l'autre A s'appuyant sur un plan faisant l'angle α avec l'horizon : 1° avec frottement ; 2° sans frottement.

Géométrie et Géométrie descriptive (M. Malloizel).

Géométrie élémentaire.

5665. — Montrer que dans un triangle les pieds des hauteurs, les pieds des médianes et les milieux des droites joignant chaque sommet au point de concours des hauteurs se trouvent sur un même cercle, qui est le cercle des neuf points du triangle. Trouver son centre.

5666. — Dans un quadrilatère ABCD dont les diagonales sont rectangulaires, la somme des carrés de deux côtés opposés est égale à la somme des carrés des deux autres. Réciproque.

5667. — Trouver les droites formant un faisceau harmonique avec trois droites concourantes données. Etant donné un faisceau harmonique, si deux conjuguées sont rectangulaires, elles sont les bissectrices des angles formés par les deux autres.

5668. — On donne une circonférence et deux cordes rectangulaires AB et CD qui se coupent en I. Démontrer que $\overline{IA}^2 + \overline{IB}^2 + \overline{IC}^2 + \overline{ID}^2 = C^{te}$.

5669. — Lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cercles donnés. Lieu des points de puissances égales et de signes contraires.

5670. — Lieu du point de rencontre des diamètres interceptés sur deux cercles donnés par un cercle variable qui coupe chacun des deux cercles en des points diamétralement opposés.

5671. — On donne deux cercles et une droite perpendiculaire à leur ligne des centres. Un point M décrit cette droite; lieu du point d'intersection des polaires de M par rapport aux deux cercles.

5672. — Lieu des points d'où l'on voit deux cercles donnés sous le même angle.

5673. — Tracer un cercle passant par deux points donnés A et B et tangent à une droite D, ou tangent à un cercle donné.

5674. — Figure inverse d'une circonférence par rapport à un point.

5675. — Etant donnés deux cercles qui se coupent en un point A, mener par ce point une sécante dont la longueur totale soit égale à une longueur donnée.

5676. — Mener une sécante à deux cercles, de façon que les cordes obtenues aient des longueurs données.

5677. — Mener par un point donné une droite telle que la somme de ses distances à deux points fixes soit connue.

5678. — On donne deux droites fixes Ox, Oy et deux points fixes A et B, A sur Ox, B sur Oy. — On mène une sécante variable Oz et de A et B on abaisse les perpendiculaires $A\alpha$, $B\beta$ sur Oz. — Soient I le milieu de OA, J le milieu de OB; on joint $I\alpha$ et $J\beta$ qui se coupent en M. Lieu du point M.

5679. — On donne une ellipse et un point M variable sur cette courbe. P et Q étant deux points fixes, lieu du centre de gravité du triangle PMQ.

5680. — Construire un polygone semblable à un polygone donné et équivalent à un triangle donné.

5681. — Inscrire un décagone régulier dans un cercle.

5682. — Inégalités entre les faces; entre les dièdres d'un trièdre.

5683. — Octaèdre régulier. — Calcul de la hauteur en fonction du côté.

5684. — On donne deux droites qui se coupent; lieu des points de l'espace également éloignés des deux droites. On donne trois droites Ox, Oy, Oz; lieu des points de l'espace également éloignés de ces trois droites.

5685. — On donne deux plans P et P' et une droite D. Mener par cette droite un plan qui coupe P et P' suivant deux droites rectangulaires.

5686. — Lieu du point M tel que ses distances à trois points donnés A, B, C soient proportionnelles à trois nombres α, β, γ.

5687. — On donne deux sphères et un point. Mener par le point une sécante telle que les cordes interceptées par les sphères aient des longueurs données.

5688. — Mener par un point un plan qui coupe une sphère suivant un cercle de rayon donné.

5689. — Mener par un point un plan qui coupe deux sphères suivant des cercles de rayons égaux donnés.

5690. — On donne un tétraèdre par ses quatre sommets. Mener un plan tangent à une sphère donnée qui coupe le tétraèdre suivant un parallélogramme.

5691. — Trouver le rayon d'une sphère solide.

5692. — Trouver une sphère passant par trois points et tangente à une droite donnée non située dans le plan des trois points.

5693. — Mener par trois points donnés une sphère tangente à un plan donné.

5694. — Mener par deux points donnés une sphère tangente à deux plans donnés. Discussion.

5695. — Déterminer une sphère de rayon donné, tangente à deux plans et à un cylindre de révolution. Discussion.

5696. — Un parallélogramme ABCD tourne successivement autour de deux côtés consécutifs AB et AC. On demande le rapport des volumes engendrés.

5697. — On donne un cercle C, un de ses diamètres AB : AB est aussi le grand axe d'une ellipse dont on donne un point M. — Trouver : 1° le petit axe de l'ellipse ; 2° deux diamètres conjugués.

5698. — On donne deux sommets, A du grand axe, B du petit axe d'une ellipse; lieu des centres, lieu des autres sommets de cette ellipse.

5699. — Démontrer que les diagonales d'un parallélogramme circonscrit à une ellipse sont deux diamètres conjugués de cette ellipse.

5700. — On donne deux droites rectangulaires Ox et Oy; un segment AB de longueur constante glisse sur ces deux droites; lieu d'un point M, fixe sur AB, quand AB se déplace. Tangente en M.

5701. — On donne un cercle; dans son plan, on prend deux points P et P'. Par le point P, on mène deux sécantes AB et CD; par le point P' deux sécantes parallèles. On projette la figure orthogonalement sur un plan. En déduire une propriété de l'ellipse, en partant de la relation $PA.PB = PC.PD$.

5702. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un foyer sur les tangentes à l'ellipse.

5703. — D'un point P, on mène les tangentes à une ellipse. On mène ensuite une droite parallèle à la corde des contacts MM', qui coupe l'ellipse en A et A' et les tangentes en T et T'. — Relation entre AT et AT'; généralisation pour une conique quelconque; cas où les points de contact M et M' s'en vont à l'infini.

5704. — Trouver l'intersection de deux ellipses qui ont un foyer commun. Les deux ellipses étant données par leurs grands axes et leurs foyers.

5705. — On donne deux ellipses ayant un foyer commun F ; leur mener une tangente commune. Démontrer que la droite F'φ' qui joint les deux autres foyers passe par le point de rencontre des deux tangentes communes.

5706. — Lieu des centres des cercles tangents à deux cercles donnés qui se coupent. Points à l'infini.

5707. — On donne les deux asymptotes d'une hyperbole et un point M ; la construire, trouver ses axes, ses sommets.

5708. — On donne trois points d'une hyperbole et les directions des asymptotes : déterminer cette hyperbole.

5709. — On donne une parabole par son foyer et la directrice. Intersection avec une droite.

5710. — On donne une parabole par son foyer et la directrice. Mener par un point de l'axe une normale à la courbe. — Déduire de la propriété de la sous-normale le centre de courbure au sommet de la parabole.

5711. — Construire une parabole connaissant : 1° deux points et les tangentes en ces points ; 2° le foyer et deux tangentes

5712. — On donne une tangente à une parabole, le point de contact et la direction de l'axe. Lieu des sommets des paraboles ainsi définies.

5713. — On donne la directrice d'une parabole, une tangente et son point de contact. Trouver les éléments de la parabole.

5714. — Construire une parabole connaissant : 1° un point, l'axe et le paramètre : 2° une tangente, l'axe et le paramètre ; 3° l'axe Δ et deux tangentes.

5715. — Deux paraboles sont définies par leurs foyers et leurs directrices qui sont deux droites parallèles ; leur mener une tangente commune.

5716. — On donne deux paraboles égales dont les axes sont parallèles et de même sens, par exemple la première par son foyer et la directrice, la seconde par son sommet. Mener une tangente commune aux deux paraboles. Trouver leur intersection.

5717. — On donne le foyer d'une conique, deux points et une tangente. La construire.

5718. — On donne une droite xy et un point fixe A : on mène par A une sécante variable qui rencontre xy en B, puis par B une droite BC perpendiculaire à AB. — Enveloppe de BC.

5719. — On donne une circonférence O et un point fixe F ; on joint F à un point A variable sur la circonférence et en A on élève la perpendiculaire AP à FA. Enveloppe de la droite AP.

5720. — On donne deux droites D et D' de l'espace. On joint un point quelconque A de D à un point quelconque A' de D' : on prolonge AA' d'une longueur égale à elle-même ; lieu de l'extrémité M du prolongement.

5721. — On donne une droite Δ, un point A et une direction D dans un plan. D'un point I quelconque de Δ, on mène une parallèle D' à D ; lieu du point M pris sur D' tel que MI = MA.

5722. — Mener une droite qui rencontre trois droites A, B, C de l'espace en des points α, β, γ tels que $\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma} = k$.

5723. — On donne dans le plan deux droites et un point A. Mener par ce point une sécante qui rencontre ces droites en des points B et C tels que $\frac{AB}{AC} = k$.

5724. — Une droite D s'appuie sur deux droites A et B et reste perpendiculaire à A ; lieu de la droite D, plans directeurs, leur angle.

5725. — Lieu d'une droite qui s'appuie sur deux droites données et qui fait avec elles le même angle.

5726. — Etant données trois droites de l'espace passant par un même point S, on a quatre cônes de révolution passant par ces trois droites. Intersection de ces cônes deux à deux.

Géométrie cotée.

5727. — On donne deux droites graduées ; angle de ces deux droites.

5728. — Angle de deux plans donnés par leurs lignes de pente.

5729. — Mener par une droite graduée un plan faisant un angle α avec un plan donné par sa ligne de pente.

5730. — On donne deux points a, b, dans le plan horizontal et deux autres points c, d quelconques. Ces quatre points définissent un tétraèdre ; trouver ses dièdres.

5731. — On donne deux plans par leurs lignes de pente ; construire les bissecteurs des dièdres qu'ils forment.

5732. — On donne deux plans ; on mène une droite variable parallèle à une direction donnée. Cette droite rencontre les deux plans en des points A et B. Lieu du milieu de AB. Faire l'épure en cotée.

5733. — Mener par un point a de cote 5 un plan faisant des angles α et β avec deux plans verticaux donnés.

5734. — On donne une droite graduée ab et un point O de cote 2. Mener du point O(2) une perpendiculaire sur la droite ; trouver sa vraie grandeur. Construire dans le plan déterminé par le point et la droite le carré ayant pour côté cette perpendiculaire.

5735. — On donne deux sommets opposés d'un carré ; un troisième sommet est sur une sphère donnée. Construire le carré ; épure en cotée.

5736. — On donne un plan par sa ligne de pente et un segment de droite AB de ce plan par sa projection ab ; construire dans le plan un carré sur AB comme côté. Construire un triangle équilatéral sur AB comme côté.

5737. — On donne deux droites graduées dont les projections sont parallèles. Perpendiculaire commune à ces deux droites.

5738. — Lieu des points également éloignés de trois plans donnés. Faire l'épure en cotée. L'un des plans étant le plan horizontal et les deux autres des plans donnés par leurs lignes de pente.

5739. — On donne un plan par sa ligne de pente ; dans ce plan se trouvent trois points A, B, C dont on a donné les projections a, b, c. A est le centre d'un cercle de rayon donné ; mener par B et C un cercle tangent au cercle précédent et déterminer ses projections.

5740. — On donne un pentagone dans le plan horizontal de cote 0 ; c'est la base d'une pyramide de sommet S(6) donné. Intersection de la pyramide et du deuxième bissecteur de l'un de ses dièdres à la base.

5741. — On donne un pentagone $abcde$ dans le plan horizontal de cote 0 ; ce pentagone est la base d'un prisme dont une génératrice $e(0)f(4)$ est donnée. On a ensuite un point S de cote 2 ; mener par S un plan qui détermine une section droite dans le prisme et la construire.

5742. — On donne un triangle ABC dans le plan de cote 0 ; c'est la base d'un tétraèdre DABC. Dans le plan DBC se trouve une ellipse dont la projection horizontale est le cercle inscrit dans le triangle dBC ; cette ellipse est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à AB. On demande la trace du cylindre sur le plan horizontal. Point et tangente en ce point.

5743. — On donne un cercle dans le plan de cote 0, base d'un cône de sommet $s(5)$. Couper le cône par un plan passant par une droite donnée et parallèle à une génératrice donnée sa, du cône. Point de la section où la tangente est parallèle à la droite donnée.

5744. — On donne deux cônes dont les bases sont deux cercles o et o' du plan horizontal de cote 0 et dont les sommets S et S', de projections s et s', sont sur la droite $a(0)s(6)$. Intersection des deux cônes.

5745. — On donne deux cônes : le premier a pour base un limaçon de Pascal à boucle du plan horizontal et pour sommet un point s de cote 5 ; le deuxième a pour base un cercle du plan horizontal et pour sommet un point t de cote — 5. Intersection des deux cônes.

5746. — On donne deux cercles qui se coupent dans le plan horizontal. Soit s leur centre de similitude externe. — Par s, on mène une droite $s(0)t(4)$, sur laquelle on prend deux points a et b ; ce sont les sommets de deux cônes dont les cercles sont les bases. Intersection des deux cônes.

5747. — On donne deux cercles extérieurs dans le plan horizontal ; l'un est la base d'un cône de sommets (4); l'autre, la base d'un cylindre de génératrices parallèles à $s(4)a(0)$. Intersection : faire l'épure complètement.

5748. — On donne dans le plan horizontal deux hyperboles ayant une asymptote commune ; ce sont les bases de deux cylindres dont on donne la direction des génératrices. Intersection des deux cylindres.

5749. — On donne un tétraèdre régulier ABCD, reposant sur le plan horizontal par la face ABC ; trouver la cote du quatrième sommet D. — On considère ensuite deux cônes, l'un dont le sommet est C et la base un cercle inscrit dans le triangle ABD, l'autre de sommet B et dont la base est le cercle inscrit dans le triangle ACD. Intersection de ces deux cônes.

5750. — On considère le tétraèdre SABC, dont la face ABC est horizontale ; dans la face BSC on donne une courbe qui est la base d'un cône de sommet A ; dans la face horizontale on prend une autre courbe qui est la base d'un cylindre de génératrices parallèles à SA. Intersection des deux surfaces.

5751. — On donne deux cercles extérieurs dans le plan horizontal de cote 0 ; ce sont les bases de deux cônes, le sommet de l'un des cônes est sur une génératrice de l'autre. Intersection des deux cônes.

5752. — On donne un cercle dans le plan horizontal, base d'un cylindre à génératrices verticales ; un autre cercle dans le plan de cote 2 est la base d'un cône dont le sommet est sur une génératrice du cylindre. Intersection.

5753. — On considère une hyperbole et un cercle dans le plan horizontal de cote 0. Par un point $a(0)$ commun aux deux courbes, on mène une droite $a(0)s(6)$; le point $s(6)$ est le sommet d'un cône dont la base est le cercle donné ; l'hyperbole est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la droite $a(0)s(6)$. Intersection du cône et du cylindre ; ligne des points doubles en projection.

5754. — Intersection de deux cônes de sommets $s(4)$ et $t(2)$ et qui ont pour base commune un cercle ω du plan horizontal de cote 0.

5755. — Intersection de deux cylindres ayant pour base commune un cercle du plan horizontal de cote 0, et dont les génératrices sont respectivement parallèles aux droites $a(0)b(5)$, $a(0)c(3)$. Axes de la projection.

5756. — Intersection d'une sphère donnée (tangente au plan horizontal) avec un plan donné par sa ligne de pente.

5757. — Mener par un point un plan tangent commun à deux sphères.

5758. — On donne une sphère dont le centre o a pour cote 3 ; cette sphère est tangente au plan horizontal de cote 0. Mener à cette sphère un plan tangent par une droite donnée.

5759. — On donne une sphère de rayon 6, dont le centre a pour cote 3, puis une horizontale de cote 1 ; par un point a, de cote 2, une droite qui rencontre l'horizontale et qui soit tangente à la sphère.

5760. — On donne une sphère tangente au plan horizontal de cote 0 dont centre est o et un point s de cote 4 ; on considère le cône circonscrit à la sphère de sommet s ; puis la projection o d'un point de la sphère. Trouver le point et le plan tangent en ce point.

5761. — Une ellipse donnée du plan horizontal tourne autour de son grand axe ; mener un plan tangent à l'ellipsoïde engendré, parallèlement à une droite graduée donnée et faisant un angle donné avec l'axe.

5762. — On donne un ellipsoïde de révolution dont l'axe est dans le plan de cote 0, et une horizontale de cote 5. Mener par cette droite un plan tangent à la surface.

5763. — Lieu des axes des hyperboloïdes de révolution passant par deux droites considérées précédemment $a(0)b(5)$ et $a(0)c(5)$.

5764. — On donne deux droites A et B de l'espace, une droite CD s'appuyant sur A et B. — Trouver l'axe de l'hyperboloïde de révolution qui contient ces trois droites. Combien y a-t-il de solutions ? Faire l'épure et discuter.

Géométrie descriptive.

5765. — On donne deux droites $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$ qui sont les lignes de pente de deux plans. Intersection de ces deux plans.

5766. — Trouver la figure symétrique d'un triangle abc, $a'b'c'$ par rapport à un plan P2Q donné par ses traces.

5767. — Déterminer un triangle symétrique d'un triangle donné abc, $a'b'c'$ par rapport à une droite Δ, Δ'.

5768. — Angles de deux droites données situées dans le deuxième bissecteur.

5769. — Angle de la ligne de terre avec un plan défini par trois points.

5770. — On donne une droite D, D' et un plan défini par trois points (a, a'), (b, b'), (c, c'). Angle de la droite et du plan.

5771. — Angles d'un plan vertical P avec un plan de bout Q'.

5772. — On donne deux plans perpendiculaires au deuxième plan bissecteur. Angles de ces deux plans.

5773. — Angles de deux plans donnés respectivement par trois points.

5774. — On donne une droite ab, $a'b'$ et deux points (c, c'), (d, d') dans le plan horizontal. — On demande les angles des deux plans ABC, ABD.

5775. — Un plan est donné par ses traces ; mener par la ligne de terre un plan faisant avec ce plan un angle donné.

5776. — Abaisser d'un point la perpendiculaire sur une droite de profil.

5777. — Abaisser d'un point une perpendiculaire sur une droite du second bissecteur.

5778. — Tracer une droite du second bissecteur. Mener par un point un plan perpendiculaire à cette droite.

5779. — Perpendiculaire commune à une droite quelconque et à une droite horizontale ; à une droite quelconque et à une droite de profil ; à une horizontale et à une ligne de front. — Vraie grandeur.

5780. — Construire un triangle équilatéral qui a pour centre un point o, o' et dont un côté se trouve sur une droite d, d'.

5781. — On donne un plan par ses traces ; mener dans ce plan une droite de profil et construire sur un segment donné de cette droite un triangle équilatéral situé dans le plan donné.

5782. — Construire un hexagone régulier ayant o, o' pour centre et dont un côté s'appuie sur une droite de profil ab, $a'b$.

5783. — On donne deux droites qui se coupent $(oa, o'a')$, $(ob, o'b')$ et un segment $(ef, e'f')$ dans le plan de ces deux droites. Construire dans ce plan un carré sur le segment donné comme côté, puis construire un cube sur ce carré comme base.

5784. — On donne une droite ab, $a'b'$ et un point c, c'. Construire un carré dont un sommet soit le point c, c', et tel qu'un côté du carré se trouve sur ab, $a'b'$. Construire un cube sur ce carré comme base.

5785. — Construire un cube dont une diagonale est verticale ; on donne les deux sommets situés sur cette diagonale ; une arête issue de l'un de ces sommets est de front.

5786. — Dans un plan déterminé par une horizontale et un point, on donne un carré ; construire l'octaèdre qui a ce carré comme carré médian.

5787. — On donne les points (a, a'), (b, b'), (c, c') qui forment un triangle, base du tétraèdre SABC de sommet (s, s'). Mesurer le volume de ce tétraèdre.

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

2002. Démontrer la formule de sommation

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}=\frac{(n-1)(3n-2)}{2n(n+1)},$$

et en conclure la série

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\ldots=\frac{3}{4}.$$

E.-N. Barisien.

2003. — Un angle de grandeur constante pivote autour d'un point fixe O. Les côtés rencontrent une droite fixe Δ en A et B. On demande :

1° Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle OAB.

2° Le lieu du centre du cercle inscrit au triangle OAB.

3° Le lieu de l'orthocentre du triangle OAB.

4° L'enveloppe du cercle circonscrit au triangle OAB.

E. Beve, à Alger.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

22e Année. Février 1912. N° 5.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

CORRESPONDANCE

Avant de faire ma leçon sur le développement des cônes et cylindres, je viens de consulter la note que M. Commissaire a publiée sur cette question dans la *Revue de Mathématiques spéciales* (1er de Mai 1910). Cette note contient, volontairement ou non, une lacune importante, et comme il s'agit d'une question de cours, je crois qu'il serait bon de la signaler. L'auteur arrive à cette conclusion (p. 498) :

Pour qu'un point M_1 *soit un point d'inflexion de la transformée, il faut et il suffit que le plan sécant contienne la normale au cône au point correspondant* M *de la section.*

Ceci est en contradiction avec le fait bien connu que si M est un point d'inflexion de la section, le point M_1 du développement l'est aussi en général.

Il est facile de rétablir ce fait :

Pour qu'un point M_1 *soit d'inflexion, il faut et il suffit* (ligne 20) *que :*

$$A(f+f'')+B(g+g'')+C(h+h'')=0.$$

Cette relation exprime bien que le plan sécant contient la droite ayant pour coefficients de direction $f+f''$, $g+g''$, $h+h''$, mais à la condition que *ces trois nombres ne soient pas nuls tous les trois.*

Je dis que si $f+f''=0$, $g+g''=0$, $h+h''=0$, le point M est un point d'inflexion de la section, et réciproquement.

En effet, pour que la génératrice passant en M soit une génératrice d'inflexion, il faut et il suffit qu'on puisse trouver trois nombres u, v, w, tels que

(9) $$uf+vg+wh=0, \qquad uf'+vg'+wh'=0, \qquad uf''+vg''+wh''=0.$$

(Ceci s'exprime en écrivant que la distance d'un point de la courbe $X=f(\theta)$, $Y=g(\theta)$, $Z=h(\theta)$, au plan tangent le long de la génératrice du point M est un infiniment petit du troisième ordre.)

Dans le système (9), tous les déterminants du deuxième ordre formés avec la première et la dernière équation, sont nuls, car si l'un était différent de zéro la solution serait donnée par trois nombres proportionnels à f', g', h', qui vérifient la première et la dernière équation, d'après les relations (3) et (4) de M. Commissaire. Donc on a $f''=kf$, $g''=kg$, $h''=kh$, mais comme

$$ff''+gg''+hh''=-1, \qquad f^2+g^2+h^2=1,$$

on a $k=-1$, donc

$$f+f''=0, \qquad g+g''=0, \qquad h+h''=0,$$

et inversement si ces relations ont lieu, le système (9) se réduit à la première et à la deuxième équation.

La même remarque s'applique au cas du cylindre. La condition $Af+Bg=0$ est satisfaite pour $f''=0$, $g''=0$. Ceci est la condition nécessaire et suffisante pour que le point M de la section (ou le point correspondant de la base) soit d'inflexion.

On sait en effet que les points d'inflexion de la base sont donnés par la relation

(2) $$fg''-g'f''=0$$

On a de plus

(1) $$f^2+g^2=1.$$

d'où

(3) $$ff'' + gg'' = 0.$$

Pour que les relations (2), (3) soient compatibles avec (1), il est nécessaire et suffisant que

$$f'' = 0, \qquad g'' = 0.$$

C'est évidemment suffisant, et c'est nécessaire, car si $g' = 0$, on trouve $g''f' = 0$, $f'f'' = 0$, d'où $g'' = 0$ et $f'' = 0$, puisque $f' = \pm 1$.

Si $f'' = 0$, $g'' = 0$ on aurait $\frac{f''}{f'} = \frac{g''}{g'} = \ldots$ d'après la relation (2) et, en portant dans (3), $k(f'^2 + g'^2) = 0$, ce qui est impossible si $k = 0$.

G. VALIRON, Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Besançon.

J'ai communiqué cette rectification à M. Commissaire, qui m'a renvoyé la lettre suivante.

E. H.

En écrivant cette note sur le développement des cônes et des cylindres, j'avais pour but : 1° de donner une définition élémentaire et précise de ce qu'on doit entendre par le développement d'une surface conique ou cylindrique, et de montrer que cette transformation de figure a la propriété de conserver les longueurs ; 2° de retrouver en n'appliquant que des procédés classiques le résultat bien connu relatif aux points d'inflexion des transformées des sections planes. Comme on le fait habituellement, j'ai supposé implicitement que le point considéré n'appartient pas à une génératrice inflexionnelle de la surface, et c'est simplement pour ne pas allonger la note que j'ai négligé de faire observer que ce cas particulier est précisément celui où, pour le cône, $f + f''$, $g + g''$, $h + h''$ sont nuls.

J'ai l'habitude, en interrogeant mes élèves, de leur faire remarquer cette circonstance de la façon suivante, qui est bien naturelle :

Si $f' = -f$, $g' = -g$, $h' = -h$, le vecteur accélération pour la courbe γ est situé sur la génératrice Om du cône, le plan osculateur en m à γ est donc le plan tangent au cône, ce qui prouve que la génératrice Om est inflexionnelle. Réciproquement, si la génératrice Om est inflexionnelle, le vecteur accélération de m est dans le plan tangent au cône, et comme

$$ff'' + gg'' + hh'' = 0,$$

il est perpendiculaire à la tangente en m à γ. Il est donc porté par la génératrice Om ; il existe un nombre k tel que $f'' = kf$, $g'' = kg$, $h'' = kh$.

Les relations $$ff'' + gg'' + hh'' = -1, \qquad f'^2 + g'^2 + h'^2 = 1$$
permettent d'en conclure, comme le remarque M. Valiron, que $k = -1$.

Pour le cylindre, m est évidemment un point d'inflexion pour la section droite quand $f'' = g'' = 0$. Réciproquement, si m est un point d'inflexion,

(1) $$fg'' - f''g = 0.$$

De plus comme

(2) $$f'f'' + g'g'' = 0,$$

les équations (1), (2), où l'on regarde f'', g'' comme les inconnues, sont linéaires et homogènes, leur déterminant $f'^2 + g'^2$ est égal à 1, on en conclut que $f'' = g'' = 0$.

Si vous revenez sur cette note, vous pouvez signaler un erratum ; page 500, ligne 7 (n° de Mai 1910), il faut lire : *un plan parallèle aux génératrices* au lieu de : *un plan de section droite*.

H. COMMISSAIRE.

LEÇON SUR LA COURBURE DES COURBES GAUCHES

par M. **E. Sauvage**, professeur au lycée de Constantine.

Théorème. — *L'intersection du plan normal en un point d'une courbe avec le plan normal infiniment voisin est perpendiculaire au plan osculateur.*

Soit (1) $$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0$$
l'équation du plan normal à la courbe au point $M(x, y, z)$.

L'intersection de ce plan avec le plan normal infiniment voisin est définie par les équations (1) et (2),

(2) $$(X - x)\,d^2x + (Y - y)\,d^2y + (Z - z)\,d^2z - ds^2 = 0.$$

Les paramètres directeurs de cette droite sont A, B, C, en posant selon l'usage
$$A = dy\,d^2z - dz\,d^2y, \qquad B = dz\,d^2x - dx\,d^2z, \qquad C = dx\,d^2y - dy\,d^2x.$$

L'équation du plan osculateur étant

(3) $$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$
le théorème est démontré.

Définitions. — Cette droite (caractéristique du plan normal) se nomme *droite polaire* relative à M.

Le point où elle perce le plan osculateur s'appelle *centre de courbure*. La distance de M au centre de courbure s'appelle *rayon de courbure*. L'inverse du rayon de courbure s'appelle la *courbure*.

D'après sa définition, le centre de courbure se trouve sur la normale principale.

Calcul des coordonnées du centre de courbure. — Les coordonnées (ξ, η, ζ) du centre de courbure vérifient les équations (1), (2) et (3). On a sans difficulté
$$\frac{\xi - x}{B\,dz - C\,dy} = \frac{\eta - y}{C\,dx - A\,dz} = \frac{\zeta - z}{A\,dy - B\,dx} = \frac{ds^2}{(B\,dz - C\,dy)\,d^2x + (C\,dx - A\,dz)\,d^2y + (A\,dy - B\,dx)\,d^2z} = \frac{ds^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$
d'où les relations

(4) $$\begin{cases} \xi - x = \dfrac{ds^2}{A^2 + B^2 + C^2}(B\,dz - C\,dy), \qquad \eta - y = \dfrac{ds^2}{A^2 + B^2 + C^2}(C\,dx - A\,dz), \\ \zeta - z = \dfrac{ds^2}{A^2 + B^2 + C^2}(A\,dy - B\,dx). \end{cases}$$

Remarque. — Ces formules peuvent s'écrire sous une autre forme en introduisant les cosinus directeurs α, β, γ de la tangente, dirigée dans le sens des arcs croissants
$$\left(\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds}\right).$$

$B\,dz - C\,dy$ est égal, tous calculs faits, à $ds(ds\,d^2x - dx\,d^2s)$ (nous $B\,dz - C\,dy = ds^2\,d\alpha$), et les formules (4) deviennent

(5) $$\xi - x = \frac{ds^2}{A^2 + B^2 + C^2}\,d\alpha, \qquad \eta - y = \frac{ds^2}{A^2 + B^2 + C^2}\,d\beta, \qquad \zeta - z = \frac{ds^2}{A^2 + B^2 + C^2}\,d\gamma.$$

Expression du rayon de courbure. — Les formules (4) donnent
$$R = \frac{ds^2}{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{(B\,dz - C\,dy)^2 + (C\,dx - A\,dz)^2 + (A\,dy - B\,dx)^2}.$$

Transformant le radical par l'identité de Lagrange et tenant compte de ce que $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$, il vient
$$R = \frac{|ds^2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Formules de Frenet. — Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale dirigée vers le centre de courbure :
$$\xi - x = R\alpha,$$

La première des formules (5) donne alors

$$\frac{ds}{A^2 + B^2 + C^2}\, d\alpha = R\alpha',$$

ou

$$R^2 \frac{d\alpha}{ds} = R\alpha', \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}.$$

Les formules

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta}{R}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma}{R}$$

sont connues sous le nom de formules de Frenet.

Théorème. — *Le rayon de courbure en* M *est la limite du rapport de l'arc infiniment petit* MM′ *à l'angle des tangentes en* M *et* M′.

Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente en M et $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$ les paramètres directeurs de la tangente en M′.

ε étant l'angle infiniment petit de ces deux tangentes, on trouve sans difficulté

$$\cos^2 \varepsilon = \frac{1}{1 + d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2},$$

ce qui peut s'écrire, en tenant compte des formules de Frenet,

$$\cos^2 \varepsilon = \frac{1}{1 + \frac{ds^2}{R^2}},$$

$$\sin^2 \varepsilon = \frac{ds^2}{R^2 + ds^2}, \qquad \frac{ds^2}{\sin^2 \varepsilon} = R^2 + ds^2,$$

$$\text{limite} \left| \frac{ds}{\varepsilon} \right| = R.$$

Théorème. — *Le centre de courbure est dans la concavité de la courbe.*

Le plan tangent à la courbe perpendiculaire au plan osculateur laisse tous les points de la courbe voisins de M d'un même côté, dit région de la concavité de la courbe. Pour établir le théorème, il suffit de vérifier que le résultat de la substitution des coordonnées d'un point voisin de M dans le premier membre de l'équation de ce plan,

$$\alpha(X - x) + \beta(Y - y) + \gamma(Z - z) = 0,$$

est du même signe que le résultat de la substitution des coordonnées du centre de courbure.

Soient s l'abscisse curviligne de M et $s + \Delta s$ celle d'un point voisin M′.

L'abscisse rectiligne de M′ est

$$x + \Delta s \frac{dx}{ds} + \frac{\Delta s^2}{2}\left(\frac{d^2x}{ds^2} + \varepsilon\right),$$

ε tendant vers 0 avec Δs.

Cette expression, en tenant compte de $\frac{dx}{ds} = \alpha$ et $\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha}{R}$, peut s'écrire

$$x + \Delta s\,\alpha + \frac{\Delta s^2}{2}\left(\frac{\alpha}{R} + \varepsilon\right).$$

Les deux autres coordonnées seraient

$$y + \Delta s\,\beta + \frac{\Delta s^2}{2}\left(\frac{\beta}{R} + \varepsilon'\right), \qquad z + \Delta s\,\gamma + \frac{\Delta s^2}{2}\left(\frac{\gamma}{R} + \varepsilon''\right),$$

ε', ε'' tendant vers 0 avec Δs.

La substitution donne

$$\frac{\Delta s^2}{2}\left(\frac{1}{R} + \varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon''\right),$$

qui, pour des valeurs de Δs suffisamment petites, a le signe de R quel que soit le signe de Δs.

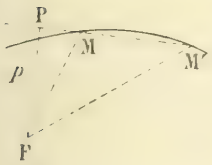
Substituons maintenant les coordonnées du centre de courbure $x + R\alpha'$, $y + R\beta'$, $z + R\gamma'$; le résultat est R.

Le théorème est donc démontré.

NOTE SUR LE MOUVEMENT DES PLANÈTES

par M. **E. Marchand**.

I. — Hodographe dans le mouvement des planètes. — La considération du triangle infinitésimal FMM′ donne immédiatement les relations

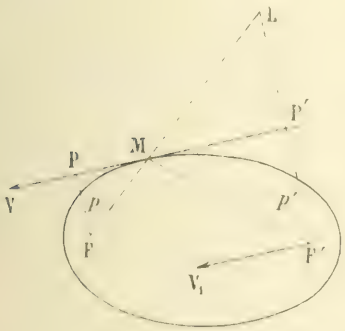


$$\frac{1}{2}\,p\,ds = \frac{1}{2}\,r^2 d\theta = C\,dt,$$

d'où, pour la constante des aires, les expressions

$$C = \frac{1}{2}\,pv, \qquad C = \frac{1}{2}\,r^2\,\frac{d\theta}{dt}.$$

Soit maintenant une ellipse de foyers F et F′ décrite par le point M suivant la loi des aires. On a d'abord $v = \frac{2C}{p}$, mais, en remarquant que $pp' = b^2$, il vient ensuite $v = \frac{2C}{b^2}\,p' = \frac{C}{b^2}\,q$, en posant $F'L = q$, L étant le symétrique de F′ par rapport à la tangente, et par suite un point du cercle directeur. Prenant F′ comme centre de l'hodographe, on voit que l'on passera de L à V_1 par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ et multiplication homothétique par $\frac{C}{b^2}$. Le lieu du point L étant le cercle directeur de centre F, l'hodographe sera le cercle qu'on en déduit par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de F′ et par une amplification homothétique mesurée par $\frac{C}{b^2}$. Le centre du cercle hodographe (F étant pris comme pôle de l'hodographe) sera sur une perpendiculaire à FF′ à une distance $2\frac{Ca}{b^2}$ et le rayon vaudra $\frac{2Ca}{b^2}$.



La tangente en L au cercle directeur étant perpendiculaire à LF′, la tangente en V_1 à l'hodographe sera dirigée suivant LF′; on retrouve donc ainsi que l'accélération est centrale.

II. — Accélération dans le mouvement des planètes. — La vitesse du point L, situé sur le rayon vecteur de direction θ à une distance $2a$ est $2a\,\frac{d\theta}{dt}$. La vitesse correspondante du point V_1 de l'hodographe sera $\frac{C}{b^2}\,2a\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{4aC^2}{b^2}\,\frac{1}{r^2}$.

Enfin, si l'on tient compte de la relation évidente $C = \frac{\pi ab}{T}$, il vient

$$\gamma = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\,\frac{1}{r^2}.$$

On retrouve donc très simplement cette formule, dont je rappellerai brièvement l'importance en Cosmographie.

Si le soleil restait immobile, la force d'attraction $m\gamma$ exercée sur la terre serait égale à $F = f\frac{Mm}{r^2}$, f étant l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance, M la masse du soleil, m celle de la terre ; égalant ces deux valeurs, on a

$$\gamma M = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2},$$

égalité qui équivaut à la troisième loi de Képler.

Mais si la terre tombe (déviation) sur le soleil en une seconde de $\frac{1}{2}\frac{1}{\omega}$, le soleil tombe sur la terre de $\frac{1}{2}\frac{F}{M}$, et on prévoit la formule exacte, que fournit facilement le calcul. $\frac{1}{M} + \frac{1}{m} = \gamma$,

$$fM = \omega^2 = 4\pi^2\frac{a^3}{T^2}$$

Supposons, pour finir, que : « m soit la masse d'une planète, a et T le demi-grand axe de l'orbite elliptique de la planète et la durée de sa révolution sidérale autour du soleil ; a' et T′ sont les quantités analogues pour l'orbite elliptique décrite par le satellite (de masse m') autour de la planète » ; on aura successivement

$$fm = \omega^2 = 4\pi^2\frac{a^3}{T^2}, \qquad \frac{\omega^2 + \omega'^2}{M + m} = 4\pi^2\left(\frac{a}{T}\right)^2\left(\frac{a'}{T'}\right)^2$$

et, en remarquant que $\frac{m+m'}{M+m} = \frac{m}{M}\frac{1+\frac{m'}{m}}{1+\frac{m}{M}}$ a sensiblement pour valeur $\frac{m}{M}$, « la formule qui exprime le rapport de la masse m d'une planète à la masse M du soleil, est

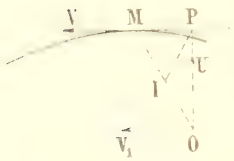
$$\frac{m}{M} = \left(\frac{a}{a'}\right)^3\left(\frac{T'}{T}\right)^2 \text{ »}$$

(*Leçons de Cosmographie*, de Lissajous et Andoyer, p. 295 et p. 314 en note.)

III. Hodographe dans le mouvement suivant la loi des aires. — En posant $OP = p$, nous avons la formule

$$pv = 2C.$$

Le point V_1 est un point quelconque de l'hodographe, et U le point qu'on en déduit par rotation de $-\frac{\pi}{2}$ autour de O. Ayant le lieu de U, par rotation de $+\frac{\pi}{2}$ on aura l'hodographe.



La formule $pv = 2C$, ou $OP.OU = 2C$, montre que le lieu de U est l'inverse de la podaire du point O par rapport à la trajectoire du point mobile. Mais « la podaire d'une courbe est l'inverse de sa polaire réciproque prise par rapport à un cercle décrit autour de l'origine ou centre d'inversion comme pôle ». (Salmon, Courbes planes d'ordre supérieur, p. 153). Cela revient effectivement à cette remarque évidente que le point U et la droite PM sont pôle et polaire par rapport à un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2C}$. La courbe U est par suite polaire réciproque de la trajectoire.

Une première conséquence à tirer de là est que l'accélération dans le mouvement suivant la loi des aires est centrale. En effet, I étant le milieu de OM, PI est la normale à la podaire en P et par suite la direction de la normale en U est la direction symétrique IO. La tangente en U est perpendiculaire

à MO et, par conséquent, quand on passera de U à V_1 par rotation de $+\frac{\pi}{2}$, la tangente en V_1 prendra la direction MO.

L'équation de l'hodographe en coordonnées tangentielles est facile à former. Désignons par $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la trajectoire. La polaire d'un point (x, y, z) de cette courbe par rapport au cercle $X^2 + Y^2 = 2CZ^2$ est $Xx + Yy - 2CZz = 0$, qui, identifiée avec $uX + vY + wZ = 0$, donne

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{-2Cz}{w}.$$

L'équation tangentielle de la courbe lieu du point U est

$$f\left(u, v, -\frac{w}{2C}\right) = 0.$$

Si l'on effectue une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ afin de passer à l'hodographe, $u = \cos\alpha$, $v = \sin\alpha$ sont remplacés par $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -v$, $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = u$; sauf erreur de ma part qu'il serait facile de corriger on trouve pour équation tangentielle de l'hodographe

$$f\left(-v, u, -\frac{w}{2C}\right) = 0.$$

La trajectoire étant une conique, il en est toujours de même de l'hodographe. A une trajectoire de degré m correspond un hodographe de classe m. Il n'est pas douteux qu'en se reportant à la théorie des polaires réciproques, on ne trouve beaucoup de cas particuliers intéressants. Je me bornerai à vérifier le résultat trouvé pour le mouvement des planètes, sans supposer connu ce théorème que la polaire réciproque d'un cercle par rapport à un cercle de centre O est une conique de foyer O.

On a $f(x, y, z) = \frac{(x - c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ pour la trajectoire.

Pour l'hodographe il vient

$$\frac{\left(-v - \frac{wc}{2C}\right)^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} - \frac{w^2}{4C^2} = \frac{u^2}{b^2} + \frac{v^2}{a^2} + \frac{w^2}{4C^2}\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{cw}{Ca^2}\right) = 0.$$

Par décomposition en carrés, on trouve aussitôt

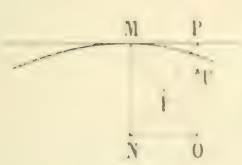
$$-\left[\frac{wb}{2Ca} + \frac{vc}{ab}\right]^2 + \frac{u^2 + v^2}{b^2} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire encore

$$\left[\frac{2Cv}{b^2} + w\right]^2 = \frac{4C^2(u^2 + v^2)}{b^2},$$

c'est le cercle de centre $x = 0$, $y = \frac{2Cc}{b^2}$ et de rayon $R = \frac{2Ca}{b^2}$.

IV. — Accélération dans le mouvement suivant la loi des aires. — La polaire étant rapportée au pôle O, si on passe au point voisin M tel que $\widehat{MOM'} = d\theta$, on a $\widehat{POP'} = d\alpha$, $d\alpha$ étant l'angle de contingence, ou angle des deux tangentes infiniment voisines MP, M'P'. Appelant s l'arc de la polaire, comme PN = MO est la normale polaire,



$$ds = PN\,d\alpha \qquad \text{ou} \qquad ds = r\,d\alpha.$$

L'arc d'hodographe correspondant ou, ce qui revient au même, l'arc $d\sigma$ décrit par U, d'après les propriétés élémentaires de l'inversion, est défini par

$$d\sigma' = d\sigma \frac{v^2}{2C}.$$

Alors
$$\gamma = \frac{d\sigma'}{dt} = \frac{4C^2}{r^5} \cdot \frac{ds^2}{d\theta^2} \cdot \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{v^2 r}{2C} \cdot \frac{1}{\rho},$$
ρ désignant le rayon de courbure.

A défaut de méthode géométrique directe, que je n'ai pu découvrir, je proposerai le calcul de vérification suivant :
$$d\alpha = d\theta - d \operatorname{arc\,tg} \frac{r'}{r}.$$
$$\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \frac{r'' - rr'}{r^2 + r'^2} = \frac{r^2 - 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}.$$
$$\gamma = \frac{4C^2}{r^5}(r^2 - 2r'^2 - rr'') = \frac{4C^2}{r^5}\left[\frac{1}{r} - 2\left(\frac{1}{r}\right)'' - r\left(\frac{1}{r}\right)''\right].$$

En tout cas, la méthode précédente met bien en évidence la relation intime entre la détermination de γ et celle du rayon de courbure ou de l'angle de contingence.

V. — **Méthode de** *M. Carvallo.* — Si la méthode géométrique directe ne paraît pas réussir actuellement pour le calcul de l'accélération dans le cas général, il est bon d'observer que « la méthode du calcul géométrique » conduit plus simplement au but que la méthode analytique ordinaire. Je me borne à recopier le calcul très simple de M. Carvallo (*Sur les forces centrales*, Nouvelles Annales de Mathématiques, juin 1893) :

« Le vecteur M étant représenté par $M = re^{i\theta}$, la vitesse de M est
$$V = \frac{dM}{dt} = \frac{dM}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{dr}{d\theta} + ri\right)e^{i\theta} \frac{d\theta}{dt}.$$
et, en remplaçant $\frac{d\theta}{dt}$ par sa valeur $\frac{2C}{r^2}$,
$$\text{(I)} \qquad V = 2C\left[-\left(\frac{1}{r}\right)' + i\left(\frac{1}{r}\right)\right]e^{i\theta}.$$

L'accélération Γ se déduit de V par la même méthode :
$$\Gamma = \frac{dV}{dt} = \frac{2C}{r^2} \frac{dV}{d\theta}.$$
et, en remplaçant $\frac{dV}{d\theta}$ par sa valeur déduite de (I),
$$\text{(II)} \qquad \Gamma = -\frac{4C^2}{r^5}\left[\left(\frac{1}{r}\right)'' + \left(\frac{1}{r}\right)\right]e^{i\theta}.$$

La formule (II) montre que l'accélération est dirigée suivant OM. L'accélération est centrale. »

Enfin, pour terminer, je remarquerai que si l'on connaît l'équation de la trajectoire sous la forme $\frac{1}{r} = f(\theta)$, l'équation (I) donnera aussitôt les expressions des coordonnées de l'hodographe en fonction de θ. Il serait peut-être intéressant de retrouver par cette méthode mixte les théorèmes fournis plus haut par des considérations de pure géométrie.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1943. — *Étant donnés un triangle rectangle* AOB *et une droite* OD, *on considère la parabole* P *et l'hyperbole équilatère* H *telles que, pour chacune de ces deux courbes,* OD *soit une direction asymptotique, que* OB *soit la polaire de* A, OA *la polaire de* B :

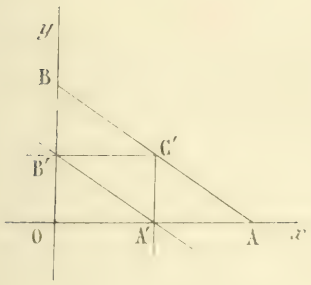
1° *Trouver l'équation de* P, *l'équation de* H; *démontrer analytiquement et géométriquement que, quelle que soit* OD, *la parabole* P *est tangente à trois droites fixes, et que l'hyperbole* H *passe constamment par quatre points fixes ;*

2° *Trouver le lieu des points d'intersection de* P *et de* H *lorsque la direction* OD *varie ; expliquer le résultat ;*

3° *Trouver, lorsque* OD *tourne autour du point* O, *le lieu du centre de* H, *le lieu du foyer de* P : *explications géométriques ;*

4° *Trouver et construire, dans les mêmes conditions, le lieu du sommet de la parabole* P.

1° Prenons pour axes de coordonnées les deux côtés OA et OB du triangle rectangle et désignons OA par a, OB par b, et par m le coefficient angulaire de la droite OD.



La parabole P a une équation de la forme

$$(y - mx)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

et, en écrivant que les points A$(a, 0)$ et B$(0, b)$ ont respectivement pour polaires Oy et Ox, nous avons les relations

$$E - ma = 0, \qquad F + Da = 0, \qquad D - mb = 0, \qquad F + Eb = 0,$$

qui se réduisent à trois et qui donnent

$$D = mb, \qquad E = ma \qquad \text{et} \qquad F = -abm.$$

La parabole P a donc finalement pour équation

$$(1) \qquad (y - mx)^2 + m(2bx - 2ay - ab) = 0.$$

Cette parabole est évidemment tangente à la droite fixe $2bx + 2ay - ab = 0$, et aussi aux droites $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$, car son équation peut s'écrire

$$(y - mx)^2 - m(2x - a)(2y - b) = 0.$$

D'ailleurs ce fait s'aperçoit immédiatement en cherchant l'enveloppe des paraboles du faisceau : on a de suite l'équation $(2xy - 2bx - 2ay + ab)^2 - 4x^2y^2 = 0$,
qui se décompose en les trois droites $2bx + 2ay - ab = 0$, $2x - a = 0$ et $2y - b = 0$.

Ce fait est évident géométriquement : en effet, A étant le pôle de OB, la droite A'C', parallèle à OB et équidistante de OB et de A, est une tangente à la parabole ; de même B'C', parallèle à OA et équidistante de OA et de B ; de même, A'B'. Le triangle des milieux des côtés du triangle OAB est donc circonscrit à la parabole P.

L'hyperbole H a une équation de la forme $(y - mx)(my + x) + 2Dx + 2Ey + F = 0$: en écrivant que Ox et Oy sont les polaires de B et de A, nous avons les relations $2D + b(1 - m^2) = 0$, $F + Eb = 0$, $2E + a(1 - m^2) = 0$, $F + Da = 0$, qui se réduisent à trois et qui donnent

$$2D = b(m^2 - 1), \qquad 2E = a(m^2 - 1), \qquad F = -\frac{ab(m^2 - 1)}{2}.$$

L'équation de l'hyperbole H est alors

$$(2) \qquad 2(y - mx)(my + x) + (m^2 - 1)(2bx + 2ay - ab) = 0$$

elle se met sous la forme

$$2m(x^2 - y^2) - (m^2 - 1)(2xy - 2bx - 2ay + ab) = 0.$$

ou

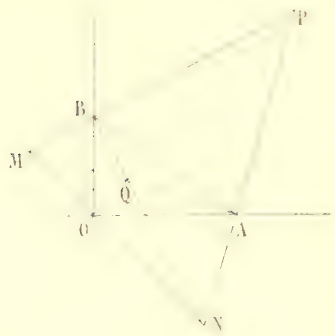
$$x^2 - y^2 - \frac{m^2 - 1}{2m}(2xy - 2bx - 2ay + ab) = 0,$$

et, sous cette forme, on voit qu'elle passe par quatre points fixes, les points de rencontre des deux lignes

$$x^2 - y^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad 2xy - 2bx - 2ay + ab = 0,$$

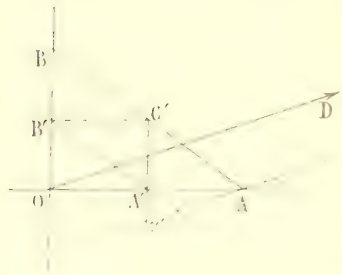
la première représente les bissectrices de l'angle des axes ; la seconde, une hyperbole équilatère qui fait partie du faisceau.

Pour démontrer géométriquement cette propriété des hyperboles H, je m'appuierai sur ce fait que toutes les coniques circonscrites à un quadrangle ont pour triangle autopolaire commun le triangle des



points diagonaux, et que toutes les hyperboles équilatères circonscrites à un triangle passent par le point de concours des hauteurs ; le triangle autopolaire commun est alors le triangle formé par les pieds des hauteurs. Regardons le triangle OAB comme étant un triangle de cette espèce, et menons les bissectrices intérieures des angles O, A et B ; le triangle MNP obtenu en élevant en A, O, B des perpendiculaires à ces bissectrices est justement tel que toutes les hyperboles équilatères circonscrites passent aussi au point Q où se coupent les hauteurs et admettent le triangle OAB comme triangle autopolaire. Ces hyperboles forment un faisceau nécessairement identique au faisceau indiqué dans l'énoncé.

2° Il est facile de démontrer géométriquement qu'en dehors du point qu'elles ont en commun à l'infini, les deux courbes P et H se coupent aux trois points de contact de la parabole P avec les côtés du triangle A'B'C'.



En effet, menons par le point A une parallèle à OD ; cette droite, $A\alpha$, est le diamètre conjugué de OB ou A'C', dans la parabole ; elle coupe donc A'C' au point de contact avec la parabole P ; dans l'hyperbole, cette droite est parallèle à une direction asymptotique et coupe la polaire de A en un point α conjugué de A par rapport aux deux points de rencontre ; or l'un d'eux est à l'infini, donc l'autre est au milieu α' de $A\alpha$. L'hyperbole H coupe donc la parabole P au point α'. Ce raisonnement se répète identiquement pour les autres points.

Pour traiter la question par le calcul, il faut éliminer m entre les deux équations (1) et (2)

$$(y - mx)^2 - m(2bx - 2ay - ab) = 0, \qquad 2(y - mx)(my + x) - (m^2 - 1)(2bx + 2ay - ab) = 0.$$

Ceci se fait simplement en multipliant la première par $m^2 - 1$, la deuxième par m et retranchant ; il vient ainsi

$$(y - mx)(m^2 - 1)(y - mx) - 2m^2(y - 2mx - b) = 0, \qquad \text{ou} \qquad -(m^2 + 1)(y - mx)(y + mx) = 0,$$

et il n'y a plus qu'à combiner cette équation avec l'une des deux autres, la première, par exemple, pour avoir le lieu. Or cette dernière équation se décompose en deux : $y - mx = 0$ et $y + mx = 0$. En faisant $y - mx = 0$ dans l'équation de la parabole, il vient $2bx + 2ay - ab = 0$; c'est l'équation de la droite A'B'. En faisant $y + mx = 0$ dans l'équation de la parabole mise sous la forme

$$(y + mx)^2 - m(2x - a)(2y - b) = 0,$$

il vient $(2x - a)(2y - b) = 0$; ce sont les deux droites A'C' et B'C'.

Le lieu total se compose donc des trois droites A'B', A'C', B'C'.

3° Le lieu du centre de H est évidemment le cercle des neuf points du triangle MNP, c'est-à-dire le cercle circonscrit au triangle OAB. Pour vérifier le fait analytiquement, nous poserons $\frac{m^2 - 1}{2m} = \lambda$ et nous écrirons l'équation de l'hyperbole H sous la forme

$$H = x^2 - y^2 + \lambda(2xy - 2bx - 2ay + ab) = 0,$$

puis nous annulerons les deux dérivées partielles, H_x' et H_y' ; nous aurons ainsi

$$x + \lambda(y - b) = 0, \qquad -y + \lambda(x - a) = 0.$$

Le lieu est donc $x(x - a) + y(y - b) = 0$; c'est le cercle annoncé.

Le lieu du foyer de P est évidemment le cercle circonscrit au triangle A'B'C', circonscrit à la parabole. Pour le voir analytiquement, il suffit de remarquer que le foyer F est sur l'axe et sur la polaire du point C, d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires. Il est donc à l'intersection des deux droites

$$(m^2 + 1)(y - mx) - m(x - 2ma - 2mb) = 0 \qquad \text{et} \qquad y + mx = 0.$$

En éliminant m entre ces deux équations, on trouve de suite le cercle indiqué :

$$2(x^2+y^2)-ax-by=0.$$

Il existe bien d'autres procédés, classiques et d'application facile dans le cas actuel. On pourrait éviter l'emploi de l'axe en remarquant que, d'après le théorème de Poncelet, le foyer est aussi sur la droite $y-\frac{b}{2}=\frac{1}{m}\left(x-\frac{a}{2}\right)$, menée par le point C′ et symétrique de la parallèle à OD menée par le même point, par rapport à la bissectrice de l'angle des deux tangentes CA, CB $(y=x)$. Mais il n'y a aucun intérêt à éviter l'emploi de l'axe, puisque cette droite doit intervenir dans la dernière partie.

4° L'axe de la parabole P a pour équation $P-\frac{1}{m}P_1=0$,

ou
$$(1+m^2)(y-mx)+m^2a-bm=0,$$
comme nous l'avons déjà écrit.

Le sommet est le point de rencontre de la parabole avec cette droite, et ses coordonnées s'obtiennent en résolvant les deux équations

$$y-mx=\frac{m(bm-a)}{1+m^2}, \qquad 2bx+2ay=ab-\frac{m(bm-a)^2}{1+m^2};$$

on trouve ainsi

$$2x=\frac{a-m^2(bm-2a)}{(1+m^2)^2}, \qquad 2y=\frac{bm^3+2bm^2-am}{(1+m^2)^2}.$$

Ces deux expressions peuvent s'écrire

$$2x=\frac{a(1+m^2)^2-m^2(am+b)}{(1+m^2)^2}, \qquad 2y=\frac{b(1+m^2)^2-m(am+b)}{(1+m^2)^2}.$$

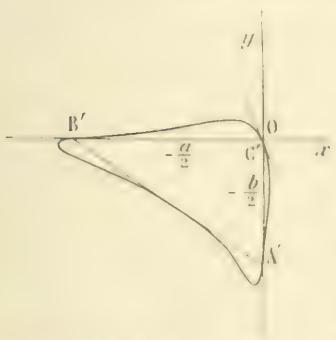
En portant les axes au point $C'\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$, on a donc finalement

$$(3) \qquad x=\frac{m^2(am+b)}{2(1+m^2)^2}, \qquad y=\frac{m(am+b)}{2(1+m^2)^2}.$$

C'est cette courbe que nous avons à construire, en faisant varier m depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Nous remarquons d'abord : que $x=m^2y$; que x et y sont toujours finis, que, pour $m=-\infty$, $x=-\frac{a}{2}$, $y=+\infty$; que, pour $m=-\frac{b}{a}$, $x=0$, $y=0$, et $\frac{y}{x}=-\frac{a^2}{b^2}$; que, pour $m=0$ $m=+\infty$, $x=\frac{a}{2}$, $y=-\frac{b}{2}$; et, enfin, que, pour $m=-\infty$, $x=-\frac{a}{2}$, $y=-\infty$.

La courbe est donc circonscrite au triangle A′B′C′ et les tangentes aux points A′, B′, C′ sont connues.



Pour la construire avec plus de précision, il faut étudier en outre les signes des dérivées :

$$\frac{dx}{dm}=m^2\,\frac{bm^2-4am-3b}{2(1+m^2)^3}, \qquad \frac{dy}{dm}=\frac{3am^2+4bm-a}{2(1+m^2)^3}.$$

En dehors de $m=0$ qui annule $\frac{dx}{dm}$, mais sans changement de signe, chacune des deux dérivées admet une racine positive et une négative ; soient α et β, $\alpha<\beta$, les deux racines de $\frac{dx}{dm}=0$ et α_1, β_1 celles de $\frac{dy}{dm}$; il faut classer ces quatre nombres. Pour cela, annulons m^2 de la première équation :

$$bm^2-4am-3b=0, \qquad m^2=\frac{4am+3b}{b}.$$

m	x'	x	y'	y
$-\infty$		$-\frac{a}{2}$		0
			+	croît
	+	croît		
α			0	Max.
				décroît
$\frac{-b}{a}$		0		0
			—	
		croît		décroît
α	0	Max		
	—	décroît		
0	0	0		$-\frac{b}{2}$
		décroît		décroît
β'	—		0	min.
β	0	min.		croît
	+	croît	+	
$+\infty$		$-\frac{a}{2}$		0

et nous portons dans le second trinome ; nous avons le signe de $(12a^2+4b^2)m+8ab$; la racine positive du premier trinome est donc au-dessus de celle du second ($\beta > \beta'$). Nous tirons de même m^2 de la seconde équation et nous portons dans le premier trinome ; nous avons le signe de $-(12a^2-4b^2)m-8ab$; la racine positive de la seconde équation est donc comprise entre les deux racines de la première et nous avons le classement

$$\alpha < \alpha' < \beta < \beta'.$$

En outre, $-\frac{b}{a}$ est en dehors de l'intervalle (α, β) et dans l'intervalle (α', β'). Nous pouvons donc maintenant construire sans peine le tableau relatif aux variations simultanées de x et de y et en déduire la forme de la courbe. Elle est tangente à A'C' au point A', à B'C' au point B', et on vérifie facilement qu'elle est tangente à AB en un point qui correspond à $m = \frac{a}{b}$.

Dans le cas où $a = b$, la courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice de l'angle des axes et a la forme d'un bicorne.

A. MACÉ DE LÉPINAY.

Bonnes solutions : MM. G. Guillemet, A. Rousseau, J. Desbiolles, à Belfort, J. Souchaud, à Mont-de-Marsan.

Assez bonnes solutions : MM. J. Ottenheimer, L. Sebon, G. Estéoux, Nancy.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1944. — *On donne les cinq droites* X, X', G, G', R *qui sont : 1° X, X' l'axe ; 2° G, G' une génératrice d'une surface gauche de révolution ; 3° R la direction des lignes de rappel.*

Construire les contours apparents et une section plane de la surface, en n'employant que deux équerres fausses (bien entendu les arêtes des équerres sont rigoureusement rectilignes).

I. — *Trouver le symétrique d'un point* M, *par rapport à une droite* D, *à l'aide d'une équerre fausse.*

On place l'un des côtés de l'équerre sur la droite D, en faisant passer l'autre côté par le point M. Ceci permet d'obtenir successivement sur D les deux sommets du triangle isocèle AMB.

Deux opérations analogues aux précédentes, faites de l'autre côté de la droite D, donneront le losange AMBM' dont le sommet M' sera bien le symétrique de M par rapport à D.

Remarque. — Pour ce problème uniquement, le côté de l'équerre avec lequel on trace AM, BM, AM', BM' peut être une courbe quelconque. Il en est de même aussi du côté de l'équerre que l'on peut se contenter d'appuyer par deux points sur la droite D, pourvu qu'on ait soin de faire coïncider le sommet de l'équerre successivement dans les quatre opérations avec les points A, B.

En résumé, à l'aide de deux équerres fausses mais droites, on peut :

1° Mener par un point la parallèle à une droite donnée ;

2° Abaisser d'un point quelconque du plan la perpendiculaire sur une droite donnée ;

3° Mener par un point d'une droite la perpendiculaire sur cette droite ;

4° Trouver le symétrique d'un point par rapport à une droite.

Dans une épure, nous pourrons donc aussi résoudre tous les problèmes d'intersection de plans, de droites et de plans, de plans et de surfaces réglées dont on connaît des génératrices, ainsi que ceux relatifs aux droites et plans rectangulaires.

II. — *Construction d'une nouvelle génératrice de la surface gauche de révolution.*

Tout plan méridien mené par l'axe d'une surface de révolution quelconque est un plan de symétrie pour la surface. Donc, si l'on construit la symétrique de la génératrice donnée G, G′ par rapport à l'un de ces plans méridiens, on aura une nouvelle génératrice de la surface, et cela en nombre illimité.

Pour simplifier, prenons comme plan méridien de symétrie le plan vertical X qui projette horizontalement l'axe XX′. Choisissons ensuite sur G, G′ un point arbitraire m, m'. Prenons alors le symétrique m_1 de m par rapport à X et projetons verticalement ce point m_1 en m'_1 sur la perpendiculaire aux lignes de rappel R menée par m'. Nous aurons ainsi en m_1, m'_1 le symétrique de m, m' par rapport au plan méridien vertical X.

En répétant la même opération une deuxième fois avec le point n, n' de G, G′, on aura en m_1n_1, $m'_1n'_1$ une nouvelle génératrice de la surface.

Il est vrai que nous trouvons ainsi une génératrice particulière, mais, d'après ce qui précède, les mêmes constructions peuvent s'appliquer à un plan méridien quelconque. Dans ce cas, de m, m' on abaisse la perpendiculaire sur le plan méridien choisi. Soit p, p' son pied. Pour trouver maintenant le point m_1, m'_1, on commencera par construire sur mp un parallélogramme quelconque $mpqr$, et il suffira de compléter le nouveau parallélogramme $qrpm_1$. C'est cette dernière construction qu'il conviendrait d'employer si l'axe X, X′ était parallèle à la ligne de terre.

Pour simplifier, on peut choisir comme deuxième point, l'intersection de la droite G, G′ avec le plan méridien choisi, ce point étant à lui-même son symétrique.

III. — Pour ramener l'étude d'une surface gauche de révolution définie par son axe et une génératrice, à celle d'une surface gauche quelconque du second degré, il suffit de construire à l'avance trois génératrices de même système.

Soit G la génératrice initiale donnée, puis G_1 sa symétrique par rapport au plan vertical X, et enfin H_1 sa symétrique par rapport au plan de bout X′.

Construisons alors H symétrique de G_1 par rapport au plan de bout X′ et ensuite K symétrique de H_1 par rapport au plan vertical X. Nous avons ainsi finalement en (G, G′), (H, H′), (K, K′) trois génératrices de même système qui permettent de résoudre les questions proposées sans l'emploi du compas, et avec seulement deux équerres fausses, mais droites.

IV. — Pour trouver par exemple le point de contact de G avec le contour apparent horizontal, considérons le plan vertical G, il coupe H, H′ en x, x', K, K′ en y, y', et par suite la surface suivant $xyx'y'$ qui rencontre G, G′ au point demandé m', m.

Ainsi, m est un point du contour apparent horizontal, la tangente en ce point étant G.

V. — *Choix de l'angle de l'équerre.* — Pour l'exactitude des constructions, il faut éviter d'employer des droites se coupant sous des angles trop petits.

Si l'angle de l'équerre était exactement de 60°, toutes les intersections de MA ou MB avec D et de MA avec MB se feraient sous ce même angle de 60°. Comme les angles AMB, MAB varient en sens contraire puisque AMB + 2MAB = 2 droits, il convient précisément de choisir cet angle de 60° ou environ.

VI. — Il est intéressant de se rendre compte de la valeur de l'erreur commise au § 1, lorsque l'équerre employée est trop épaisse.

Dans ce cas, les angles des deux faces opposées de l'équerre ne sont pas rigoureusement identiques, mais diffèrent néanmoins d'une quantité très petite h.

Appelons α les angles $M'AB$, M_1BA et $\alpha + h$ les deux angles $M'BA$, M_1AB. Soit enfin a la moitié de AB.

L'erreur commise dans le résultat est mesurée par l'angle ω de $M'M'_1$ avec la perpendiculaire à AB menée par O, milieu de AB.

Prenons comme origine ce point O et pour axe des x la droite AB. Les coordonnées de M' seront $y = OM' \cos \omega$, $x = OM' \sin \omega$.

D'ailleurs,
$$\operatorname{tg} M'AO = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{a + x} = \frac{OM' \cos \omega}{a + OM' \sin \omega}$$

et
$$\operatorname{tg} M'BO = \operatorname{tg} (\alpha + h) = \frac{y}{a - x} = \frac{OM' \cos \omega}{a - OM' \sin \omega}.$$

De ces deux égalités on tire
$$\frac{\sin \omega}{\cos \omega} = \operatorname{tg} \omega = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + h) - \operatorname{tg} \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha + h)}.$$

L'erreur h étant très petite, la quantité $\operatorname{tg}(\alpha + h) - \operatorname{tg} \alpha$ a pour limite $\frac{h}{\cos^2 \alpha}$, donc
$$\operatorname{tg} \omega = \frac{h}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{h}{2 \sin^2 \alpha}.$$

Dans le cas où l'angle α est de $60°$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \omega = \frac{2h}{3}$ et, par conséquent, $\omega < \frac{2h}{3}$.

L'erreur commise sur le résultat est donc encore plus petite que l'erreur de l'équerre ; elle sera donc négligeable si l'équerre est suffisamment mince.

Nous dirons donc pour conclure, que même avec des instruments médiocres, on peut, dans bien des circonstances, arriver quand même à des résultats suffisamment exacts.

J. CARON.

QUESTIONS PROPOSÉES

2004. — L'équation
$$x^m - \frac{m}{1} hx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} + \ldots = 0,$$
dans laquelle on suppose
$$h^2 - ax = 0,$$
ne peut avoir toutes ses racines réelles que si elle a toutes ses racines égales. Après avoir donné une démonstration par le théorème de Rolle, on donnera une vérification en exprimant l'hypothèse au moyen des racines $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

G. F.

2005. — Étudier la surface d'équation $x + xy + z = 0$.

C'est une surface réglée. Construire géométriquement une génératrice. Construire géométriquement un point de la ligne de striction. Trouver les traces et les contours apparents sur les plans de projection.

Gaston BEAUVAIS.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

1966. — *Trouver le quotient des déterminants*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^\beta & b^\beta & c^\beta \\ a^\alpha & b^\alpha & c^\alpha \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}, \qquad (\alpha > \beta).$$

On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^\beta & b^\beta & c^\beta \\ a^\alpha & b^\alpha & c^\alpha \end{vmatrix} = b^\beta c^\alpha - c^\beta b^\alpha + c^\beta a^\alpha - a^\beta c^\alpha + a^\beta b^\alpha - b^\beta a^\alpha,$$

et

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b).$$

Nous avons donc à calculer le quotient

$$(1) \qquad Q_{\alpha,\beta} = \frac{b^\beta c^\alpha - c^\beta b^\alpha + c^\beta a^\alpha - a^\beta c^\alpha + a^\beta b^\alpha - b^\beta a^\alpha}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

Examinons d'abord le cas particulier bien connu où $\beta = 1$. Nous avons

$$Q_{\alpha,1} = \frac{a^\alpha(b-c) + b^\alpha(c-a) + c^\alpha(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)} = -\left[\frac{a^\alpha}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^\alpha}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^\alpha}{(c-a)(c-b)}\right].$$

Nous allons montrer que ce quotient est égal à la somme de tous les termes obtenus en remplaçant dans $-a^p b^q c^r$ les exposants p, q, r par toutes les valeurs entières positives ou nulles vérifiant la relation $p + q + r = \alpha - 2$.

On vérifie aisément que l'on a

$$Q_{2,1} = -1, \qquad Q_{3,1} = -(a+b+c), \qquad Q_{4,1} = -(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab), \ldots$$

Supposons la loi vraie pour $Q_{\alpha,1}$ et démontrons qu'elle est vraie pour $Q_{\alpha+1,1}$. On a

$$Q_{\alpha+1,1} - aQ_{\alpha,1} = \frac{(b^{\alpha+1} - ab^\alpha)(c-a) + (c^{\alpha+1} - ac^\alpha)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)} = -\frac{b^\alpha - c^\alpha}{b-c}$$

ou

$$Q_{\alpha+1,1} = aQ_{\alpha,1} - (b^{\alpha-1} + cb^{\alpha-2} + \ldots + c^{\alpha-1}).$$

Cela démontre la proposition, car $aQ_{\alpha,1}$ est la somme de tous les termes $-a^p b^q c^r$ ($p + q + r$ étant égal à $\alpha - 1$) dans lesquels $p \geq 1$, et $-(b^{\alpha-1} + cb^{\alpha-2} + \ldots + c^{\alpha-1})$ est la somme des termes analogues dans lesquels $p = 0$.

On peut donc écrire $\qquad Q_{\alpha,1} = -\Sigma a^p b^q c^r \qquad (p + q + r = \alpha - 2).$

Je dis maintenant que l'on a, quels que soient α et β,

$$Q_{\alpha,\beta} = Q_{\alpha+1,1}Q_{\beta,1} - Q_{\beta+1,1}Q_{\alpha,1}.$$

En effet, le second membre s'écrit

$$\left[\frac{a^{\alpha+1}}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^{\alpha+1}}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^{\alpha+1}}{(c-a)(c-b)}\right]\left[\frac{a^\beta}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^\beta}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^\beta}{(c-a)(c-b)}\right]$$
$$-\left[\frac{a^\beta}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^\beta}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^\beta}{(c-a)(c-b)}\right]\left[\frac{a^{\alpha+1}}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^{\alpha+1}}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^{\alpha+1}}{(c-a)(c-b)}\right].$$

Rapprochons les termes correspondants de ces deux produits. Les termes de la forme

$\frac{a^{\ldots}}{(a-b)^2(a-c)^2}$. obtenus en multipliant des termes de même rang, disparaissent. Si l'on multiplie des termes de rangs différents, on obtiendra des différences telles que

$$\frac{b^{\ldots}c^{\ldots}-b^{\ldots}c^{\ldots}}{(b-c)(b-a)(c-a)(c-b)} \quad \text{ou} \quad \frac{b^{\ldots}(b-c)}{(b-c)(b-a)(c-a)(c-b)},$$

ou encore

$$\frac{b^{\ldots}c^{\ldots}}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

On retrouve ainsi tous les termes du quotient $Q_{2,2}$ sous la forme (1).

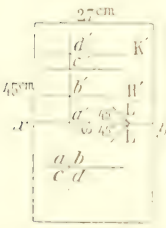
La formule (2) est donc établie. En remplaçant alors $Q_{2,1}$, $Q_{2,1}$, ... par leurs valeurs on obtiendra $Q_{2,2}$ sous forme d'une fonction symétrique de a, b, c.

Par exemple $Q_{2,2} = Q_{2,1}Q_{2,1} - Q_{2,0}Q_{\ldots}$ ..

ou $Q_{2,2} = \Sigma a^4 + \Sigma a^3b - \Sigma a^2b^2 - \Sigma a^2bc - \Sigma a^3 - \Sigma a^2b - \Sigma ab^2 + \Sigma a^2c + \Sigma abc + \Sigma a^2 + \Sigma ab$.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1957. — *Pas de titre extérieur. Titre intérieur : Ombres.*



Cadre 27cm sur 45cm. La figure de forme [illegible] en noir [illegible] au-dessus du petit axe du cadre.

[illegible] = [illegible], [illegible] = 10cm, [illegible] = 9cm, [illegible] = 12cm, [illegible] = 15cm,5.

Un hyperboloïde de révolution à une nappe dont l'axe est vertical a pour centre le point c, c' ; le rayon du cercle de gorge a 1cm,5 et les génératrices rectilignes font avec le plan horizontal un angle de 60°.

Il est limité aux deux plans horizontaux K et H'.

On déterminera la sphère inscrite dans l'hyperboloïde le long du parallèle situé dans le plan horizontal K'. On ne considérera que la partie de cette sphère située au-dessus du plan K'.

Le plan H' coupe l'hyperboloïde suivant un cercle par lequel passe un paraboloïde de révolution, dont le sommet est a, a'. On considère seulement la portion située au-dessous du plan H'.

Les trois corps précédents forment un solide dont on demande les projections ; on trouvera ensuite les ombres propres et portées sur les deux plans de projection, les rayons lumineux étant parallèles à la droite L,L'.

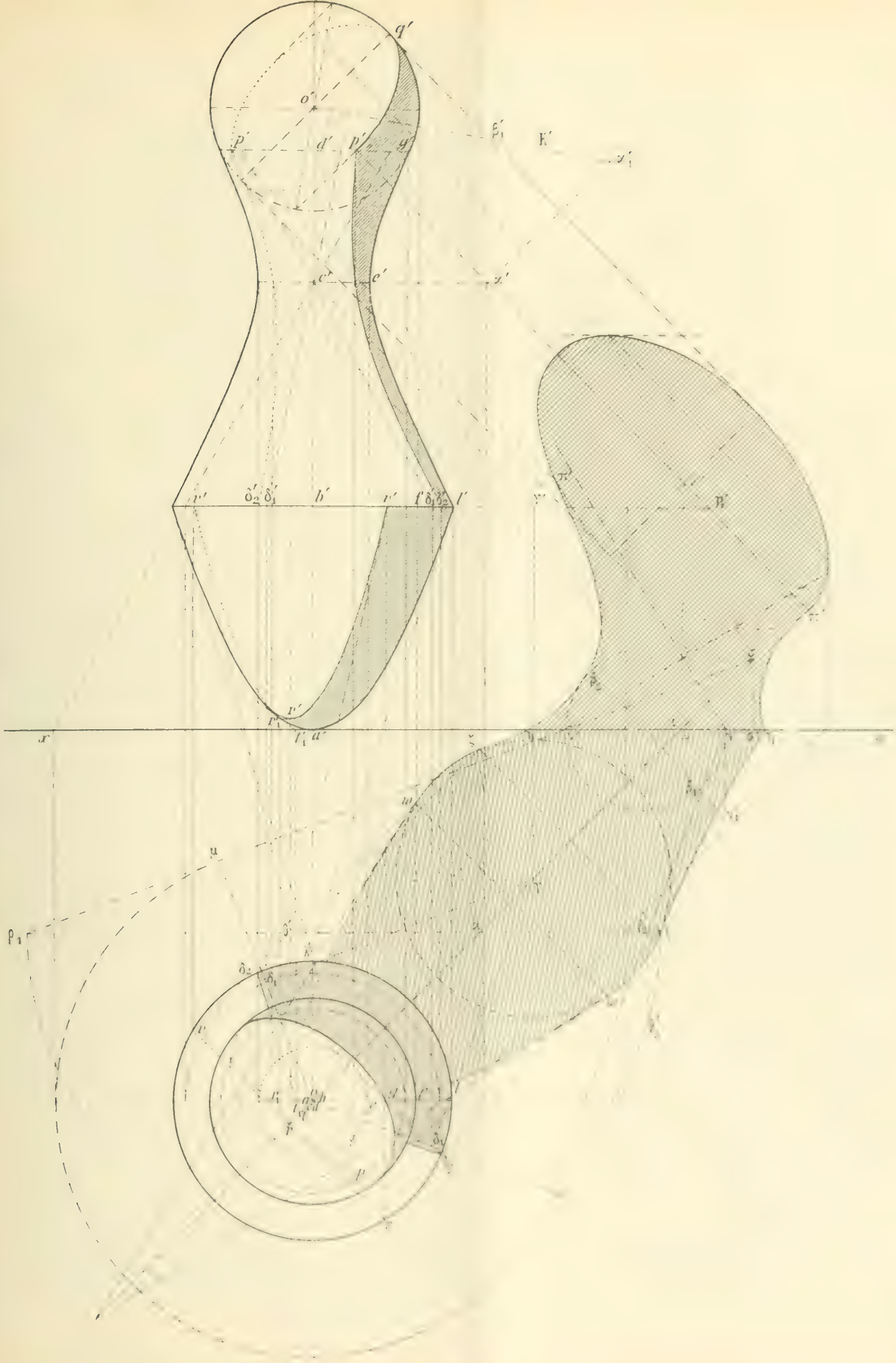
Les contours d'ombres qui existent vus et cachés seront tracés à l'encre noire ou à l'encre bleue ; on mettra des hachures sur les surfaces vues qui sont dans l'ombre ; la distance de deux hachures consécutives ne sera pas la même dans l'ombre propre et dans l'ombre portée.

Nota. — Les constructions seront faites à l'encre rouge, traits pleins plutôt fins. On déterminera les points et les tangentes remarquables. Les tangentes seront dessinées en traits rouges un peu plus accentués aux environs des points de contact (flèches inutiles).

(Ecole Centrale, concours de 1911.)

Construction du solide. — Le contour apparent vertical du solide se compose des contours apparents des trois surfaces définies par l'énoncé et limitées aux parallèles H' et K'. On a immédiatement le cône asymptote de l'hyperboloïde puisque la génératrice fait l'angle de 60° avec le plan horizontal, soit cf, $c'f$. Il donne les asymptotes de l'hyperbole méridienne dont le demi-axe transverse $c'e'$ est connu, et l'on peut construire cette hyperbole par points. En lui menant la normale en g, g', on a le centre o' de la sphère inscrite le long du parallèle R' et le rayon est $o'g'$. La parabole méridienne du paraboloïde qui limite le solide à sa partie inférieure est déterminée par son axe $a'b'$, son sommet a' et le point l'. On en trouve le foyer, et par suite le paramètre en construisant la sous-tangente du point l' qui coupe l'axe au point λ' tel que $a'\lambda' = a'b'$. En joignant $\lambda'l'$ on a la tangente et on en déduit la normale en l', dont la projection sur l'axe donne le paramètre. On a donc tout ce qu'il faut pour construire la parabole méridienne $a'l'$ qui complète le contour apparent vertical. Le contour apparent horizontal se compose du parallèle bl, base commune de l'hyperboloïde et du paraboloïde, et du cercle équateur of de la sphère.

Ombre propre. — L'ombre propre sur la surface sphérique est le grand cercle dont le plan est perpendiculaire à la direction L, L' ; il se projette, en raison de la symétrie des projections L et L' par rapport à xy, suivant deux ellipses égales sur le plan vertical et sur le plan horizontal. On a le petit axe $o'p'$ de la projection


q'
o'
p'
d'
p'
q'
c'
c'
x'
b'
r'
f'
l'
r'
r'
a'
x
u
w
K
4
r
l
d
c
f
p
p

verticale, par exemple, en rabattant, sur le plan de front du centre de la sphère, le plan de bout qui projette la direction L, L′ menée par le centre ; la perpendiculaire à cette direction rabattue donne la trace du plan de l'ombre propre sur ce plan de bout, c'est-à-dire le diamètre dont la projection verticale est le petit axe de l'ellipse, $o'p'$. Le grand axe est le diamètre $o'q'$ perpendiculaire à la direction L′. L'ombre propre sur l'hyperboloïde est l'hyperbole dont le plan est conjugué de la direction L, L′ ; ce plan est le même pour le cône asymptote et pour l'hyperboloïde. Nous l'obtenons en menant les plans tangents au cône parallèlement à L, L′, et pour cela, par la trace γ, γ' de cette direction, menée par le sommet du cône, sur le plan H′ que nous lui donnons pour base, nous menons les tangentes à cette base ; elles déterminent les génératrices de contact $c\delta_1$ dont le plan est le plan cherché. La trace de ce plan sur le plan H′ coupe le parallèle de l'hyperboloïde aux points δ_2, d'où part l'hyperbole d'ombre propre qui a pour asymptotes les projections des génératrices $c\delta_1$, $c'\delta'_1$. On peut donc tracer cette hyperbole par points ; on en a les points tels que p, p' situés sur le parallèle K′ en prenant l'intersection de ce parallèle avec la trace du plan diamétral $c\delta_1\delta_1$ déterminé précédemment ; ces points coïncident avec ceux où l'ellipse ombre propre de la sphère rencontre ce même parallèle, puisque la sphère et l'hyperboloïde ont les mêmes plans tangents tout le long de ce parallèle.

L'ombre propre du paraboloïde est la parabole située dans le plan conjugué de la direction L, L′ ; ce plan est d'ailleurs vertical comme l'axe de la surface ; nous en aurons la trace horizontale en amenant par une rotation la direction L, L′ à être de front et en menant à la parabole méridienne une tangente parallèle à la direction ainsi obtenue. Le point de contact r'_1 donne le sommet de la parabole dont le plan serait alors de profil et nous le ramenons à sa vraie position par une rotation inverse, en r, r' ; la tangente vr à l'arc r_1r donne la projection horizontale de l'ombre propre, la projection verticale étant la parabole dont l'axe est la verticale du point r' et dont on connaît le sommet et deux points, v' ; on peut donc la tracer comme on l'a fait pour la parabole méridienne en menant d'abord les tangentes $\theta'v'$ aux points v'. On remarquera que ces points v, v' ne coïncident pas avec les points δ_2, δ'_2 où l'ombre propre de l'hyperboloïde coupe le même parallèle H′, car les surfaces ne se raccordent pas le long de ce parallèle.

Ombre portée. — L'ombre portée par la surface sphérique est l'ellipse intersection du cylindre circonscrit parallèlement à L, L′ avec le plan vertical ; le petit axe de cette ellipse est perpendiculaire à la direction $o'w'$ et égal au diamètre de la sphère ; le demi grand axe est précisément la longueur $o'\beta'_1$, puisque l'on peut regarder $q'\beta'_1$, comme le rabattement, sur le plan de front du centre o, o', de la génératrice du cylindre qui est dans le plan de bout projetant la direction L, L′ sur le plan vertical. On peut donc tracer cette ellipse, dont le centre w' est connu. On peut déterminer directement les points où la tangente est horizontale en remarquant qu'ils proviennent des points de l'ombre propre où le plan tangent à la sphère est parallèle à xy ; ce sont donc les points où la courbe d'ombre propre traverse le méridien de profil de la sphère. De même, les points où la tangente est verticale proviennent de ceux où la courbe d'ombre propre traverse l'équateur. Il n'y a pas d'ombre portée sur le plan horizontal, puisque toute l'ellipse est située au-dessus de ce plan.

L'ombre portée par l'hyperboloïde est la trace, sur chaque plan de projection du cylindre hyperbolique qui a pour directrice l'ombre propre, ses génératrices étant parallèles à L, L′. Les plans tangents à ce cylindre le long de la courbe d'ombre propre sont les mêmes que pour l'hyperboloïde.

On a donc immédiatement les asymptotes de chaque hyperbole en prenant les traces, sur chaque plan de projection, des plans tangents au cône asymptote de l'hyperboloïde parallèles à L, L′. On a ainsi, pour la projection horizontale, les asymptotes $\sigma\mu$ et pour la projection verticale les asymptotes $\tau'\nu'$. On connaît d'ailleurs sur l'hyperbole horizontale les points ζ, où elle se raccorde avec l'ombre portée par le parallèle horizontal H′ et qui n'est autre qu'un cercle égal, de centre γ. Ces points ζ sont en effet les ombres portées par les points δ_2, δ'_2. On est donc ramené à construire une hyperbole connaissant deux asymptotes et un point. En particulier, on a les points η où elle coupe xy par la construction connue. Nous avons construit la moyenne proportionnelle $\rho_2\rho'_2$ entre les segments $\zeta\rho_1$ et $\zeta\rho_2$ déterminés par les asymptotes sur la parallèle à xy, et nous avons ensuite construit les longueurs $\nu'_1\beta_1$ et $\nu'_1\beta_2$, dont on a la différence $\beta_1\beta_2$ et la moyenne proportionnelle $\nu'\nu'_1 = \rho_2\rho'_2$. Ces longueurs donnent les distances $\nu'\eta$ que l'on cherche. L'ombre portée sur le plan vertical est l'hyperbole de centre τ', d'asymptotes $\gamma'\tau'$ et passant par les points η. On sait de plus qu'elle se raccorde avec l'ellipse obtenue précédemment aux points π', ombres des points p' communs aux deux courbes d'ombre propre. On peut, comme pour l'ellipse, construire les points de l'hyperbole où la tangente est perpendiculaire à xy en prenant l'ombre des points où l'hyperbole d'ombre propre traverse le cercle de gorge de l'hyperboloïde.

L'ombre portée par le paraboloïde est la parabole, section du cylindre de génératrices parallèles à L, L′ et qui a pour directrice la parabole d'ombre propre, par le plan horizontal. En nous servant de la rotation qui a donné le sommet de la parabole d'ombre propre, nous obtenons au point t'_1, t_1 la position qu'aurait le sommet de la parabole d'ombre portée si les rayons lumineux conservaient la même pente mais étaient de front. En ramenant ce point en t, nous avons le sommet cherché. D'ailleurs, la parabole d'ombre portée passe par les

points w, ombres des points v, et se raccorde en ces points avec le cercle γ dont il a déjà été question. On peut donc construire cette parabole comme les précédentes, connaissant l'axe, le sommet et les points w.

On voit que les courbes d'ombre portées par le paraboloïde et l'hyperboloïde sur le plan horizontal sont réunies l'une à l'autre par les arcs de cercle $w\zeta$, qui donnent l'ombre portée par les arcs du parallèle H' qui séparent les points où ce parallèle rencontre les deux courbes d'ombre propre. Elles sont tangentes à ces arcs de cercle, comme nous l'avons dit, puisque en chacun des points tels que v le plan tangent à la surface considérée passe par la tangente au parallèle, en sorte que sa trace horizontale donne la tangente à l'ombre portée par le parallèle aussi bien que la tangente au point w à l'ombre portée par la surface.

La visibilité des courbes d'ombre propre n'offre aucune difficulté, et il en est de même des courbes d'ombre portée.

Bonnes solutions : MM. Amblard, à Ruines (Cantal) ; A. Roussiat, à Fournes-en-Weppes.

ÉCOLE CENTRALE (1911)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*fin*).

5788. — Etant données deux droites, trouver leur perpendiculaire commune, sa vraie grandeur et porter sur les droites données, à partir des points A et B de rencontre avec la perpendiculaire commune, des longueurs égales à cette vraie grandeur. Soient D et C les points obtenus. Construire le parallélépipède d'arêtes AD, AB, BC.

5789. — On donne un triangle abc, $a'b'c'$, base d'un prisme dont la direction des arêtes est connue ; le prisme a une hauteur h ; le déterminer.

5790. — On donne un quadrilatère dans un plan de bout ; c'est la base d'un prisme dont les arêtes ont une direction donnée. On demande sa section droite par un plan passant par un point donné de la ligne de terre.

5791. — On donne un pentagone régulier dans le plan horizontal ; il a un côté parallèle à la ligne de terre. C'est la base d'une pyramide régulière dont le sommet est dans le second bissecteur. On coupe la pyramide par un plan horizontal ; on forme ainsi un tronc de pyramide. Lignes vues et cachées ; ombres propre et portée, les rayons lumineux étant à 45°.

5792. — On donne deux prismes : l'un, dont la base est un quadrilatère du plan horizontal, a des génératrices de front, l'autre a pour base un triangle du plan vertical et des génératrices horizontales. — Intersection.

5793. — On donne deux droites $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$; les faire tourner autour d'une verticale donnée, de façon que leurs projections verticales deviennent parallèles.

5794. — On donne deux droites, sur la première un point (a, a'), sur la seconde un point (c, c'). A partir de ces points, on porte sur les deux droites dans des directions données, des segments de longueur l. Soient ab, $a'b'$, cd, $c'd'$ les deux segments obtenus. Amener par une rotation le segment ab, $a'b'$ à coïncider avec l'autre, le point (a, a') venant en (c, c') et le point (b, b') en (d, d'). Angle de rotation.

5795. — On donne deux droites $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$; une horizontale $(ef, e'f')$ s'appuie sur ces deux droites en (e, e') et (f, f') ; lieu du point (m, m') qui divise $(ef, e'f')$ dans un rapport donné, quand l'horizontale varie.

5796. — On donne un plan PxQ' ; une conique est dans ce plan et sa projection horizontale est un cercle donné. — Trouver la vraie grandeur de cette conique.

5797. — On donne deux droites qui se coupent en (o, o') et dans le plan de ces deux droites une ellipse dont la projection horizontale est un cercle ; soit ensuite un point (s, s') quelconque. Chercher les contours apparents du cône de sommet (s, s') et dont la directrice est la conique donnée.

5798. — On donne une droite horizontale (A, A') et un point (α, α') dans le plan défini par la droite et le point ; on donne un cercle dont le rabattement, sur la gauche, autour de l'horizontale (A, A') est donné en C. Chercher les contours apparents d'un cylindre dont la directrice est le cercle du plan et les génératrices sont parallèles à une direction donnée quelconque.

5799. — On donne un cône oblique de sommet (s, s') dont la trace est un cercle du plan horizontal. — Trouver ses plans principaux. — Mener à ce cône un plan tangent perpendiculaire à un plan donné.

5800. — On donne un plan par une horizontale et une droite de front ; leur point de rencontre est le centre d'un cercle de rayon donné du plan. Ce cercle est la section droite d'un cylindre. Mener à ce cylindre un plan tangent faisant un angle α avec le plan vertical.

5801. — On donne un cône de révolution par son axe, quelconque, son sommet et deux de ses génératrices. Mener un plan tangent à ce cône parallèlement à une droite donnée.

5802. — On donne deux droites $(ab, a'b')$, $(sb, s'b')$. La première est génératrice d'un cône de révolution de sommet (s, s') et d'axe $(sb, s'b')$. Mener par un point (α, α') un plan tangent à ce cône. — Plan diamétral conjugué des cordes verticales dans le cône. — Etant donnée la projection verticale d'un point du cône, trouver sa projection horizontale.

5803. — On donne un cône dont la trace est un cercle du plan horizontal, trouver le cône supplémentaire ayant même sommet que le cône donné. — Trouver la trace horizontale, intégrale en ses points, gauche à l'infini.

5804. — On donne un cône oblique de sommet (s, s') dont la base est un cercle C du plan horizontal. On donne ensuite une droite (D, D'). Trouver une normale commune à la droite et au cône.

5805. — On donne un cercle du plan horizontal ; c'est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à une direction quelconque. On donne ensuite un cône de sommet (s, s') dont la base est un cercle du plan vertical. Normales communes aux deux surfaces.

5806. — On donne un plan par ses traces. Une courbe, dans ce plan, se projette horizontalement suivant un cercle ; c'est la base d'un cône de sommet (s, s') pris sur xy. Contour apparent horizontal. On considère le plan vertical mené par le centre du cercle, perpendiculairement au plan donné. Point courant et tangente à l'intersection du cône par ce plan vertical.

5807. — Dans un plan PαQ' donné par ses traces se trouve une ellipse dont la projection horizontale est un cercle. Cette ellipse est la base d'un cône dont le sommet (s, s') est sur la ligne de terre ; sa est une génératrice du contour apparent horizontal du cône. — Intersection par un plan vertical dont la trace est parallèle à sa. — Axe et sommet de la courbe en projection.

5808. — On donne un cylndre par sa base, qui est un cercle dans le plan horizontal, et la direction de ses génératrices. — Déterminer la section droite du cylindre par un plan mené par un point donné de la ligne de terre.

5809. — Mener par une droite (D, D'), de front, un plan qui coupe suivant une parabole un cône oblique de sommet (s, s') et dont la base est un cercle du plan horizontal.

5810. — On donne un cylindre par sa base et la direction de ses génératrices ; mener par un point donné (a, a') un plan qui détermine une section circulaire dans le cylindre donné.

5811. — On donne un plan vertical P et dans ce plan une conique dont la projection verticale est un cercle donné ; cette conique est la base d'un cône de sommet (s, s'). On coupe le cône par un plan vertical dont la trace est parallèle à la projection horizontale d'une génératrice de contour apparent horizontal du cône. Intersection. Mener ensuite d'un point donné du plan sécant une tangente à l'intersection.

5812. — On donne un cône de révolution d'axe vertical que l'on coupe par un plan PαQ'. Trouver les sommets en projection horizontale, puis dans l'espace. Trouver de même les foyers en projection, puis dans l'espace.

5813. — Intersection d'un cône oblique à base circulaire dans le plan horizontal avec le premier bissecteur ; la section est la base d'un cylindre de génératrices données. Trouver le contour apparent de ce cylindre.

5814. — On donne un cône de révolution d'axe vertical ; on le coupe par un plan de bout. On demande la trace horizontale d'un cône de sommet (t, t') donné, ayant pour base la section du cône par le plan de bout. Trouver a priori les points de la trace qui sont sur la ligne de terre.

5815. — On donne un cône de révolution d'axe vertical. — Tracer sur ce cône une ellipse égale à une ellipse donnée.

5816. — Intersection d'un cône de révolution donné, d'axe de front, par un plan quelconque.

5817. — On donne un cercle et un triangle dans le plan horizontal ; le cercle est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à une ligne de front donnée ; le triangle est la base d'un prisme dont les génératrices sont parallèles à une direction donnée, également de front. Intersection du prisme et du cylindre.

5818. — On donne un cylindre dont la base est un cercle du plan vertical tangent à la ligne de terre ; ses génératrices sont parallèles à une direction horizontale donnée. On donne ensuite un cône de révolution d'axe vertical. Ombres propre et portée du solide commun aux deux surfaces (rayons à 45°). Intersection du cylindre par un plan donné par ses traces. Tangente de front à la section.

5819. — On coupe un cône de révolution d'axe vertical par un plan. On développe la courbe d'intersection : trouver les points de la section qui donnent des points d'inflexion dans le développement.

5820. — On donne une droite (D, D') ; trouver un point sur cette droite, tel que la somme des carrés de sa cote et de son éloignement soit une quantité donnée.

5821. — Mener par un point donné une droite dont les distances à deux droites données soient l et λ. — Pour faire l'épure, l'éprendre l'une des droites données verticale, l'autre de front.

5822. — On donne un cylindre de révolution d'axe vertical, limité par deux plans horizontaux. Sur ce cylindre, on place un deuxième cylindre de rayon plus grand et limité par un troisième plan horizontal. Ombres propre et portée du solide formé, les rayons lumineux étant à 45°.

5823. — On donne un cercle du plan horizontal comme base d'un cône de révolution de sommet donné, au-dessous du plan horizontal. On coupe ce cône par le plan horizontal ; on forme ainsi un tronc de cône dont on demande les ombres propre et portée (rayons lumineux à 45°).

5824. — Un cône de révolution a pour base un cercle de centre o, o' dans un plan de bout Q' ; le rayon du cercle est donné, l'axe du cône est une perpendiculaire à Q' et le sommet (s, s') est donné. On coupe le cône par un plan perpendiculaire à l'axe ; on a ainsi un tronc de cône ; le déterminer. — Trouver son ombre sur les plans de projection, la direction des rayons lumineux étant donnée.

5825. — On donne deux cônes dont les bases sont deux cercles du plan vertical et les sommets deux points du plan horizontal sur une parallèle à la ligne de terre. Intersection de ces deux cônes.

5826. — On donne deux cônes dont les bases sont deux courbes situées dans deux plans de bout et projetées horizontalement suivant deux cercles. Les sommets de ces cônes sont sur une même parallèle à la ligne de terre. Intersection des deux cônes.

5827. — Points à l'infini dans l'intersection de deux cônes.

5828. — On donne deux cercles concentriques C et C_1 dans le plan horizontal ; le premier est la base d'un cône de révolution d'axe vertical et de sommet (s, s'), le second est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à une génératrice de front du cône. Intersection du cône et du cylindre.

5829. — On donne deux cercles tangents intérieurement dans le plan horizontal : soit (a, a') le point de tangence. Le

plus grand des cercles est la base d'un cône de sommet (s, s') donné ; le plus petit, la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à sa, $s'a'$. Intersection du cône et du cylindre.

5830. — On donne dans le plan horizontal un cercle et une ellipse tangents en un point (m, m') ; le cercle est la base d'un cône de sommet (s, s'), l'ellipse est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à sm, $s'm'$. Intersection du cône et du cylindre.

5831. — On donne un cône de révolution d'axe vertical ; on donne ensuite dans le plan horizontal une ellipse dont le grand axe est parallèle à la ligne de terre et dont un sommet du grand axe est le pied de l'axe du cône. Cette ellipse est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à une génératrice de contour apparent vertical du cône. Intersection du cône et du cylindre.

5832. — On donne un cône ayant pour base un cercle du plan horizontal, et dans le même plan une hyperbole qui est la base d'un cylindre à génératrices de front. Intersection des deux surfaces.

5833. — Un cône est donné par son sommet (s, s'), quelconque et par sa base qui est un cercle dans le plan horizontal ; on a aussi un cylindre dont la base est un cercle du plan vertical et dont les génératrices sont de bout. Intersection des deux surfaces.

5834. — On donne un cône dont la base est un cercle du plan horizontal et dont le sommet (s, s') est tel que l'une des génératrices de contour apparent horizontal soit de front ; on donne ensuite un cylindre dont la base est un cercle du plan vertical et dont une génératrice est une horizontale passant par (s, s'). Intersection.

5835. — On donne un cône de révolution dont l'axe est de bout et le sommet en (s, s'); puis un cylindre vertical dont la base est un cercle C du plan horizontal, tangent à la projection horizontale de l'une des génératrices de contour apparent horizontal du cône. Intersection du cône et du cylindre. Développement du cône et de la courbe d'intersection.

5836 — Un cône a pour base un cercle C′ du plan vertical et pour sommet (s, s') ; $(sa, s'a')$ est une génératrice de contour apparent vertical de ce cône. On donne ensuite un cylindre dont la base est une hyperbole du plan horizontal, et dont les génératrices sont parallèles a $(sa, s'a')$. Intersection du cône et du cylindre.

5837. — On donne une droite du plan horizontal et un point sur cette droite. Ce point est le sommet d'un cône de révolution d'angle au sommet donné et dont la droite est une des génératrices. On donne ensuite un cylindre de révolution de rayon donné et tangent au plan horizontal suivant cette même droite. Intersection du cône et du cylindre.

5838. — On donne deux cylindres dont les bases sont, dans le plan horizontal, pour l'un un cercle, pour l'autre une hyperbole dont une asymptote est parallèle à la ligne de terre. Les génératrices des deux cylindres sont de front. Intersection des deux cylindres. Points à l'infini dans l'intersection de deux cylindres en général.

5839. — On donne deux hyperboles dans le plan horizontal ; ce sont les bases de deux cylindres dont la direction des génératrices est donnée. Intersection des deux cylindres.

5840. — On donne une hyperbole dans le plan horizontal; c'est la base commune des deux cylindres; on donne la direction des génératrices pour chacun d'eux ; trouver l'intersection.

5841. — Déterminer une sphère de rayon donné qui passe par trois points donnés d'un même plan vertical.

5842. — Lieu des centres des sphères passant par deux points donnés (a, a'), (b, b') et tangentes au plan horizontal.

5843. — On donne une sphère et deux plans dont l'un est de bout et l'autre quelconque. Ces deux plans coupent la sphère suivant deux petits cercles. Déterminer un grand cercle de la sphere tangent aux deux petits cercles.

5844. — On donne une sphère (o, o') et un plan PαQ′ qui coupe la sphère suivant un petit cercle. Mener par un point (a, a') de la surface un grand cercle perpendiculaire au petit cercle.

5845. — Mener d'un point (a, a') le cône circonscrit à une sphère donnée. Courbe de contact. Etant donné un plan qui coupe une sphère, trouver son pôle.

5846. — Plan tangent commun à trois sphères.

5847. — Mener un plan tangent à une sphère donnée faisant l'angle α avec une horizontale donnée et l'angle β avec une droite de front donnée.

5848. — Angle au sommet d'un cône de révolution passant par les trois droites $(sa, s'a')$, $(sb, s'b')$, $(sc, s'c')$.

5849. — On donne deux droites $(sa, s'a')$, $(sb, s'b')$; ce sont les axes de deux cônes de révolution de même sommet (s, s'), dont on donne les angles au sommet. Mener un plan tangent commun à ces deux cônes.

5850. — On donne deux plans par leurs traces; on considère un trièdre formé par ces deux plans et le plan horizontal. Construire le cône de révolution inscrit dans ce trièdre.

5851. — On donne une sphère et un cylindre circonscrit à cette sphère, de génératrices parallèles à une direction donnée. Intersection de ce cylindre avec une droite quelconque ab, $a'b'$ et plans tangents aux points de rencontre.

5852. — Ombres propre et portée d'une sphère donnée, tangente au plan horizontal. Les rayons lumineux étant à 45°.

5853. — On donne une sphère par ses contours apparents, un plan vertical P et un point (s, s'). Chercher le lieu du cône de sommet (s, s') ayant pour directrice la section de la sphère par le plan P.

5854. — On donne une sphère et un cône de révolution donné par son sommet, son axe quelconque, et son angle au sommet. Normale commune aux deux surfaces.

5855. — Mener par un point (a, a') un plan qui fasse avec le plan horizontal un angle α et avec un plan vertical donné un angle β.

5856 — Mener par la ligne de terre un plan faisant l'angle α avec un plan donné.

5857. — Mener par un point O de l'espace une droite qui soit à une distance a d'un point donné A et à une distance b d'une droite donnée. Faire l'épure.

5858. — Construire un trièdre connaissant : 1° une face et les deux dièdres adjacents ; 2° deux faces et le dièdre compris ; 3° deux faces et le dièdre opposé à l'une d'elles ; 4° deux dièdres et la face opposée à l'un d'eux.

5859. — On donne un tore d'axe vertical, puis la projection verticale m d'un point M du tore. Trouver sa projection horizontale, le plan tangent en m, m' et déterminer la section du tore par ce plan tangent.

5860. — Une verticale tourne autour d'une droite de front. Etant donnée la projection verticale d'un point de la surface engendrée, trouver sa projection horizontale. Plan tangent en ce point.

5861. — On donne une droite de front $(ab, a'b')$; dans le plan de front ab, on a un cercle (o, o'). Ce cercle tourne autour de $(ab, a'b')$ et engendre un tore. Connaissant la projection verticale d'un point du tore, trouver sa projection horizontale.

5862. — On donne une ellipse dans un plan de bout P' : elle se projette horizontalement suivant une ellipse dont le grand axe est parallèle à xy. L'ellipse donnée tourne autour de la verticale z, z' d'un foyer f de sa projection. Trouver la méridienne de la surface engendrée.

5863. — Une surface de révolution d'axe vertical est engendrée par une conique d'un plan de front: cette conique a pour projection verticale un cercle. Trouver la méridienne principale de la surface.

5864. — On donne un cylindre oblique à base circulaire dans le plan horizontal. On le coupe par un plan; on fait tourner la section autour d'un axe vertical. Trouver la méridienne de la surface ainsi engendrée.

5865. — On donne une droite de front, un plan de front, et dans ce plan un cercle. Ce cercle tourne autour de la droite donnée. Trouver la méridienne de la surface engendrée.

5866. — Un paraboloïde de révolution a pour axe une droite de front (A, A'): il passe par deux points (a, a'), (b, b'). Trouver la méridienne principale (construire une parabole connaissant l'axe et deux points).

5867. — On donne une droite D, D': c'est l'axe d'une surface de révolution engendrée par un cercle de centre donné, de rayon donné, dans un plan de profil donné. On demande les contours apparents de la surface.

5868. — Mener à un ellipsoïde de révolution d'axe vertical les plans tangents parallèles à un plan donné: distance des deux plans tangents.

5869. — On donne un ellipsoïde d'axe de front. Mener par un point donné (a, a') un plan tangent tel que le point de contact soit : 1° sur un parallèle donné ; 2° sur un méridien donné.

5870. — On donne un tore d'axe vertical; mener un plan tangent au tore en un point d'un plan méridien donné et parallèlement à une droite donnée.

5871. — On donne un tore d'axe vertical. On demande de mener à ce tore un plan tangent parallèlement à un plan donné par ses traces.

5872. — On donne un tore d'axe de front engendré par un cercle du plan de front de l'axe. Mener les plans tangents au tore parallèlement à un plan donné.

5873. — Soit un ellipsoïde de révolution d'axe vertical. Lui mener un plan tangent par une droite donnée ; cas d'une droite de front.

5874. — On donne un ellipsoïde de révolution d'axe vertical. Ombres propre et portée de cet ellipsoïde, parallèlement à une direction donnée.

5875. — On donne un hyperboloïde de révolution d'axe vertical engendré par une droite de front. Déterminer les contours apparents du cône de sommet (s, s') circonscrit à l'hyperboloïde.

5876. — On donne une droite de front qui tourne autour d'une verticale. Contours apparents du cylindre circonscrit à l'hyperboloïde, de génératrices parallèles à une direction donnée.

5877. — On donne une verticale et une droite (D, D') quelconque, qui tourne autour de la verticale. On considère le cône de sommet (s, s') donné, circonscrit à l'hyperboloïde engendré. On demande l'intersection d'une droite (Δ, Δ') avec ce cône.

5878. — On donne un paraboloïde de révolution d'axe vertical. On considère le cylindre circonscrit dont les génératrices sont parallèles à une direction (Δ, Δ') donnée. Sur ce cylindre on prend un point dont la projection verticale est m'. Trouver la projection horizontale m. Plan tangent en (m, m').

5879. — On donne un paraboloïde de révolution d'axe vertical. Trouver la courbe de contact d'un cylindre circonscrit dont les génératrices sont parallèles à une direction donnée.

5880. — On donne un tore d'axe vertical. D'un point quelconque (s, s') on mène un cône circonscrit au tore. Trouver la courbe de contact.

5881. — On donne une surface de révolution à axe vertical engendrée par une courbe projetée verticalement suivant une droite et horizontalement suivant un cercle. Courbe de contact du cône circonscrit à la surface et de sommet (s, s') donné.

5882. — Intersection d'une droite et d'un ellipsoïde de révolution d'axe vertical. Cas d'une droite de profil.

5883. — On donne deux points (a, a'), (b, b') sur une droite de front, puis une autre droite (D, D'). Trouver sur (D, D') les points tels que la somme de leurs distances aux deux points A et B soit égale à $2d$.

5884. — Intersection d'une droite qui rencontre l'axe d'un hyperboloïde de révolution avec cet hyperboloïde.

5885. — On donne la verticale oz, $o'z'$ comme axe d'un ellipsoïde de révolution ; le grand axe du contour apparent vertical situé sur $o'z'$ est donné. Cet ellipsoïde passe par un point (a, a') donné. Intersection de cet ellipsoïde avec le plan passant par (a, a') et la ligne de terre.

5886. — On donne un ellipsoïde de révolution d'axe de front. Intersection de cet ellipsoïde avec un plan vertical donné par sa trace horizontale. Sommets de la section dans l'espace. Contour apparent horizontal de l'ellipsoïde.

5887. — On donne un hyperboloïde de révolution d'axe vertical engendré par une droite de front. — Section plane de cet hyperboloïde par un plan de bout. — Axes et sommets de la section.

5888. — On donne un hyperboloïde de révolution engendré par une droite de front tournant autour d'une verticale. — Section par un plan donné; point et tangente ; nature de la section.

5889. — On donne un hyperboloïde de révolution d'axe vertical engendré par une droite de front; on donne ensuite une droite quelconque (A, A'). Mener par cette droite un plan coupant l'hyperboloïde suivant une hyperbole équilatère.

5890. — On donne un paraboloïde de révolution d'axe vertical ; on le coupe par le premier plan bissecteur. La section est la base d'un cône de sommet (s, s') donné. On demande la trace horizontale de ce cône.

5891. — On donne un plan de bout P' dans lequel se trouve une ellipse projetée horizontalement suivant un cercle. On fait tourner cette ellipse autour d'une verticale. Trouver la seconde courbe d'intersection du plan P' avec la surface ainsi engendrée. Mener ensuite par un point (a, a') un plan qui coupe la surface suivant des courbes se projetant horizontalement suivant des cercles.

5892 — Un paraboloïde de révolution d'axe vertical passe par quatre points donnés (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d'). Déterminer ce paraboloïde.

5893. — Intersection de deux cônes de révolution d'axes verticaux, situés dans un même plan de front et dont les sommets ont même cote.

5894. — Intersection de deux cônes de révolution d'axes verticaux et de même angle au sommet. Sommets de la courbe d'intersection.

5895. — On donne un cône de révolution d'axe vertical, puis dans le plan de front de l'axe, on donne deux droites dont les projections verticales sont parallèles à la ligne de terre. Ces deux droites forment la méridienne principale d'un cylindre de révolution. Intersection du cône et du cylindre. Points dans le plan de symétrie. Tangentes en ces points.

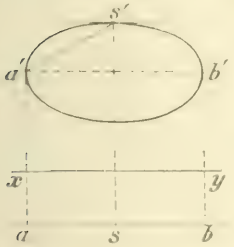
5896. — On donne une droite de front $(ab, a'b')$, axe d'un cône de révolution de sommet (s, s') et dont une génératrice $(sc, s'c')$ est parallèle à la ligne de terre. On donne ensuite un cylindre de révolution ayant pour axe la ligne de terre et dont une génératrice est $(sc, s'c')$. Intersection des deux surfaces.

5897. — On donne deux cônes de révolution de sommet commun s, s' ayant pour axes deux droites de front et engendrés par une même droite sd, $s'd'$. Intersection des deux cônes

5898. — Intersection d'un cône de révolution donné, d'axe vertical, avec une sphère ayant son centre dans le plan de front du sommet (s, s') du cône et son contour apparent vertical tangent en s' à la projection verticale d'une génératrice de contour apparent du cône.

5899. — On donne un ellipsoïde de révolution aplati, d'axe vertical. On donne ensuite un cône de révolution dont l'axe est la verticale du point le plus à gauche de l'ellipsoïde et dont une génératrice est la droite qui joint le point le plus à gauche au point le plus bas. Intersection des deux surfaces.

5900. — Intersection d'un ellipsoïde de révolution aplati, à axe vertical, avec un cône de révolution de sommet (s, s'), dont l'axe est parallèle à la ligne de terre et dont une génératrice est $(sa, s'a')$, [(s, s') point le plus haut de l'ellipsoïde, (a, a') point le plus à gauche].



5901. — On donne un ellipsoïde à axe vertical, et dans le plan vertical, un cercle qui coupe la méridienne principale de l'ellipsoïde C'est la base d'un cylindre à génératrices de bout. Intersection des deux surfaces. Développer l'intersection sur le cylindre.

5902 — On donne un ellipsoïde de révolution d'axe de front (z, z') soit (a, a') un point de cet axe ; on mène par (a, a') une horizontale $(ab, a'b')$, puis, dans le plan vertical qui la contient, la droite D, D' parallèle à $(az, a'z')$. La droite D, D' en tournant autour de $(ab, a'b')$, engendre un cylindre de révolution. Trouver l'intersection de l'ellipsoïde et du cylindre. Tangente en un point de cette intersection.

5903. — Un cercle d'un plan de front dont la projection verticale est C' tourne autour d'une verticale oz, $o'z'$ quelconque. On donne ensuite un cylindre de front dont C est la base. Intersection des deux surfaces de révolution.

5904. — On donne un hyperboloïde de révolution d'axe vertical, engendré par une droite de front, puis un cône de révolution dont le sommet est sur l'axe de l'hyperboloïde, dont l'axe est parallèle à la ligne de terre et dont une génératrice est donnée. Intersection des deux surfaces.

5905. — Intersection d'un cône de révolution à axe de front avec un hyperboloïde dont l'axe est dans le même plan de front que celui du cône.

5906. — On donne une droite de front A, A', axe d'un hyperboloïde de révolution dont une génératrice est B, B' (de front). Soit ensuite un point (s, s') dont la projection horizontale se trouve sur A, [illegible] le sommet d'un cône de révolution dont l'axe C, C' est de front et dont on donne une génératrice D, D', de front également. Intersection des deux surfaces [illegible].

5907. — Points à l'infini dans l'intersection de deux hyperboloïdes de révolution quelconques.

5908 — Intersection d'un ellipsoïde de révolution d'axe vertical avec une sphère dont le centre (ω, ω') est dans le plan de front du centre de l'ellipsoïde.

5909. — On donne un ellipsoïde de révolution d'axe vertical, et une sphère passant par un point donné (a, a') et le cercle de section de l'ellipsoïde par le plan horizontal de son centre. Intersection de l'ellipsoïde et de la sphère.

5910. — On donne dans un même plan de front deux ellipses ayant même petit axe ; la droite qui contient les grands axes est verticale La plus grande ellipse tourne autour de son grand axe, la plus petite autour de son petit axe. Intersection des deux ellipsoïdes de révolution engendrés.

5911. — On donne un paraboloïde de révolution d'axe vertical et de sommet (s, s'). Dans un plan de front P', on a une courbe dont la projection horizontale est le cercle C. Cette courbe est la base d'un cône dont le sommet est un point (a, a') du paraboloïde. Intersection des deux surfaces.

5912. — On donne deux paraboloïdes de révolution, d'axes verticaux, de sommets (a, a'), (b, b') et de méridiennes A et B'. Déterminer un point de l'intersection et la tangente en ce point. Sommets de la courbe de l'espace.

5913. — Intersection d'une sphère (ω, ω') et d'un tore d'axe vertical.

5914. — On donne un tore d'axe vertical ; on demande l'intersection de ce tore avec un cône dont le tore a pour projection verticale une droite et pour projection horizontale un cercle et dont le sommet est un point (s, s') de l'axe du tore.

5915 — On donne un tore d'axe vertical puis un point (a, a') sur son axe. Par (a, a') passe une horizontale, axe d'un deuxième tore dont la méridienne est située dans le plan horizontal de projection. Intersection des deux tores.

5916 — On donne deux cercles dans un même plan horizontal H. Ces deux cercles tournent l'un autour de $(ab, a'b')$, l'autre autour de $(cd, c'd')$, droites situées dans un même plan de front. Intersection des deux surfaces engendrées.

5917 — Démontrer que deux surfaces du second degré qui sont tangentes en deux points se coupent en général suivant deux coniques. Deux cônes sont circonscrits à une même sphère donnée, leurs sommets sont dans le plan de front du centre de la sphère. Intersection des deux cônes.

5918 — On donne un ellipsoïde de révolution d'axe vertical ; on considère le cône de sommet (s, s') circonscrit à l'ellipsoïde, puis le cylindre circonscrit le long de l'équateur. Intersection du cône et du cylindre.

5919. — On donne les projections horizontale et verticale d'une ellipse de l'espace. Trouver une deuxième ellipse ayant les mêmes projections. Angle des plans des deux ellipses.

5920. — Deux surfaces du second degré qui ont une courbe plane commune se coupent suivant une seconde courbe plane. Intersection de deux quadriques qui ont deux génératrices communes : 1° de systèmes différents; 2° de même système.

5921. — Recherche des points doubles en projection dans l'intersection de deux surfaces du second degré.

5922. — On donne une sphère de centre (o, o') et un cône de sommet (o, o') dont la directrice est une ellipse donnée dans le plan horizontal. Intersection des deux surfaces. Tangente horizontale.

5923. — On donne un ellipsoïde de révolution d'axe vertical, puis un cylindre dont la base est un cercle dans le plan horizontal et dont les génératrices sont de front. Intersection des deux surfaces. Génératrices du cylindre tangentes à l'ellipsoïde.

5924. — On donne un hyperboloïde de révolution à axe vertical, et, dans le plan horizontal, une hyperbole, base d'un cylindre dont les génératrices ont une direction donnée. Intersection des deux surfaces.

5925. — Un hyperboloïde de révolution est engendré par une droite de front qui tourne autour d'une verticale. On donne ensuite un cylindre dont la base est une ellipse du plan horizontal passant par la trace horizontale de la droite de front donnée et de génératrices parallèles à cette droite de front. Intersection de l'hyperboloïde et du cylindre.

5926. — On donne un hyperboloïde de révolution d'axe vertical engendré par une droite de front A, A'; sur A, A' on prend un point (a, a') et on considère la seconde génératrice de l'hyperboloïde qui passe par ce point. Soient c et d les traces horizontales de ces deux génératrices. On donne ensuite un cône de sommet (a, a') et dont la base est une conique du plan horizontal passant par c et d. Intersection du cône et de l'hyperboloïde.

5927. — On donne un paraboloïde hyperbolique par un plan directeur vertical P et deux génératrices horizontales. Tracer une autre génératrice. Ayant la projection verticale d'une génératrice, trouver sa projection horizontale.

5928. — Un paraboloïde hyperbolique est défini par un quadrilatère gauche donné, de côtés indéfinis. On donne un point du paraboloïde sur un des côtés du quadrilatère ; mener la deuxième génératrice qui passe par ce point. Direction de l'axe du paraboloïde.

5929. — On donne un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal par deux génératrices $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$, puis un point (e, e'). Mener par ce point (e, e') un plan tangent au paraboloïde donné ; point de contact. Ombre portée par le paraboloïde sur le plan horizontal, les rayons lumineux émanant de (e, e'). Plan polaire de (e, e').

5930. — On donne un paraboloïde hyperbolique de plan directeur horizontal défini par deux droites de front. Mener au paraboloïde un plan tangent parallèle à un plan donné.

5931. — On donne un paraboloïde hyperbolique par un plan directeur horizontal et deux génératrices quelconques. Trouver l'axe et le sommet de la surface.

5932. — On donne un paraboloïde hyperbolique de plan directeur horizontal par une génératrice verticale et une autre quelconque. Intersection de ce paraboloïde par un plan de bout P'.

5933. — Mener par une droite un plan qui coupe un paraboloïde hyperbolique suivant une hyperbole équilatère.

5934. — On donne un paraboloïde hyperbolique, dont un plan directeur est le plan horizontal, par deux génératrices $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$. On donne ensuite une droite horizontale H, H'. Mener par cette droite un plan tangent au paraboloïde donné.

5935. — Une droite variable s'appuie sur trois droites données (dont l'une est verticale) et engendre une surface. Connaissant la projection horizontale d'un point de la surface, trouver sa projection verticale. Génératrice parallèle à une génératrice donnée.

5936. — Intersection d'un paraboloïde hyperbolique de plan directeur horizontal défini par deux génératrices et d'un cylindre de bout dont la base est un cercle donné du plan vertical.

5937. — On donne un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal ; une génératrice est verticale et l'autre génératrice donnée est quelconque. Intersection avec une sphère donnée.

5938. — On donne un paraboloïde hyperbolique dont le plan directeur est un plan vertical P et défini par deux génératrices. Intersection de ce paraboloïde avec une sphère donnée.

5940. — On donne un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal défini par deux droites (A, A'), (B, B'), puis un paraboloïde de révolution d'axe de bout (Z, Z'), dont le sommet (z, z') est dans le plan vertical. Intersection.

5941. — On donne deux paraboloïdes hyperboliques ayant comme plan directeur commun le plan horizontal ; le premier est défini par deux droites quelconques (A, A'), (B, B'), le second par une verticale et une ligne de front. Intersection des deux surfaces.

QUESTIONS PROPOSÉES

2006. — Etant donné un rectangle ABCD, on considère l'enveloppe des droites qui partagent l'aire de ce rectangle dans le rapport k, et l'on demande d'étudier les formes prises par cette enveloppe quand k varie de 0 à $+\infty$.

Evaluer l'aire comprise à l'intérieur de la courbe fermée qui forme l'enveloppe cherchée.

Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire minima circonscrit à cette courbe et celles du rectangle d'aire maxima ?

A. Sainte-Laguë.

2007. — Résoudre l'équation

$$\cos 2x + \cos x - 1 = \sin \frac{3x}{2}.$$

En formant l'équation en $\sin \frac{x}{2}$, constater que cette équation du 4e degré a pour racine $\sin \frac{x}{2} = 1$ ($x = 180°$) et calculer les trois autres racines.

E. N. Barisien.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

22e Année. Mars 1912. N° 6.

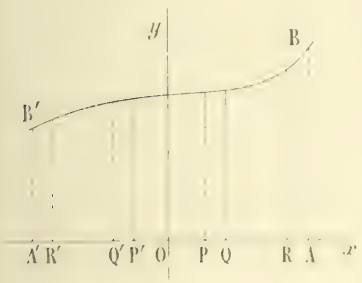
REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

FORMULE DE TCHÉBITCHEFF

par M. **A. Sainte-Laguë**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Douai.

Le calcul d'une intégrale définie se ramène en pratique à l'évaluation de l'aire d'un trapèze mixtiligne tel que ABB'A'. Parmi les formules d'approximation qui permettent d'évaluer cette aire, il y en a une plus précise que toutes les autres pour des calculs de même longueur : c'est la formule de Tchébitcheff.



Divisons AA' en deux parties égales par le point O, et posons $OA = OA' = a$; portons, de part et d'autre de O, des abscisses

$$\alpha = OP = OP' = 0{,}267\,a, \qquad \beta = OQ = OQ' = 0{,}422\,a,$$

$$\gamma = OR = OR' = 0{,}866\,a.$$

Désignons par $y_2, y_1, y_0, y'_1, y_2, y'_2$ les six ordonnées correspondantes.

L'aire à évaluer est approximativement

$$S = \frac{a}{3}(y_2 + y_1 + y_0 + y'_1 + y'_2).$$

On obtient cette formule comme il suit : (1)

Nous supposerons pour simplifier que $OA = OA' = a$ est l'unité de longueur. Nous allons montrer que la formule de Tchébitcheff est rigoureuse pour toutes les courbes d'équation

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6,$$

paraboles du sixième ordre, dont l'équation ne change pas de forme pour toute translation des axes ou pour toute homothétie de centre arbitraire. Ces courbes comprennent toutes les paraboles d'ordre moindre, en particulier les paraboles cubiques, les paraboles du second degré et les droites du plan ; il suffit en effet d'annuler les derniers coefficients.

L'aire limitée par une telle courbe entre les ordonnées $x = -1$ et $x = 1$ se détermine par l'intégrale indéfinie

$$Ax + B\frac{x^2}{2} + C\frac{x^3}{3} + D\frac{x^4}{4} + E\frac{x^5}{5} + F\frac{x^6}{6} + G\frac{x^7}{7}.$$

On trouve ainsi :

$$S = 2\left(A + \frac{C}{3} + \frac{E}{5} + \frac{G}{7}\right).$$

(1) Nous ne connaissons pas la démonstration de Tchébitcheff ; il est très probable qu'elle est [illegible] à celle que nous donnée ici.

Cherchons d'autre part 6 abscisses α, $-\alpha$, β, $-\beta$, γ, $-\gamma$, telles que l'on ait, quels que soient les coefficients A, B, C, D, E, F, G, la même valeur pour S, en prenant le produit par 2 du sixième de la somme des ordonnées correspondant à ces abscisses, c'est-à-dire

$$S = \frac{1}{3}(y_\alpha + y'_\alpha + y_\beta + y'_\beta + y_\gamma + y'_\gamma) = \frac{1}{3}\{2A + 2C\alpha^2 + 2E\alpha^4 + 2G\alpha^6 + 2A + 2C\beta^2 + 2E\beta^4 + 2G\beta^6$$
$$+ 2A + 2C\gamma^2 + 2E\gamma^4 + 2G\gamma^6\}$$
$$= \frac{2}{3}\{3A + C(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + E(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) + G(\alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6)\}.$$

L'identification des deux valeurs de S n'est possible, quels que soient les coefficients, que si l'on a

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{3}{3} = 1, \qquad \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = \frac{3}{5}, \qquad \alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 = \frac{3}{7}.$$

On voit que les nombres α^2, β^2, γ^2 sont racines d'une équation du troisième degré qui, tous calculs faits, est la suivante : $105X^3 - 105X^2 - 21X - 1 = 0$.

Le calcul de α, β, γ donne précisément les valeurs ci-dessus :

$$\alpha = 0.267, \qquad \beta = 0.422, \qquad \gamma = 0.866,$$

à un millième près.

La démonstration qui précède suffit à montrer la supériorité de cette méthode sur celles des trapèzes ou de Simpson, qui ne donnent des résultats exacts que pour la ligne droite ou la parabole du second degré. D'ailleurs la méthode de Tchébitcheff peut évidemment donner une approximation aussi grande qu'on le veut, tout comme les autres méthodes, car il suffit de découper AA′ en segments égaux et d'appliquer cette formule à chaque segment.

En pratique la méthode de Tchébitcheff donne pour six ordonnées des résultats aussi exacts que la méthode de Simpson pour dix ou douze ordonnées.

ÉQUATION TANGENTIELLE D'UN CONOÏDE

par M. **R. Blum**, professeur à Douai.

On peut obtenir très simplement l'équation tangentielle d'un conoïde admettant pour plan directeur le plan des xy et pour directrice l'axe des z.

L'équation ponctuelle d'un tel conoïde est, avec ces axes,

$$(1) \qquad z = \lambda\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Un plan de coordonnées tangentielles u, v, w, h sera tangent à la surface au point x, y, z, t, si on a

$$u = \lambda\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}, \qquad v = -\lambda\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}, \qquad w = \lambda, \qquad h = -\lambda\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

On obtient alors, en éliminant x, y, z, t et λ, l'équation tangentielle du conoïde

$$(2) \qquad -\frac{h}{w} = \varphi\left(-\frac{u}{v}\right).$$

Il suffit donc, pour passer de l'équation ponctuelle à l'équation tangentielle, de remplacer $\frac{z}{t}$ par $-\frac{h}{w}$ et $\frac{y}{x}$ par $-\frac{u}{v}$, ou encore de remplacer x, y, z, t par v, $-u$, h, $-w$.

Exemples. — 1° *Paraboloïde hyperbolique*.

Équation ponctuelle : $\qquad \frac{z}{t} = \frac{ax + by}{ax - by}$;

Équation tangentielle : $$-\frac{h}{w} = \frac{av - bu}{a'v - b'u}.$$

2° *Cylindroïde.*

Équation ponctuelle : $$z(x^2 + y^2) = yt(x^2 - y^2);$$
Équation tangentielle : $$h(u^2 + v^2) = gw(u^2 - v^2).$$

Généralisation. — D'une manière plus générale, soit

$$\frac{R}{S} = \varphi\left(\frac{Q}{P}\right) \tag{3}$$

l'équation d'une surface réglée dont les génératrices rencontrent les droites D et Δ, dont les équations sont

$$D \begin{cases} P \equiv a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0, \\ Q \equiv a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0; \end{cases} \qquad \Delta \begin{cases} R \equiv a_3x + b_3y + c_3z + d_3t = 0, \\ S \equiv a_4x + b_4y + c_4z + d_4t = 0. \end{cases}$$

On suppose, bien entendu, que D et Δ ne se rencontrent pas; on a donc

$$d = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Faisons la transformation de coordonnées fournie par les formules suivantes :

$$\begin{cases} X = a_1x + b_1y + c_1z + d_1t, \\ Y = a_2x + b_2y + c_2z + d_2t, \\ Z = a_3x + b_3y + c_3z + d_3t, \\ T = a_4x + b_4y + c_4z + d_4t. \end{cases}$$

Si u, v, w, h sont les coordonnées tangentielles d'un plan dans le premier système, si U, V, W, H sont les coordonnées tangentielles du même plan dans le second système, on a entre u, v, w, h, U, V, W, H les relations (A_1, B_1, C_1, D_1,... sont les mineurs de d relatifs à a_1, b_1, c_1, d_1,...) :

$$\begin{cases} U = uA_1 + vB_1 + wC_1 + hD_1, \\ V = uA_2 + vB_2 + wC_2 + hD_2, \\ W = uA_3 + vB_3 + wC_3 + hD_3, \\ H = uA_4 + vB_4 + wC_4 + hD_4. \end{cases}$$

Or l'équation (3) se transforme en l'équation

$$\frac{Z}{T} = \varphi\left(\frac{Y}{X}\right), \tag{4}$$

et l'équation tangentielle de cette surface dans ce système est

$$-\frac{H}{W} = \varphi\left(-\frac{U}{V}\right).$$

Donc, en faisant la transformation inverse, l'équation tangentielle de la surface dont l'équation (3) est l'équation ponctuelle sera

$$-\frac{uA_4 + vB_4 + wC_4 + hD_4}{uA_3 + vB_3 + wC_3 + hD_3} = \varphi\left(-\frac{uA_2 + vB_2 + wC_2 + hD_2}{uA_1 + vB_1 + wC_1 + hD_1}\right). \tag{4}$$

Remarque. — Si les équations (3) et (4) sont algébriques et si on les met sous forme entière, nos deux équations regardées, l'une comme fonction de x, y, z, t, l'autre comme fonction de u, v, w, h, sont du même degré, et on a ainsi le théorème suivant (cas particulier d'un théorème plus général) :

« *Une surface algébrique réglée qui admet deux directrices rectilignes a une classe égale à son ordre.* »

Ce théorème est presque évident géométriquement. En effet les plans tangents menés par une droite A, quelconque, à la surface considérée, sont les plans déterminés par la droite A et les génératrices passant par les points d'intersection de A et de la surface.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours de 1911.

1947. — *On donne l'équation différentielle*

$$(1) \qquad a\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + by = 0,$$

où a et b désignent deux constantes réelles.

I. *Trouver une série entière $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots$ qui vérifie l'équation (1) et s'assurer qu'elle est convergente.*

II. *Constater :*

1° *Que les coefficients λ_0 et λ_1 demeurent arbitraires ;*

2° *Que la série peut s'écrire $\varphi(x, a, b) + \psi(x, a, b)$, φ et ψ désignant deux séries entières en x dont les coefficients sont des fonctions de a et b ;*

3° *Que ces fonctions satisfont à l'équation (1) ;*

4° *Que leurs dérivées φ'_x et ψ'_x satisfont chacune à une équation de même forme.*

III. *Exprimer $\varphi(x, a, b)$ et $\psi(x, a, b)$ en fonction de $\varphi(x, a, b-1)$ et $\psi(x, a, b-1)$.*

IV. *Quand b est un entier positif, suivant qu'il est pair ou impair, la série φ ou ψ devient un polynome.*

V. *Discuter, d'après le signe de a, la réalité des racines de ces polynomes φ ou ψ suivant la parité de b.*

Si on pose

$$y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_n x^n + \ldots,$$

on a

$$y' = \lambda_1 + 2\lambda_2 x + \ldots + n\lambda_n x^{n-1} + \ldots,$$

$$y'' = 2\lambda_2 + 3.2\lambda_3 x + \ldots + n(n-1)\lambda_n x^{n-2} + \ldots,$$

et, en écrivant que $ay'' - xy' + by$ est identiquement nul, on obtient

$$b\lambda_0 + 2a\lambda_2 = 0,$$

$$(b-1)\lambda_1 + 3.2a\lambda_3 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(b-n)\lambda_n + (n+1)(n+2)a\lambda_{n+2} = 0.$$

Ceci nous donne de suite la loi de succession des coefficients :

$$\lambda_2 = -\frac{b}{a}\cdot\frac{\lambda_0}{1.2}, \qquad \lambda_3 = -\frac{b-1}{2.3}\cdot\frac{\lambda_1}{a}, \qquad \ldots \qquad \lambda_{n+2} = -\frac{b-n}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{\lambda_n}{a}.$$

Par conséquent, en partant de λ_0, on pourra calculer tous les coefficients d'indices pairs, tels que $\lambda_4, \lambda_6, \ldots, \lambda_{2n}$; et, en partant de λ_1, on pourra calculer tous les coefficients d'indices impairs, tels que $\lambda_3, \lambda_5, \ldots, \lambda_{2n+1}$. On aura ainsi successivement

$$\lambda_{2n} = \frac{2n-2-b}{(2n-1)2n}\cdot\frac{\lambda_{2n-2}}{a},$$

$$\lambda_{2n+1} = \frac{2n-4-b}{(2n-3)(2n-2)}\cdot\frac{\lambda_{2n-4}}{a},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_2 = -\frac{b}{1.2}\,\frac{\lambda_0}{a};$$

d'où
$$\lambda_{2n} = \frac{-b(2-b)(4-b)\cdots(2n-2-b)}{2n!}\cdot\frac{\lambda_0}{a^n}.$$

De même,
$$\lambda_{2n+1} = \frac{2n-1-b}{2n(2n+1)}\cdot\frac{\lambda_{2n-1}}{a}.$$

$$\lambda_{2n-1} = \frac{2n-3-b}{(2n-2)(2n-1)}\cdot\frac{\lambda_{2n-3}}{a},$$

. . . . . .

$$\lambda_3 = \frac{1-b}{2.3}\cdot\frac{\lambda_1}{a},$$

et
$$\lambda_{2n+1} = \frac{(1-b)(3-b)\cdots(2n-1-b)}{(2n+1)!}\cdot\frac{\lambda_1}{a^n}.$$

Nous trouvons bien ainsi pour y une série de la forme $\lambda_0\varphi(x)+\lambda_1\psi(x)$, où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ désignent les deux séries

$$\varphi(x) = 1 - \frac{b}{1.2}\,\frac{x^2}{a} - \frac{b(2-b)}{4!}\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 - \cdots - \frac{b(2-b)\ldots(2n-2-b)}{2n!}\left(\frac{x^2}{a}\right)^n + \cdots$$

$$\psi(x) = \frac{x}{1} + \frac{1-b}{3!}\,\frac{x^3}{a} + \frac{(1-b)(3-b)}{5!}\,\frac{x^5}{a^2} + \cdots + \frac{(1-b)(3-b)\ldots(2n-1-b)}{(2n+1)!}\,\frac{x^{2n+1}}{a^n} + \cdots$$

Dans la première série, le rapport d'un terme au précédent est $\frac{2n-2-b}{(2n-1)2n}\cdot\frac{x^2}{a}$, et, dans la seconde, $\frac{2n-1-b}{2n(2n+1)}\cdot\frac{x^2}{a}$; il a donc pour limite 0 quand n augmente indéfiniment. Par conséquent, les deux séries sont convergentes, quel que soit x, et chacune d'elles représente et définit une fonction pour toutes les valeurs de x, c'est-à-dire dans tout intervalle. Ces fonctions sont continues et pourvues de dérivées : elles satisfont évidemment à l'équation différentielle, d'après la manière même dont elles ont été trouvées ; et, par suite, la fonction $\lambda_0\varphi(x)+\lambda_1\psi(x)$ y satisfait aussi, quels que soient λ_0 et λ_1.

Les dérivées de ces séries sont

$$\varphi'(x, a, b) = -\frac{b}{a}\,x - \frac{b(2-b)}{3!}\,\frac{x^3}{a^2} - \cdots - \frac{b(2-b)\ldots(2n-2-b)}{(2n-1)!}\,\frac{x^{2n-1}}{a^n} - \cdots$$

$$\psi'(x, a, b) = 1 - \frac{1-b}{2!}\,\frac{x^2}{a} + \frac{(1-b)(3-b)}{4!}\,\frac{x^4}{a^2} + \cdots$$

Nous voyons donc immédiatement que

$$\psi'(x, a, b) = \varphi(x, a, b-1), \qquad \text{et} \qquad \varphi'(x, a, b) = -\frac{b}{a}\,\psi(x, a, b-1).$$

Quant au fait que les dérivées de φ et de ψ satisfont à une équation différentielle de même forme, il s'aperçoit immédiatement en dérivant une fois l'équation proposée ; on trouve ainsi :

$$ay'' - xy'' - (b-1)y = 0.$$

Dès lors, en appelant z l'une des dérivées φ' ou ψ', on a la relation

$$az'' - xz' + (b-1)z = 0,$$

ce qui est bien une équation différentielle de même forme que la proposée ; elle n'en diffère que par le changement de b en $b-1$. Tous ces résultats se complètent mutuellement et le dernier que nous venons d'obtenir explique le précédent.

Quand b désigne un nombre entier pair, $2n$, le coefficient du terme en $\left(\frac{x^2}{a}\right)^{n+1}$ est nul et tous les suivants le sont aussi dans $\varphi(x, a, b)$; donc cette série se réduit à un polynome entier de degré

$2n$, qui est du degré n en $\left(\frac{x^2}{a}\right)$,

$$\varphi = 1 - \frac{2n}{1.2}\frac{x^2}{a} + \frac{2n(2n-2)}{4!}\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 - \ldots + (-1)^n \frac{2n(2n-2)\ldots(-2)}{2n!}\left(\frac{x^2}{a}\right)^n.$$

Quand b désigne un nombre entier impair, $2n-1$, c'est la série ψ qui se réduit à un polynome entier de degré $2n-1$,

$$\psi = x - \frac{2n-2}{3!}\frac{x^3}{a} + \frac{2n-2(2n-4)}{5!}\frac{x^5}{a^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)(2n-4)\ldots(-2)}{2n-2!}\frac{x^{2n-1}}{a^{n-1}}.$$

Pour les valeurs négatives de a, tous les coefficients ont le même signe, et il est évident que le polynome φ a toutes ses racines imaginaires et que le polynome ψ n'a pour racine réelle que le nombre 0.

Si a est positif, au contraire, chacun des polynomes n'a que des variations et il peut avoir toutes ses racines réelles. Il est facile de voir d'abord qu'au début toutes les racines sont réelles. Si on fait $n = 1$ dans φ ou $n = 2$ dans ψ, c'est évident. Admettons que cela soit vrai pour une valeur quelconque de n et vérifions que c'est vrai pour la valeur suivante.

Prenons d'abord φ. L'équation différentielle devient, en gardant la notation b, $(b = 2n)$,

$$-b\varphi(x, a, b-2) + \frac{b}{a}x^2\varphi(x, a, b-1) - b\varphi(x, a, b) = 0.$$

Le polynome $\psi(x, a, b-1)$ admet la racine 0 et $n-1$ racines positives par hypothèse

$$0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1};$$

Le polynome $\varphi(x, a, b-2)$, qui est la dérivée de $\psi(n, a, b-1)$, admet $n-1$ racines positives, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$, comprises dans les intervalles (α_i, α_{i+1}),

$$0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1},$$
$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$$

Pour 0 il est positif; pour α_1, négatif; pour α_2, positif, etc.

Donc si on substitue les nombres $0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, qui annulent $\psi(x, a, b-1)$, dans $\varphi(x, a, b)$, on a les signes $-, -, \ldots, -$, et $(-1)^{n-1}$. d'autre part, $+\infty$ donne le signe de $(-1)^n$. Donc toutes les racines de φ sont réelles, les n valeurs de x^2 étant positives.

On procédera de même pour $\psi(x, a, b)$, où $b = 2n-1$.

Bonnes solutions : MM. G. Delerrois, à Chartres ; A. Rousseau, à Lourmes-en-Weppes ; Jean de Bayeux ; G. Lach, à Rodez ; L. Perrin, à Saint-Etienne.

Assez bonnes solutions : MM. Soubaigné, à Mont-de-Marsan ; L. Massaux, école des Angeurs, à Lyon ; A. Courtois.

1948. — *On donne trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz.

1° *Trouver les équations de la parabole* (P) *qui satisfont aux conditions suivantes :*

Son foyer a pour coordonnées $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$; *son axe est parallèle à* Oy ; *elle passe par* O ; *enfin elle tourne sa concavité vers les* y *positifs.*

2° *Montrer qu'à chaque point* M *de l'espace correspond, en général, un point* R *de l'axe* Oz *et un seul, autre que* O, *tel que la droite* MR *rencontre* (P).

Calculer OR *en fonction des cordonnées de* M.

3° *Parmi les droites* MR *ainsi définies, on considère celles qui sont parallèles au plan* $z = lx$. *Trouver et étudier leur lieu géométrique.*

4° *On imagine que* M *soit la position d'un point matériel libre de masse égale à l'unité et que le vecteur* MR *représente la force unique qui agit sur lui.*

Que peut-on dire du mouvement projeté sur le plan xOy ?

Que peut-on dire du mouvement lui-même quand la vitesse initiale de M *est dans le plan* MOz ?

5° *Faire l'étude complète du mouvement avec les conditions initiales suivantes :*

Coordonnées du point M : $x_0 = -2, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0$;

Projections de sa vitesse : $x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 3$.

1. Le foyer ayant pour coordonnées 1, 0, 0 et la directrice étant parallèle à Ox, la parabole a pour équation

$$(x-1)^2 + y^2 = (y - \beta z)^2.$$

D'autre part, elle passe à l'origine ; donc $\beta^2 = 1$, $\beta = \pm 1$.

Si nous prenons $\beta = 1$, nous avons l'équation

$$x^2 = 2(x+y),$$

dont le paramètre a pour valeur algébrique $+1$; c'est donc bien la parabole demandée ; d'ailleurs les coordonnées du sommet sont $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$, ce qui fournit encore une vérification.

2. Appelons α, β, γ les coordonnées du point M et z_0 l'ordonnée du point R ; la droite MR aura pour équations

$$\frac{x-\alpha}{\alpha} = \frac{y-\beta}{\beta} = \frac{z-\gamma}{\gamma - z_0},$$

et si nous écrivons qu'elle rencontre la parabole nous aurons z_0. Appelons ρ la valeur comm une des rapports ; nous avons $x = \alpha(1+\rho)$, $y = \beta(1+\rho)$, et

$$\alpha^2(1+\rho)^2 = 2\alpha(1+\rho) + 2\beta(1+\rho),$$

équation qui nous donne $\rho = -1$, qui correspond à l'origine, et

$$\alpha^2(1+\rho) = 2\alpha + 2\beta, \qquad \rho = \frac{2\alpha + 2\beta - \alpha^2}{\alpha^2}.$$

Or, pour le point de rencontre avec la parabole (P), z est nul ; donc

$$\rho = \frac{-\gamma}{\gamma - z_0} = \frac{2\alpha + 2\beta - \alpha^2}{\alpha^2},$$

et, par suite,

$$z_0 = \frac{(2\alpha + 2\beta)\gamma}{2\alpha + 2\beta - \alpha^2}.$$

Telle est la valeur de OR.

3. Pour que la droite MR soit parallèle au plan $z = lx$, il faut que

$$(\gamma - z_0) = l\alpha ;$$

or $\gamma - z_0$ est égal à $\frac{-\gamma\alpha^2}{2\alpha + 2\beta - \alpha^2}$; l'équation du lieu est donc

$$-\gamma\alpha^2 = l\alpha(2\alpha + 2\beta - \alpha^2),$$

ou, après suppression du facteur α, $\alpha\gamma = l(\alpha^2 - 2\alpha - 2\beta)$.

Ceci est le lieu du point α, β, γ ; mais, comme le point α, β, γ est un point quelconque de la droite MR, c'est bien le lieu de cette droite elle-même. Ce lieu est un paraboloïde hyperbolique.

4. Les composantes de MR sont $0 - \alpha$, $0 - \beta$, $z_0 - \gamma$, c'est-à-dire $-\alpha$, $-\beta$, $\frac{-\gamma\alpha^2}{2\alpha + 2\beta - \alpha^2}$; les équations du mouvement sont donc

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\alpha, \qquad \frac{d^2\beta}{dt^2} = -\beta, \qquad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{\gamma\alpha^2}{2\alpha + 2\beta - \alpha^2}.$$

Sur le plan des xy, le mouvement est produit par une force centrale attractive, égale à sa distance du point m à l'origine. Ce mouvement est donc un mouvement vibratoire elliptique. Quand la vitesse initiale est dans le plan MOz, le mouvement est plan et, sur le plan des xy, c'est un mouvement vibratoire simple qui s'effectue sur la trace horizontale mO du plan MOz.

5. Les coordonnées du point α, β, γ en fonction du temps sont

$$\alpha = A\cos t + A'\sin t, \qquad \beta = B\cos t + B'\sin t.$$

En tenant compte des circonstances initiales du mouvement, on a $\alpha = \alpha' = -2\cos t$, $\beta = 0$, β'

troisième équation différentielle devient

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{4\gamma\cos^2 t}{-4\cos t - 4\cos^2 t}.$$

ou

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \gamma\frac{\cos t}{1-\cos t} = 0.$$

Cette équation admet la solution évidente $\gamma = 1 + \cos t$ et elle s'intègre en posant

$$\gamma = z(1 - \cos t).$$

Nous avons ainsi

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = z''(1-\cos t) - 2z'\sin t - z\cos t.$$

et l'équation devient

$$z''(1+\cos t) = 2z'\sin t.$$

$$\frac{z''}{z'} = -2\frac{1-\cos t}{1+\cos t}.$$

$$\mathrm{L}\frac{z}{C} = \mathrm{L}\frac{1}{(1+\cos t)^2}.$$

$$z = \frac{C}{(1+\cos t)^2} = \frac{C}{4\cos^4\frac{t}{2}}$$

Ceci peut s'écrire

$$dz = \frac{C\,dt}{4}\,\frac{\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}}{\cos^4\frac{t}{2}},$$

$$dz = \frac{C}{2}\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{t}{2}\right)d\,\mathrm{tg}\frac{t}{2}.$$

Par suite

$$z = \frac{C}{2}\left(\mathrm{tg}\frac{t}{2} + \frac{\mathrm{tg}^3\frac{t}{2}}{3}\right) + C_1.$$

D'autre part,

$$1 + \cos t = \frac{2}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{t}{2}};$$

par conséquent

$$\gamma = \frac{C_1\left(3\,\mathrm{tg}\frac{t}{2} + \mathrm{tg}^3\frac{t}{2}\right) + C_1'}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{t}{2}}.$$

C_1 et C_1' étant d'autres constantes; C est égal à trois fois la constante C_1.

Au temps $t = 0$, $\gamma = 0$, $\gamma' = 3$. La constante C_1' est donc nulle.

En outre $\gamma = z(1 + \cos t)$, $\gamma' = z(1 - \cos t) - z\sin t$;

z' est donc égal à $\frac{3}{2}$ pour $t = 0$. Or $z' = \frac{C}{1 + \cos t^2}$; par suite, pour $t = 0$, $C = 6$, $C_1 = 2$.

La valeur de γ est donc

$$\gamma = 2\frac{3\,\mathrm{tg}\frac{t}{2} + \mathrm{tg}^3\frac{t}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{t}{2}}.$$

Les équations du mouvement sont

$$\alpha = -2\cos t, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 2\frac{3\operatorname{tg}\frac{t}{2} + \operatorname{tg}^3\frac{t}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{t}{2}},$$

et, comme

$$\cos t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{t}{2}},$$

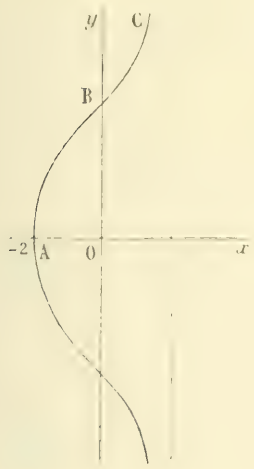
nous avons

$$\alpha = -2\frac{1 - u^2}{1 + u^2},$$

$$\gamma = 4\frac{3u + u^3}{1 - u^2},$$

en posant

$$u = \operatorname{tg}\frac{t}{2}.$$



Le mouvement total, s'il est possible, est un mouvement périodique de durée 2π et la trajectoire est une cubique unicursale, dont l'équation cartésienne est

$$\gamma^2(\alpha - 2) + (\alpha + 2)(4 - \alpha)^2 = 0,$$

et dont la forme est immédiate.

Quand t part de 0, le mobile part du point $A(\alpha = -2,\ \gamma = 0)$ et il parcourt l'arc ABC avec une vitesse qui croît indéfiniment. Le mobile serait à l'infini au temps $t = \pi$; par conséquent le mouvement ne peut réellement se produire que du temps $t = 0$ au temps $t = \pi - \varepsilon$ et le mobile parcourt alors l'arc ABC depuis A jusqu'en un point très éloigné.

Note de la Rédaction. — La méthode que nous publions est celle que nous ont envoyée tous nos correspondants. Elle présente toutefois un inconvénient, celui de conduire à une équation différentielle du second ordre que l'on ne peut intégrer qu'en se servant d'une solution particulière; cette solution est évidente, c'est vrai, mais elle peut n'être pas aperçue par un candidat et ceci donne à la méthode un caractère un peu artificiel.

On peut éviter cette difficulté en remarquant que la force MR est centrale et passe par le point $x = 2$, $y = 0$, $z = 0$, où la parabole rencontre Ox. Il n'y a qu'à porter les axes en ce point et se servir de l'équation des aires pour obtenir une équation du premier ordre que l'on sait intégrer.

Remarques de M. J. Soubaigné. — L'équation différentielle

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z\cos t}{1 + \cos t} = 0$$

peut s'écrire

$$(1 + \cos t)\frac{d^2z}{dt^2} + z\cos t = 0,$$

puis

$$\frac{d\left[(1 + \cos t)\frac{dz}{dt}\right]}{dt} + \frac{d(z\sin t)}{dt} = 0.$$

On obtient donc immédiatement une première intégrale

$$(1 + \cos t)\frac{dz}{dt} + z\sin t = C = 6.$$

et l'on est ensuite ramené à une équation différentielle du premier ordre, linéaire.

L'hodographe du mouvement a pour équations paramétriques

$$x_1 = \frac{dx}{dt} = 2 \sin t,$$

$$y_1 = \frac{dy}{dt} = -2 \sin t \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \frac{2 + \cos t}{\cos \frac{t}{2}}.$$

ou

$$x_1 = \frac{4u}{u^2 + 1}, \quad y_1 = \frac{u^2 + 3}{u^2 + 1},$$

en posant $u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$.

Cette courbe est aisée à construire.

Bonnes solutions : MM. Bazaine-Vial, à Montpellier ; G. La[illegible], à Bâle ; J. [illegible], à Mont-de-Marsan ; A. [illegible] à Fourmies-en-Wepres ; R. Aeschbach ; L. Gobbet.

1950. — *Application de la règle à calcul à la fonction* $y = \frac{x}{\sin x}$, *où* x *représente le rapport de l'arc au rayon.*

1° *Dresser une table de la fonction en faisant varier* x *de* 0 *à* 100 *grades par échelons de* 10 *grades.*

2° *Fournir un moyen d'étendre l'usage de la table en dehors de ses limites et calculer la table auxiliaire nécessaire à cet effet.*

3° *Application : Calculer* y *pour un arc de* 542 *grades, au moyen des deux tables construites.*

1. Nous plaçons dans la deuxième colonne du tableau ci-contre les valeurs de x, exprimées en radians, correspondant aux valeurs 10 grades, 20 grades, ..., 90 grades, 100 grades. Comme π correspond à 200 grades, $\frac{\pi}{20}$ ou 0,157 correspond à 10 grades, $0{,}157 \times 2$ ou 0,314 à 20 grades, ... etc.

Valeurs de x en grades	Valeurs de x en radians	Valeurs de $\frac{x}{\sin x}$	Valeurs de $\frac{\pi}{\sin x}$
0	0	1	∞
10	0,157	1,004	20,1
20	0,314	1,016	10,1
30	0,471	1,037	6,91
40	0,628	1,068	5,34
50	0,785	1,115	4,44
60	0,942	1,184	3,88
70	1,099	1,233	3,52
80	1,256	1,32	3,30
90	1,413	1,43	3,18
100	1,57	1,57	3,14

Cela fait, pour calculer la valeur de $\frac{x}{\sin x}$ correspondant à l'une des valeurs de x de cette colonne, nous prenons la valeur de x sur l'échelle supérieure de la règle, et en face de ce nombre nous amenons le trait de l'échelle des sinus qui correspond à l'angle x (en degrés). Le quotient $\frac{x}{\sin x}$ sera lu sur la graduation supérieure de la règle au-dessus du trait 1 de la réglette.

Nous obtenons ainsi la troisième colonne du tableau.

2. Pour étendre l'usage de la table en dehors de ses limites, il suffit de former une nouvelle table donnant les valeurs de $\frac{\pi}{\sin x}$. Pour cela, au moyen de la règle, nous diviserons le nombre π ou 3,14 par les diverses valeurs de $\sin x$, ce qui nous donne la quatrième colonne du tableau.

3. On a $542 = 600 - 58 = 3 \times 200 - 58$, et par suite

$$\frac{\text{arc } 542^g}{\sin 542^g} = \frac{3\pi - \text{arc } 58^g}{\sin 58^g} = 3 \frac{\pi}{\sin 58^g} - \frac{\text{arc } 58^g}{\sin 58^g}.$$

Pour calculer $\frac{\text{arc } 58^g}{\sin 58^\circ}$ et $\frac{\pi}{\sin 58^\circ}$ au moyen des deux tables qui précèdent, nous admettrons que dans un intervalle de 10^g la variation de chacune de ces fonctions est proportionnelle à la variation de x.

On aura donc, en désignant par $f(x)$ l'une de ces fonctions,

$$\frac{f(\text{arc } 58^g) - f(\text{arc } 50^g)}{f(\text{arc } 60^g) - f(\text{arc } 50^g)} = \frac{8}{10}$$

ou

$$f(\text{arc } 58^g) = f(\text{arc } 50^g) + 0{,}8\,[f(\text{arc } 60^g) - f(\text{arc } 50^g)].$$

Par suite

$$\frac{\text{arc } 58^g}{58^\circ} = 1{,}115 + 0{,}8\,(1{,}164 - 1{,}115) = 1{,}154$$

$$\frac{\pi}{58^\circ} = 4{,}44 + 0{,}8\,(3{,}88 - 4{,}44) = 3{,}99$$

La valeur demandée est donc $3 \times 3{,}99 - 1{,}154$ ou $10{,}8$.

J. de BALDOUIN.

Bonnes solutions par MM. G. Lacu, à Rodez et A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes.

1952. — *Étant donné un échantillon de trichlorure de phosphore impur et sachant que cet état est dû à la présence, dans l'échantillon, de 10 pour 100 d'une substance étrangère unique, constituée par un composé binaire chloré, on demande de déterminer la nature de cette impureté d'après les considérations suivantes :*

(*a*) *Une certaine quantité de l'échantillon, mise en contact avec une proportion d'eau suffisante, s'y dissout totalement et la solution précipite en jaune quand on la traite par l'hydrogène sulfuré.*

(*b*) *Le liquide provenant de la réaction de l'eau est chauffé à l'ébullition avec de l'acide azotique et neutralisé ensuite au moyen du carbonate de sodium ; l'évaporation à sec fournit un résidu blanc. Quand on mélange ce résidu avec du charbon et qu'on chauffe le tout dans un tube à essais, à une température voisine du rouge, on observe qu'il se sublime, sur les parois du tube, un corps gris à éclat métallique. Ce corps gris possède la propriété de se dissoudre dans les hypochlorites alcalins.*

Après avoir déduit de ces observations la nature de l'impureté, on en indiquera la formule et calculera son poids moléculaire, en tenant compte de ce fait que la densité de vapeur du produit impur, indépendante de la température, est égale à 4.88. On déduira ensuite de ce poids moléculaire le poids atomique de l'élément combiné au chlore dans l'impureté. Connaissant ces résultats, on procédera alors, avec le mélange, aux deux opérations suivantes :

(A) *On prend 10 du chlorure impur et on les met en présence de chlore gazeux parfaitement sec, de façon à en réaliser la saturation complète.*

(B) *On prend à nouveau une certaine quantité de chlorure impur que l'on traite par de l'eau ; puis, la solution ainsi obtenue, on ajoute du chlorate de potassium en quantité suffisante pour produire une réaction complète.*

Indiquer :

1° *Le poids du produit résultant de l'action du chlore, sans tenir compte du gaz qui pourrait être retenu autrement qu'à l'état de combinaison (opération A) ;*

2° *La nature des substances en solution après l'action du chlorate de potassium (opération B).*

Poids atomiques : Cl = 35,5 ; P = 31.

(*a*) Le trichlorure de phosphore se décompose au contact de l'eau en produisant des acides phosph-

reux et chlorhydrique. Dans ces conditions, l'apparition d'un précipité jaune au contact de l'hydrogène sulfuré peut suggérer les hypothèses suivantes :

1° L'impureté est du chlorure de cadmium $CdCl^2$, que l'hydrogène sulfuré précipite à l'état de jaune de cadmium, même en liqueur acide.

2° L'impureté est du chlorure ferrique Fe^2Cl^6, que l'hydrogène sulfuré réduit à l'état de chlorure ferreux avec précipitation de soufre, en supposant toutefois que ce chlorure ferrique n'ait pas été déjà réduit par l'acide phosphoreux.

3° L'impureté est du chlorure d'arsenic $AsCl^3$ que l'eau a d'abord transformé en acide arsénieux, lequel a été changé par l'hydrogène sulfuré en orpiment As^2S^3.

b) Les deux premières hypothèses sont incompatibles avec la suite des réactions : les oxydes de cadmium ou de fer, que laisserait comme résidu l'évaporation à sec de la liqueur traitée successivement par l'acide azotique et le carbonate de sodium, seraient en effet plus ou moins fortement colorés. L'arsenic, au contraire, aura été transformé en arséniate de sodium blanc, en même temps que le phosphore en phosphate également blanc. L'hypothèse du chlorure d'arsenic se trouve confirmée par la dernière indication : l'arséniate de sodium, réduit au rouge par le charbon, dégage bien de l'arsenic qui se sublime sur les parois du tube en un anneau gris métallique soluble dans les hypochlorites alcalins.

On sait d'ailleurs que le chlorure d'arsenic a pour formule $AsCl^3$. Soient M son poids moléculaire et d sa densité de vapeur. Le chlorure de phosphore PCl^3 a, d'après les poids atomiques donnés, pour poids moléculaire 137,5 ; soit d' sa densité de vapeur. Considérons le mélange proposé dont 100 grammes doivent contenir 10 grammes de chlorure d'arsenic pour 90 grammes de chlorure de phosphore et écrivons que le volume, à l'état de vapeur, de ces 100 grammes est égal à la somme des volumes des éléments du mélange :

$$\frac{10}{d} + \frac{90}{d'} = \frac{100}{4,88}$$

D'autre part, d'après la loi d'Avogadro, les poids moléculaires M et 137,5 sont liés respectivement aux densités d et d' par les formules

$$M = 28,88d \qquad \text{et} \qquad 137,5 = 28,88d'$$

Eliminons d et d' entre ces trois équations, il vient

$$\frac{1}{M} = \frac{10}{28,88 \cdot 4,88} - \frac{9}{137,5} \qquad \text{d'où} \qquad M = 181,7$$

En retranchant de ce poids moléculaire le poids de trois atomes de chlore, soit 106,5, on a le poids atomique de l'arsenic

$$As = 75,2.$$

Nous avons déjà fait remarquer (V. *Revue* de juillet 1911) que le coefficient 28,88 avec lequel nous venons de faire le calcul et qui nous conduit presque exactement à la valeur bien connue du poids atomique de l'arsenic, n'est pas tout à fait celui qu'il conviendrait d'employer dans le cas de gaz parfaits. D'autre part, il résulte de la forme de l'expression de $\frac{1}{M}$ que les moindres variations de ce coefficient introduisent des divergences considérables dans le résultat ; ainsi, en faisant le calcul avec des coefficients variant, par exemple, de 28,8 à 29, on trouve des résultats compris entre 69 et 85,5. La méthode serait donc très mauvaise pour déterminer le poids atomique en question.

A) Au contact du chlore gazeux en excès, le trichlorure de phosphore se change en pentachlorure PCl^5, tandis que le chlorure d'arsenic ne se modifie pas. Les 9 grammes de trichlorure de phosphore se changent en un poids x de pentachlorure tel que l'on ait

$$\frac{x}{9} = \frac{PCl^5}{PCl^3} = \frac{208,5}{137,5} \qquad \text{d'où} \qquad x = 13,647.$$

Le poids du produit final est donc $14^g,647$.

B) Au contact de l'eau, le chlorure de phosphore donne la réaction

$$PCl^3 + 3H^2O = PO^3H^3 + 3HCl.$$

Le chlorate de potassium, au contact de l'acide chlorhydrique, donne du chlore :

$$ClO^3K + 6HCl = 3H^2O + KCl + 3Cl^2.$$

Ce chlore détermine l'oxydation de l'acide phosphoreux :

$$PO^3H^3 + Cl^2 + H^2O = PO^4H^3 + 2HCl.$$

Pour avoir la réaction globale, ajoutons ces trois équations après avoir multiplié par 3 la première et la troisième :

$$3PCl^3 + 9H^2O + ClO^3K + KCl = 3PO^4H^3 + 9HCl.$$

L'excès de chlorate détruira ensuite cet acide chlorhydrique conformément à la deuxième équation.

Le chlorure d'arsenic donnerait lieu à des réactions analogues et serait transformé de même en acide arsénique.

Il est à remarquer que, sans la présence de l'acide chlorhydrique, le chlorate de potassium oxyderait sans doute directement l'acide phosphoreux, mais il serait sans action sur l'acide arsénieux.

Bonnes solutions de M. Jean de Baudouin et de M. L. Simon à Fourmies.

QUESTIONS PROPOSÉES

2008. — 1° Trouver les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$x(x - yy') + 2y^2 = 0,$$

les tangentes en leurs points d'inflexion et le lieu de ces points. Quels sont les points qui leur correspondent dans les inverses de ces courbes par rapport à l'origine des coordonnées ?

2° On considère la courbe intégrale qui rencontre Ox en un point A tel que $OA = a$, et on la fait rouler sur la parabole $y^2 = a(x - a)$. Montrer que tout point de la droite OA décrit une conchoïde.

3° Les paraboles ayant pour sommet le point A et pour foyers les divers points de la parabole précédente représentent chacune à un certain instant l'enveloppe des tangentes aux trajectoires des différents points d'une droite. En déduire l'enveloppe de ces paraboles.

Besset (Gaston).

2009. — Discuter l'équation $$x^2 + px + q = 0. \qquad (1)$$

Soit M un point de coordonnées p et q ; soient α et β deux racines de l'équation (1). Dans quelle région du plan peut se trouver M pour que α soit toujours comprise entre deux nombres a et b, et β entre deux nombres c et d. Cette région est limitée par quatre droites tangentes à une courbe (C). Quelle est cette courbe ?

Du point M on mène les tangentes à la courbe (C). Elles coupent l'axe des y en des points A, B, C. Les normales aux tangentes en A, B, C coupent l'axe des x en des points A′, B′, C′ dont les abscisses sont racines de l'équation $$x^3 + px^2 + q = 0.$$

Gaston Beauvais.

2010. — On considère toutes les coniques (C) conjuguées par rapport à un triangle OAB rectangle en O et qui sont vues sous un angle droit du sommet C du rectangle construit sur OA et OB ce opposé à A.

1° Former l'équation générale de ces coniques et trouver le lieu de leurs centres.

2° Trouver l'enveloppe de la polaire du point C et le lieu du point de contact d'une tangente menée de ce point à la conique variable (C).

3° Trouver le lieu d'un point M tel que les polaires du point C par rapport aux deux coniques qui passent en ce point soient rectangulaires.

E. H.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

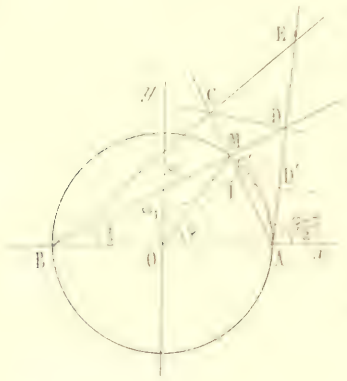
1941. — *On considère un diamètre fixe* AB *d'un cercle et un point* M *variable sur ce cercle. Sur le prolongement de* AM *on prend une longueur* MC $= m$.MB *et sur le prolongement de* MB *une longueur* MD $= n$.MA, m, n *étant des constantes.*

1° *Lieu des centres et enveloppes des cercles circonscrits aux triangles* AMD, BMC, ACD, BCD.

2° *Lieu du point de rencontre des droites* AD, BC.

3° *Enveloppe de la droite* CD.

1. Dans le triangle AMD, rectangle en M, on a $\operatorname{tg} D = \frac{MA}{MD} = \frac{1}{n}$. L'angle D est donc constant, par suite, le lieu du point D est un cercle (γ), passant par les points A et B, et dont le centre ω est situé sur le diamètre Oy perpendiculaire à AB et sur la perpendiculaire à AD en son milieu D'. D'ailleurs, ce point D' est le centre du cercle circonscrit au triangle AMD. On en conclut que le lieu de ce point est le cercle (γ') homothétique de (γ) dans le rapport $\frac{1}{2}$, le centre d'homothétie étant le point A.



Comme le cercle a un point fixe A, son enveloppe est homothétique (dans le rapport 2, centre A) de la podaire du point A par rapport au cercle (γ'), lieu du centre D'. Par suite, cette enveloppe est la podaire du point A par rapport au cercle (γ).

Résultats analogues pour le cercle circonscrit au triangle BMC.

Le point I décrit un cercle (γ_1) ayant pour centre le point ω_1 situé sur Oy, et l'enveloppe du cercle BMC est la cardioïde, podaire de B par rapport à (γ_1).

Considérons maintenant le triangle ACD. Son centre est le point I, intersection des perpendiculaires à AD et AC en leurs milieux D' et C'. Les deux angles $\omega I \omega_1$ et CAD ont leurs côtés perpendiculaires; donc ils sont égaux. Or l'angle CAD est constant, car sa tangente est égale à n. Donc l'angle $\omega I \omega_1$ est constant et le lieu du point I est encore un cercle (γ_2) passant par les points ω et ω_1. Et l'enveloppe du cercle ACD sera homothétique (rapport 2, centre A), de la podaire de A par rapport au cercle (γ_2). Ce sera donc un limaçon de Pascal.

2. Soit E le point de rencontre des droites AD et BC. L'angle E du triangle EAB est supplémentaire de la somme $\widehat{EBA} + \widehat{EAB}$ ou $\widehat{CBM} + \widehat{MBA} + \widehat{BAM} + \widehat{MAD}$. Or $\widehat{CBM}$ et $\widehat{MAD}$ sont constants car leurs tangentes sont respectivement m et n, et la somme $\widehat{MBA} + \widehat{BAM}$ est égale à $\frac{\pi}{2}$. Donc l'angle E est constant et le lieu du point E est un cercle passant par les points A et B.

3. Nous traiterons cette dernière partie analytiquement, en prenant comme axe des x le diamètre AB, et comme axe des y le diamètre perpendiculaire.

Soit φ l'angle de OM avec Ox; BM et AM font respectivement avec Ox les angles $\frac{\varphi}{2}$ et $\frac{\varphi + \pi}{2}$.

Nous avons $\qquad AM = 2R \sin \frac{\varphi}{2}, \qquad BM = 2R \cos \frac{\varphi}{2}.$

et par suite $$MC = 2Rm\cos\frac{\varphi}{2}, \qquad MD = 2Rn\sin\frac{\varphi}{2},$$

d'où $$AC = 2R\left(\sin\frac{\varphi}{2} + m\cos\frac{\varphi}{2}\right), \qquad BD = 2R\left(\cos\frac{\varphi}{2} + n\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

Les cosinus directeurs de AC étant $\cos\frac{\varphi+\pi}{2}$ et $\sin\frac{\varphi+\pi}{2}$, les coordonnées du point C sont

$$x = R + AC\cos\frac{\varphi+\pi}{2}, \qquad y = AC\sin\frac{\varphi+\pi}{2}$$

ou $$x = R - 2R\left(\sin\frac{\varphi}{2} + m\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin\frac{\varphi}{2}, \qquad y = 2R\left(\sin\frac{\varphi}{2} + m\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2}$$

ou encore $$x = R(\cos\varphi - m\sin\varphi), \qquad y = R(\sin\varphi + m\cos\varphi + m).$$

D'autre part, les cosinus directeurs de BD sont $\cos\frac{\varphi}{2}$ et $\sin\frac{\varphi}{2}$, donc les coordonnées du point D sont

$$x = -R + BD\cos\frac{\varphi}{2}, \qquad y = BD\sin\frac{\varphi}{2}.$$

ou $$x = -R + 2R\left(\cos\frac{\varphi}{2} + n\sin\frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2}, \qquad y = 2R\left(\cos\frac{\varphi}{2} + n\sin\frac{\varphi}{2}\right)\sin\frac{\varphi}{2}.$$

ou encore $$x = R(\cos\varphi + n\sin\varphi), \qquad y = R(\sin\varphi - n\cos\varphi + n).$$

L'équation de la droite CD est alors

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ R(\cos\varphi - m\sin\varphi) & R(\sin\varphi + m\cos\varphi + m) & 1 \\ R(\cos\varphi + n\sin\varphi) & R(\sin\varphi - n\cos\varphi + n) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$[(m+n)\cos\varphi + (m-n)]\frac{x}{R} + [(m+n)\sin\varphi - (m-n)\cos\varphi - 2mn\sin\varphi - (m+n)]\frac{y}{R} = 0.$$

ce qui peut s'écrire

$$\cos\varphi\left[(m+n)\frac{x}{R} - (m-n)\right] + \sin\varphi\left[(m+n)\frac{y}{R} - 2mn\right] + (m-n)\frac{x}{R} - (m+n) = 0.$$

On en conclut que l'enveloppe de cette droite a pour équation

$$[(m+n)\frac{x}{R} - (m-n)]^2 + [(m+n)\frac{y}{R} - 2mn]^2 = [(m-n)\frac{x}{R} - (m+n)]^2$$

On reconnaît l'équation d'une conique admettant pour foyer le point $x = R\frac{m-n}{m+n}$, $y = R\frac{2mn}{m+n}$, pour directrice correspondante la droite $(m-n)\frac{x}{R} - (m+n) = 0$, et pour excentricité $\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$.

Dans le cas où $m = n$, cette conique est un cercle.

A. ROUSSEAU, à Tournes-en-Weppes.

Bonnes solutions par MM. Blanchère-Vigé, lycée de Montpellier; Jean Dessaint, à Fleurieux-sur-l'Arbresle (Rhône); G. Lach, à Rodez; J. Ottenheimer, lycée de Nancy; Henri Regnier; J. Sauvaigo, à Mont-de-Marsan; E. N. Barisien.

1945. — *Dans un triangle* ABC, *inscrit dans un cercle fixe de centre* O, *le sommet* A *est fixe et l'on a*

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = k^2, \qquad k^2 \text{ étant une constante.}$$

Trouver et construire :

1° *Le lieu de la projection* H *du point* A *sur* BC ;

2° *Le lieu du centre* ω *du cercle circonscrit au triangle* OBC ;

3° *Le lieu du centre de gravité du triangle* OBC ;

4° *L'enveloppe du côté* BC ;

5° *L'enveloppe du cercle circonscrit au triangle* OBC.

Prenons comme origine le point A, comme axe des x le diamètre AO et comme axe des y la tangente au cercle au point A. L'équation du cercle est alors $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$.

Soit $y = mx + p$ l'équation de la droite BC ; nous allons chercher quelle est la relation qui doit exister entre m et p pour que l'on ait $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = k^2$.

Les abscisses x' et x'' des points B et C sont racines de l'équation

$$x^2 + (mx + p)^2 - 2Rx = 0, \qquad \text{ou} \qquad x^2(1 + m^2) - 2x(R - mp) + p^2 = 0 ;$$

et les ordonnées y' et y'' de ces points sont $y' = mx' + p$, $y'' = mx'' + p$.

On doit avoir

$$x'^2 + y'^2 + x''^2 + y''^2 = k^2, \qquad \text{ou} \qquad x'^2 + (mx' + p)^2 + x''^2 + (mx'' + p)^2 = k^2,$$

ou encore

$$(x'^2 + x''^2)(1 + m^2) - 2mp(x' + x'') + 2p^2 - k^2 = 0.$$

Or

$$x' + x'' = \frac{2(R - mp)}{1 + m^2}, \qquad x'x'' = \frac{p^2}{1 + m^2},$$

$$x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = \frac{4(R - mp)^2}{(1 + m^2)^2} - \frac{2p^2}{1 + m^2},$$

on a donc

$$\frac{4(R - mp)^2}{1 + m^2} - 2p^2 + \frac{4mp(R - mp)}{1 + m^2} - 2p^2 - k^2 = 0,$$

ou enfin

$$4R(R - mp) - k^2(1 + m^2) = 0. \qquad (1)$$

C'est la relation cherchée.

1. On aura le lieu du point H en éliminant m et p entre les équations des droites BC, AH, $y = mx + p$, $x + my = 0$, et la relation (1).

Les deux premières nous donnent $m = -\frac{x}{y}$, $p = \frac{x^2 + y^2}{y}$, et, en portant ces valeurs dans (1), nous avons

$$4R^2 + 4R\frac{x(x^2 + y^2)}{y^2} - k^2\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) = 0, \qquad \text{ou} \qquad 4Ry(x^2 + y^2) + (4Rx - k^2)(y^2 + x^2) = 0.$$

Cette équation représente une cubique circulaire ayant un point double à l'origine. Les tangentes sont réelles et distinctes si $k^2 < 4R^2$; en particulier pour $k^2 = 2R^2$ on a une strophoïde. Le point double est isolé si $k^2 > 4R^2$. Enfin pour $k^2 = 4R^2$ le lieu se décompose en l'axe des y et le cercle de diamètre OA.

D'ailleurs, dans ce cas, la relation (1) devient $m(p + Rm) = 0$; elle exprime ou bien que BC est parallèle à Ox, ou bien que BC passe par le point O. Nous exclurons dans la suite ce cas particulier.

2. Le cercle circonscrit au triangle OBC fait partie du faisceau linéaire défini par le cercle donné et la droite BC. Son équation est donc de la forme

$$x^2 + y^2 - 2Rx + \lambda(y - mx - p) = 0,$$

et nous déterminerons λ en écrivant qu'il passe par le point O $(x = R,\ y = 0)$; nous obtenons ainsi $\lambda = -\frac{R^2}{mR + p}$, et l'équation du cercle devient $x^2 + y^2 - 2Rx - \frac{R^2}{mR + p}(y - mx - p) = 0$.

Les coordonnées du centre sont

$$(2) \qquad 2x - 2R + \frac{R^2 m}{mR + p} = 0, \qquad 2y - \frac{R^2}{mR + p} = 0 ;$$

le lieu de ce point s'obtiendra en éliminant m et p entre ces équations et la relation (1).

Des équations (2) on déduit d'abord $m = -\frac{x - R}{y}$, ce qui était à prévoir, puisque le centre du

cercle est sur la perpendiculaire abaissée du point O sur BC : puis $mR - p = \frac{R^2}{2y}$,

ou
$$p = \frac{R^2}{2y} - mR = \frac{R^2}{2y} - \frac{R(x-R)}{y} = \frac{R(2x-R)}{2y}.$$

Il n'y a plus qu'à remplacer dans la relation (1) m par $-\frac{x-R}{y}$ et p par $\frac{R(2x-R)}{2y}$.

On a ainsi
$$4R^2 + \frac{4R^2(2x-R)(x-R)}{2y^2} - k^2\left[1 + \frac{(x-R)^2}{y^2}\right] = 0,$$

ou
$$2R^2(2y^2 + (2x-R)(x-R)) - k^2((x-R)^2 + y^2) = 0.$$

Transportons l'origine des coordonnées au point O ; cette équation devient

$2R^2(2y^2 + (2x' + Rx')) - k^2(x'^2 + y^2) = 0$, ou enfin $(4R^2 - k^2)(x'^2 + y^2) + 2Rx' = 0$.

Le lieu est donc un cercle normal en O au diamètre AB.

3. Le centre de gravité du triangle OBC a pour coordonnées $x = \frac{R + x' + x''}{3}$, $y = \frac{y' + y''}{3}$.

Or $x' + x'' = \frac{2(R - mp)}{1 + m^2}$, et la relation (1) nous montre que $\frac{R - mp}{1 + m^2}$ est constant et égal à $\frac{k^2}{4R}$; on a donc $x' + x'' = \frac{k^2}{2R}$ et l'abscisse du centre de gravité est égale à $x = \frac{R - \frac{k^2}{2R}}{3}$: elle est constante, donc le lieu de ce point est une perpendiculaire à AO.

4. De la relation (1) on tire $p = \frac{4R^2 - k^2(1 + m^2)}{4Rm}$, et l'équation de BC s'écrit, en fonction du seul paramètre m,
$$y = mx + \frac{4R^2 - k^2(1 + m^2)}{4Rm}.$$

Nous aurons l'enveloppe de cette droite en écrivant que cette équation en m a une racine double. L'équation ordonnée s'écrit $m^2(4Rx - k^2) - 4Rmy + 4R^2 - k^2 = 0$; pour qu'elle ait une racine double, il faut qu'on ait $4R^2y^2 - (4Rx - k^2)(4R^2 - k^2) = 0$.

L'enveloppe est une parabole ayant pour axe la droite AO.

5. Nous avons vu précédemment que l'équation du cercle circonscrit au triangle OBC est
$$x^2 + y^2 - 2Rx - \frac{R^2}{mR + p}(y - mx - p) = 0, \quad \text{ou} \quad (mR + p)(x^2 + y^2 - 2Rx) - R^2(y - mx - p) = 0.$$

Remplaçons-y p par sa valeur $\frac{4R^2 - k^2(1 + m^2)}{4Rm}$, et posons pour simplifier $x^2 + y^2 - 2Rx = C$, nous avons
$$\left[mR + \frac{4R^2 - k^2(1 + m^2)}{4Rm}\right]C - R\left[y - mx - \frac{4R^2 - k^2(1 + m^2)}{4Rm}\right] = 0,$$

ou, en chassant le dénominateur,
$$(4R^2 - k^2)C(1 + m^2) - R^2(4Rmx - my) - 4R^2 + k^2(1 + m^2) = 0,$$

ou, en ordonnant par rapport à m,
$$m^2(4R^2 - k^2)C + 4R^3x - R^2(y) - 4R^3my + (4R^2 - k^2)(C + R^2) = 0.$$

Si l'on transporte l'origine au point O ($x = R$, $y = 0$), l'équation se simplifie et devient
$$m^2(4R^2 - k^2)(x^2 + y^2) + 4R^3x - 4R^3my + 4R^2 - k^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Écrivons maintenant que cette équation a une racine double ou ∞ ; nous obtenons
$$4R^6y^2 - (4R^2 - k^2)(x^2 + y^2)[(4R^2 - k^2)(x^2 + y^2) + 4R^2x] = 0,$$

ou $$(4R^2 - k^2)(x^2 + y^2)^2 + 4R^2(4R^2 - k^2)x(x^2 + y^2) - 4R^6 y^2 = 0.$$

On reconnaît l'équation d'une quartique bicirculaire ayant un point de rebroussement à l'origine.

Passons aux coordonnées polaires, nous avons

$$(4R^2 - k^2)\rho^2 + 4R^2(4R^2 - k^2)\rho\cos\omega - 4R^6\sin^2\omega = 0,$$

ou $$[(4R^2 - k^2)\rho + 2R^2\cos\omega]^2 = 4R^6,$$

ou encore $$(4R^2 - k^2)\rho + 2R^2\cos\omega = \pm 2R^3$$

Il suffit de prendre dans le second membre un signe quelconque, le signe $+$ par exemple, et on conclut que l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle OBC est une cardioïde qui a pour équation

polaire $$\rho = \frac{2R^3(1 - \cos\omega)}{4R^2 - k^2},$$

le point O étant le pôle, et le diamètre AB l'axe polaire.

Jean NYEGAARD, 39e d'artillerie, à Toul.

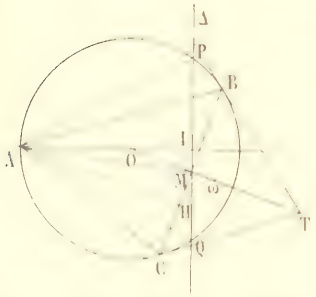
M. E.-N. Barisien a trouvé pour aire de la cubique obtenue plus haut la valeur $\frac{\pi(3R^2 - k^2)}{4}$. Si $k = 2R$, cette expression se réduit à $\frac{\pi R^2}{4}$, aire du cercle de diamètre AO ; si $k = R\sqrt{3}$, l'aire de la boucle est équivalente à l'aire comprise entre le reste de la courbe et l'asymptote.

Solution géométrique. — Soit M le milieu de BC ; on a

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{MA}^2 + 2\overline{MB}^2, \qquad \text{ou comme} \qquad \overline{MB} = R - \overline{MO},$$

$$k^2 = 2\overline{MA}^2 + 2R^2 - 2\overline{MO}^2 \qquad \text{ou} \qquad \overline{MA}^2 - \overline{MO}^2 = \frac{k^2}{2} - R^2.$$

Le lieu du point M est donc une droite Δ perpendiculaire à AO. Pour la construire, il suffit de tracer les deux cordes égales $AP = AQ = \frac{k}{\sqrt{2}}$; la droite PQ est la droite cherchée.



Elle rencontre AO en un point I, et on a $\overline{AI} = \frac{k^2}{4R}$.

L'enveloppe de BC est alors la parabole π qui a pour foyer le point O et pour tangente au sommet la droite Δ.

Le lieu du point H, projection de A sur BC, est la podaire de cette parabole par rapport au point A.

C'est une cubique circulaire ayant le point A pour point double, et symétrique par rapport à OA, puisque le point A est sur l'axe de la parabole. Les tangentes en A à la podaire sont perpendiculaires aux tangentes issues du point A à la parabole π. Celles-ci sont réelles si A est extérieur à π, imaginaires dans le cas contraire.

Or $$\overline{IO} = \overline{IA} + \overline{AO} = R - \frac{k^2}{4R} = \frac{4R^2 - k^2}{4R}.$$

Donc, si $k < 2R$, π tourne sa concavité dans le sens AO, A est extérieur à π, et est par suite un point double à tangentes réelles de la cubique ; au contraire, si $k > 2R$, A est un point double isolé.

Lorsque $k = 2R$, les droites BC sont parallèles à AO ou passent par le point O. Le lieu de H se compose de la tangente en A au cercle O et du cercle décrit sur AO comme diamètre.

Lorsque $k = R\sqrt{2}$, la droite Δ est perpendiculaire au milieu de AO ; le point A est sur la directrice de π, le lieu de H est une strophoïde.

Le centre de gravité G du triangle OBC est situé sur la droite OM, et l'on a $\frac{\overline{OG}}{\overline{OM}} = \frac{2}{3}$. Le lieu du point

G est une droite homothétique de Δ, le centre d'homothétie étant le point O et le rapport d'homothétie étant égal à $\frac{2}{3}$.

Soit T le pôle de BC ; ce point est sur la droite OM, et l'on a $\overline{OM}.\overline{OT} = R^2$. Il en résulte que le point T décrit le cercle OPQ, inverse de la droite PQ par rapport au point O, la puissance étant R^2. Le centre ω du cercle OBC est le milieu de OT; il décrit donc le cercle (γ) homothétique du cercle OPQ $\left(\text{centre O, rapport } \frac{1}{2}\right)$.

Enfin le cercle OBC, passant par le point fixe O, et dont le centre ω décrit un cercle (γ) passant par ce point, enveloppe une cardioïde de pôle O, d'après un résultat bien connu. Cette cardioïde n'est autre d'ailleurs que la podaire du cercle OPQ par rapport au point O.

J. SOUBAIGNE, à Mont-de-Marsan.

Bonnes solutions par MM. Blaquière-Vieu, lycée de Montpellier ; Jean Dessirier, à Fleurieux-sur-l'Arbresle ; G. Esteben ; G. Fouchy, à Reims ; Charles Guillemme ; G. Lach, à Rodez ; J. Ottenheimer, lycée de Nancy ; A. Roussel, à Fourmies-en-Weppes ; L. Simon, à Fourmies.

1967. — *Soient* P, Q, R, *les pieds des trois normales à l'ellipse abaissées d'un point* M *variable de l'ellipse. Les perpendiculaires élevées en* M *à* MP, MQ, MR *rencontrent* QR, RP, PQ *en trois points en ligne droite. Enveloppe de cette droite quand* M *se déplace sur l'ellipse.*

Première solution. — Prenons comme axes de coordonnées la tangente et la normale au point M à la conique ; l'équation de cette courbe est

$$(1) \qquad f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey = 0.$$

Nous allons former l'équation aux coefficients angulaires des normales issues du point M à cette conique. Écrivons que la normale au point (x, y), $\frac{X - x}{f} = \frac{Y - y}{f_1}$, passe par l'origine ; nous avons $\frac{x}{f_1} = \frac{y}{f_2}$, ou

$$(2) \qquad \frac{x}{Ax + By} = \frac{y}{Bx + Cy + E}.$$

Les points P, Q, R sont donc définis par les équations (1) et (2) ; si nous rendons ces équations homogènes, et si nous éliminons la variable d'homogénéité entre les équations obtenues, nous avons, après un calcul facile,

$$2By^3 + (2A - C)xy^2 + Ax^2 = 0,$$

équation qui représente l'ensemble des droites MP, MQ, MR, et en y remplaçant x par 1, y par m, nous obtenons l'équation aux coefficients angulaires de ces droites :

$$(3) \qquad 2Bm^3 + (2A - C)m^2 + A = 0.$$

Soient m_1, m_2, m_3 les racines de cette équation, ces nombres étant respectivement les coefficients angulaires de MP, MQ, MR.

Nous allons former l'équation de la droite QR. Pour cela, désignons par $ax + by = 1$ l'équation de cette droite ; formons l'équation de l'ensemble des droites joignant l'origine M aux points de rencontre de cette droite et de la conique,

$$(4) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2E(ax + by) = 0,$$

et écrivons que ces deux droites ont pour coefficients angulaires m_2 et m_3. Cela revient à écrire que l'équation

$$(2Eb + C)m^2 + 2(Ea + B)m + A = 0$$

a pour racines m_2 et m_3, ce qui donne

$$2Eb + C = -\frac{2(Ea + B)}{m_2 + m_3} = \frac{A}{m_2 m_3}.$$

On en tire (5) $\qquad a = -\frac{A(m_2 + m_3) + 2Bm_2 m_3}{2Em_2 m_3}, \qquad b = \frac{A - Cm_2 m_3}{2Em_2 m_3}.$

Désignons maintenant par P' le point de rencontre de QR et de la perpendiculaire élevée en M à MP. Les

coordonnées de ce point vérifient les équations $ux + vy = 1$, $x + m_1 y = 0$; par suite son ordonnée est $\frac{1}{v - um}$, ou, en y remplaçant u et v par leur valeur (5),

$$\frac{2Em_1m}{A - Cm_1m - A(m_1 + m) - 2Bm_1m}.$$

Comme m_1, m_2, m sont racines de l'équation (3), on a $m_1m_2m = -\frac{A}{2B}$, $m_1m_2 + m_1m + m_2m = 0$; par suite l'ordonnée du point P′ s'écrit

$$\frac{2Em_1m}{Cm_1m - Am_1m_2} \quad \text{ou} \quad -\frac{2E}{A - C}.$$

Il résulte de là que les points Q′ et R′ où les perpendiculaires en M rencontrent RP et PQ ont aussi pour ordonnée $-\frac{2E}{A - C}$. Par suite les trois points P′, Q′, R′ sont situés sur la droite $y = -\frac{2E}{A - C}$.

Mais il est facile de vérifier que $-\frac{2E}{A - C}$ est l'ordonnée du point de Frégier relatif au point M. Car si on écrit que les droites (4) sont perpendiculaires on obtient la condition $A + C + 2Ev = 0$, qui exprime que la droite $ux + vy = 1$ passe par le point fixe $x = 0$, $y = -\frac{2E}{A - C}$.

Nous en concluons que la droite P′Q′R′ est la parallèle à la tangente en M, menée par le point de Frégier correspondant au point M; c'est sur cette propriété que nous nous appuierons pour obtenir l'enveloppe de cette droite.

Prenons maintenant comme axes de coordonnées les axes de l'ellipse, et désignons par $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ les coordonnées du point M. Nous déterminons le point de Frégier correspondant par l'intersection de la normale à l'ellipse au point M $\frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} = c^2$, et du diamètre de l'ellipse (symétrique du diamètre OM par rapport aux axes), qui est vu du point M sous un angle droit. L'équation de ce diamètre étant $\frac{x}{a\cos\varphi} + \frac{y}{b\sin\varphi} = 0$, on en conclut que le point de Frégier a pour coordonnées

$$x = \frac{bc^2}{a^2 - b^2}\cos\varphi, \qquad y = -\frac{ac^2}{a^2 - b^2}\sin\varphi.$$

Menons par ce point une parallèle à la tangente en M.

$$\left(x - \frac{ac^2}{a^2 - b^2}\cos\varphi\right)\frac{\cos\varphi}{a} + \left(y + \frac{bc^2}{a^2 - b^2}\sin\varphi\right)\frac{\sin\varphi}{b} = 0,$$

$$\frac{x}{a}\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi - \frac{c^2}{a^2 - b^2}\cos 2\varphi = 0.$$

Telle est l'équation de la droite P′Q′R′.

Pour étudier l'enveloppe de cette droite, dérivons son équation par rapport à φ : nous obtenons

$$-\frac{x}{a}\sin\varphi + \frac{y}{b}\cos\varphi + \frac{2c^2}{a^2 - b^2}\sin 2\varphi = 0,$$

puis, résolvons ces deux équations par rapport à x et y : nous avons les équations paramétriques de l'enveloppe

$$x = \frac{ac^2}{a^2 - b^2}\cos\varphi(1 + 2\sin^2\varphi), \qquad y = -\frac{bc^2}{a^2 - b^2}\sin\varphi(1 - 2\cos^2\varphi).$$

Il suffira de faire varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$, et de prendre les symétriques de la portion de courbe obtenue par rapport aux deux axes.

On trouve aisément

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{3ac^2}{a^2+b^2}\sin\varphi(2\sin^2\varphi - 1), \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{3bc^2}{a^2-b^2}\cos\varphi(2\sin^2\varphi - 1),$$

et

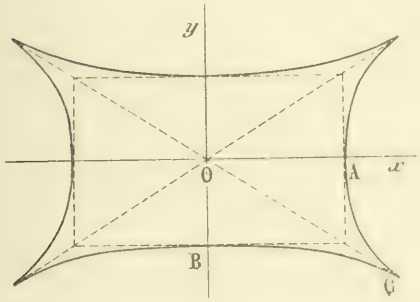
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\cot\varphi.$$

Comme $\frac{dx}{d\varphi}$ et $\frac{dy}{d\varphi}$ s'annulent pour la même valeur de φ, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, la courbe présente un rebroussement au point correspondant.

On a d'ailleurs le tableau de variations suivant

φ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
x	$\frac{ac^2}{a^2+b^2}$	croît	$\frac{ac^2\sqrt{2}}{a^2-b^2}$	décroît	0
y	0	décroît	$-\frac{bc^2\sqrt{2}}{a^2-b^2}$	croît	$-\frac{bc^2}{a^2-b^2}$

On en déduit la branche de courbe ACB, et il n'y a plus qu'à achever par symétrie par rapport aux deux axes.



On vérifie aisément que les tangentes aux points de rebroussement sont les diagonales du rectangle construit sur les axes de l'ellipse.

A. ROUSSEAU, à Fourmies-en-Wepps.

Deuxième solution. — Étant donnés un triangle quelconque PQR et un point M dans son plan, si par le point M on mène des perpendiculaires à MP, MQ, MR qui rencontrent respectivement les côtés QR, RP, PQ aux points P', Q', R', ces trois points sont en ligne droite.

En effet, transformons la figure par polaires réciproques en prenant comme conique directrice un cercle de centre M. Aux points P, Q, R correspondent des droites (p), (q), (r) perpendiculaires respectivement à MP, MQ, MR. Au côté QR correspond le point P_1, intersection des droites (q) et (r), et à la droite MP' correspond le point à l'infini dans la direction MP. Par suite au point P' correspond la droite passant par le point P_1 et parallèle à MP ou perpendiculaire à (p). Cette droite est donc une hauteur du triangle (θ) formé par les droites (p), (q), (r).

On voit de même qu'aux points Q' et R' correspondent les deux autres hauteurs du triangle (θ). Comme les trois hauteurs de ce triangle se coupent en un point H, les points P', Q', R' sont sur une même droite Δ, polaire de H par rapport au cercle directeur.

Supposons maintenant que le point M soit sur une ellipse E et que les points P, Q, R soient les pieds des normales menées du point M à l'ellipse. Par la même transformation, l'ellipse se change en une parabole dont la direction asymptotique est la normale MN à l'ellipse, et cette parabole est inscrite dans le triangle (θ), les points de contact des côtés (p), (q), (r) étant respectivement sur les droites MP, MQ, MR, puisque ces points de contact sont les pôles des tangentes en P, Q, R à l'ellipse.

Il en résulte que le triangle (θ) est circonscrit à la parabole, les points de contact des côtés étant les pieds des normales issues du point M à cette courbe. On sait dans ce cas que la droite MH, qui joint le point M au point de concours des hauteurs H du triangle, est parallèle à l'axe de la parabole. Donc le point H est sur la droite MN, et par suite la droite Δ, qui joint les points P', Q', R' et qui est la polaire du point H par rapport au cercle, est perpendiculaire à MN en un certain point I.

Or le point I est évidemment le point de Frégier de l'ellipse correspondant au point M, car sa polaire par rapport au cercle est la directrice de la parabole, et celle-ci est le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires à la parabole.

On est donc conduit aux mêmes conclusions que dans la première solution.

Bonne solution : M. J. Soubaigné, à Mont-de-Marsan.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1980. — *Par rapport aux axes* Ox *et* Oy *de la feuille* (Ox *étant parallèle au petit bord*), *on donne les points* (a, a'), (b, b') *et* (s, s') *définis par le croquis ci-contre* (*où les cotes sont données en cm*).

En tournant successivement autour de la verticale du point (a, a') *et de la droite* $(sa, s'a')$, *la droite* $(sb, s'b')$ *engendre un hyperboloïde et un cône de révolution.*

On demande de représenter la partie restante de l'hyperboloïde entamé par le cône, en supposant cet hyperboloïde limité à la partie comprise entre le parallèle du point (s, s') *et le parallèle de cote* 3,7.

On tracera en noir les lignes de contour du solide représenté, celles qui sont cachées étant en pointillé.

Les lignes de construction seront tracées en rouge, et la partie retranchée du contour apparent de la portion considérée de l'hyperboloïde en bleu.

(*École des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, concours de* 1911.)

L'hyperboloïde et le cône ont pour plan de symétrie le plan vertical passant par leurs axes de révolution SA*a*. Comme ils ont en commun la génératrice SB, ils en ont une seconde, symétrique de celle-ci par rapport à ce plan vertical. Leur intersection se composera donc de ces deux génératrices et d'une courbe plane que nous allons déterminer.

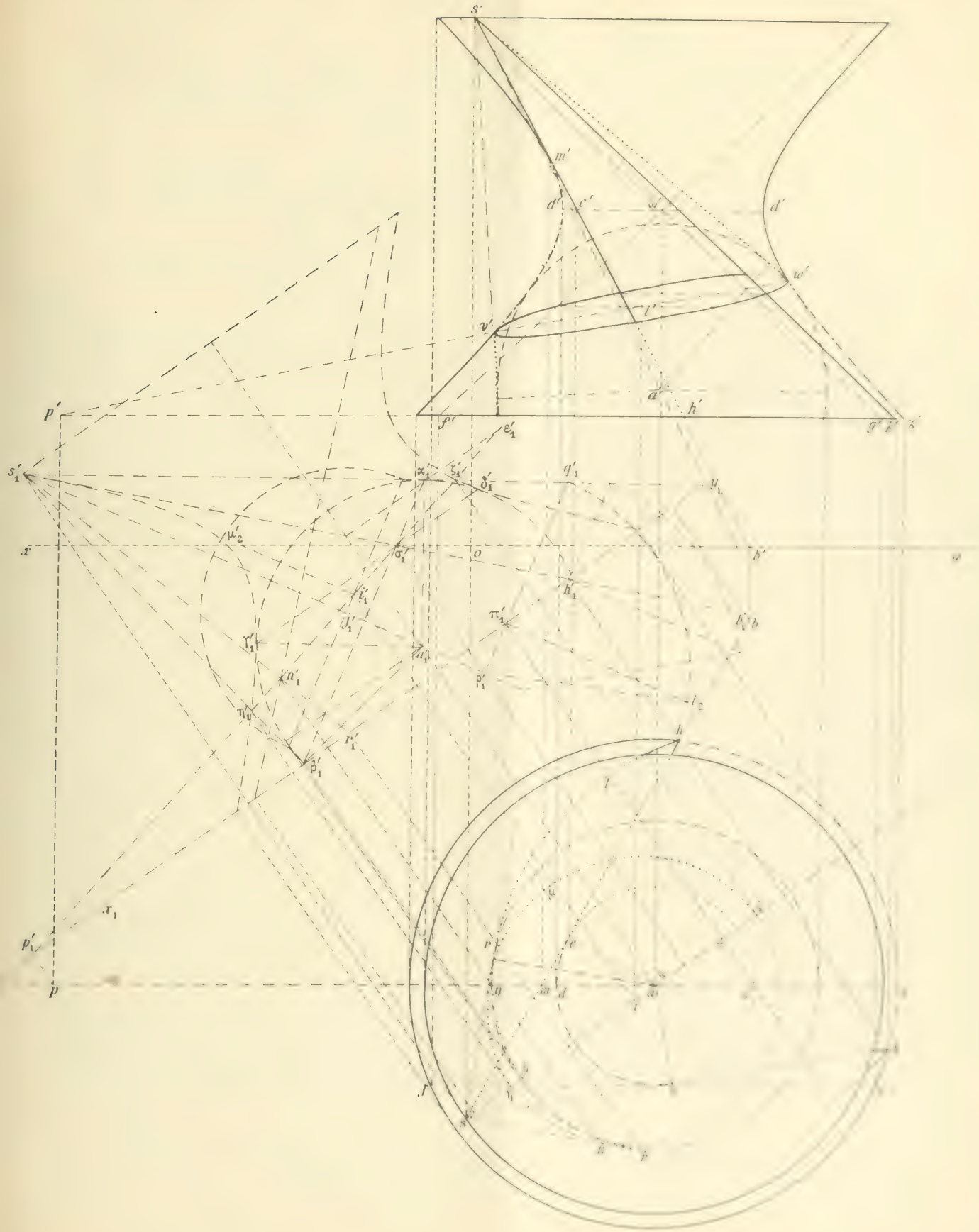
Le contour apparent vertical de l'hyperboloïde se compose de l'hyperbole méridienne limitée aux deux plans horizontaux donnés dans l'énoncé, et des projections des parallèles situés dans ces plans. On a d'ailleurs les sommets de l'hyperbole en amenant dans le plan de front de l'axe *Aa* le pied (c, c') de la perpendiculaire commune à cet axe et à SB, soit (d, d') ; les asymptotes sont les projections verticales des deux génératrices de front de la surface, dont on a les projections horizontales en menant la tangente fg au cercle de gorge, leurs traces horizontales sur le parallèle inférieur étant les intersections de cette tangente par la circonférence de rayon ah, d'où $f'\omega'$ et $g'\omega'$. On peut donc construire la méridienne par points. Le contour apparent horizontal se compose des deux parallèles de rayons as et ah et du cercle de gorge de rayon ad.

Le cône de révolution ayant son axe SA oblique sur les deux plans de projection, prenons un plan vertical auxiliaire parallèle à SA, soit x_1y_1, sur lequel nous projetons l'axe en $s'_1a'_1$ et la génératrice en $s'_1b'_1$. Nous amenons cette génératrice à être de front par une rotation autour de SA et du point (a, a'_1) de l'axe nous menons la perpendiculaire $a'_1\alpha'_1$ à cette génératrice de front, ce qui donne le rayon de la sphère inscrite de centre A. En décrivant les contours apparents de cette sphère sur chaque plan de projection et en leur menant les deux tangentes par la projection correspondante du point S nous avons les contours apparents du cône sur les trois plans de projection.

Cette sphère ayant son centre au point de rencontre des axes des deux surfaces et touchant la génératrice commune SB est inscrite à la fois au cône et à l'hyperboloïde, les plans des courbes de contact étant : pour le cône, le parallèle projeté sur $\alpha'_1\beta'_1$; pour l'hyperboloïde, le parallèle horizontal passant par le point de contact de la sphère et de SB, et dont les points γ'_1 et δ'_1 donnent les points où l'hyperbole méridienne du plan vertical x_1y_1 touche le contour apparent de la sphère inscrite. Ces deux plans forment, on le sait, avec les plans des courbes communes aux deux surfaces un faisceau harmonique. Or nous avons la trace verticale $s'_1h'_1$ du plan des génératrices communes ; donc nous aurons la trace verticale du plan de la seconde courbe en menant par le point σ'_1, projection de la droite commune à tous ces plans, la quatrième droite $\sigma_1\varepsilon'_1$ du faisceau harmonique défini par $\sigma'_1(\alpha'_1\delta'_1h'_1)$. Ce plan de bout $\sigma'_1\varepsilon'_1$ coupe le cône suivant une ellipse dont on a immédiatement le grand axe $\eta'_1\zeta'_1$ et le centre i'_1. Sa projection horizontale est une ellipse dont l'un des axes est $\eta_1\zeta_1$, l'autre ayant pour longueur la corde de bout projetée en i'_1 et intérieure au parallèle qui passe par ce point. Il suffit de rabattre ce parallèle, dont le centre est j'_1, pour avoir la longueur $i'_1\mu'_2$ du demi-axe cherché, que l'on reporte en $i\mu$ perpendiculairement à $\zeta\eta$. On peut alors tracer cette ellipse en projection horizontale et obtenir ainsi, en y joignant les génératrices sh et sk, la projection horizontale de toute l'intersection des deux surfaces.

En projection verticale, l'ellipse donne une autre ellipse dont nous pouvons avoir un diamètre en projetant le diamètre $(i'_1p'_1, ip)$ suivant $p'i'$, son centre étant le point i'. Ce diamètre donne la direction conjuguée du diamètre horizontal, et par suite, connaissant la longueur $2i\mu$ de ce diamètre horizontal, nous pouvons tracer de suite un système de deux diamètres conjugués, ou un parallélogramme circonscrit à l'ellipse, et en déduire un tracé de la courbe par points.

Le solide étant limité au plan du parallèle $f'g'$, il faut encore construire l'intersection de ce plan et du


s'
m'
d'
c'
d'
w'
v'
a'
h'
p'
f'
g'
k'
s'₁
x
o
p
p'₁
x₁
h
l

cône : c'est une ellipse dont la projection verticale sur xy se réduit à son grand axe z_1y_1 : on obtient son petit axe en cherchant la longueur de la corde de bout qui en projection soit contenue dans le parallèle passant par ce point et que nous avons réduite en $z_1'y_1'$. Il suffit de reporter la longueur $\pi\beta$ en π' perpendiculairement à $\pi\beta$ pour obtenir le demi petit axe de la projection horizontale dont $\pi\beta$ est le demi grand axe. On peut alors tracer l'ellipse par points.

Points remarquables. — On détermine directement le point m' où $s'b'$ touche l'hyperbole méridienne en rappelant le point m d'intersection de sb avec le plan méridien de front, puis les points où l'ellipse touche l'hyperbole méridienne en cherchant la droite de front du plan de l'ellipse située dans le plan méridien de la surface, et prenant les points où elle coupe l'hyperbole.

En projection horizontale on obtient les points n et r où chaque ellipse touche le contour apparent du cône en prenant la projection verticale des génératrices de contour apparent horizontal sur le plan x_1y_1, soit $s_1'r_1'$, et en prenant les points n_1' et r_1' où elle traverse les plans de bout de chaque ellipse.

Visibilité. — Puisqu'on enlève le cône, on doit supprimer l'arc hk du parallèle inférieur qui est intérieur au cône ainsi que l'arc cdu du cercle de gorge qui est aussi à l'intérieur du cône. Il ne reste du contour apparent horizontal du cône que les segments nr des génératrices compris entre les deux ellipses. Le plan du parallèle supérieur de l'hyperboloïde cache d'ailleurs tout ce qui se projette à l'intérieur du cercle, en sorte qu'on ne voit sur la projection horizontale que les arcs de l'ellipse du plan inférieur compris entre les deux projections des parallèles limites.

En projection verticale on doit supprimer les arcs de l'hyperbole méridienne qui sont intérieurs au cône, tels $m'v'$ et $w'z'$; on découvre la portion de génératrice SH qui va du sommet s' au point où $s'h'$ traverse l'arc d'ellipse situé en avant et que la génératrice ne coupe pas dans l'espace ; l'autre génératrice $s'k'$ est entièrement vue, et toute l'ellipse est vue sauf l'arc qui va du contour apparent w' au point où elle traverse la projection $s'k'$ de la génératrice qui est en avant. Les portions de génératrices de contour apparent vertical du cône intérieures à l'hyperboloïde sont cachées.

QUESTIONS PROPOSÉES

2011. — 1° On demande d'intégrer l'équation différentielle

$$x^2 y' - 2xy - x^2 = 0$$

et de déterminer celle de ses intégrales qui prend la valeur 1 pour $x = 1$. Étudier cette fonction et construire sa courbe représentative.

2° Trouver la pente maximum des tangentes à cette courbe, le point d'inflexion, et le lieu de ces points quand la constante d'intégration varie.

Mêmes questions pour l'équation $xy' - (2x+1)y - x^2 = 0$. En plus trouver les équations orthogonales des courbes intégrales. E. H.

2012. — Le sommet A d'un angle BAC se meut sur une droite D et ses côtés AB et AC passent par deux points fixes B et C. On prend sur AB et AC les points D et E tels que $BD = CE = K$. Trouver l'enveloppe de la droite DE. N. ARÉNARIUS.

2013. — On considère une parabole et le triangle formé par les trois normales issues du point M du plan de cette parabole.

1° Trouver le lieu des points M pour lesquels ce triangle est isocèle, ainsi que le lieu du sommet N où se coupent les côtés égaux. Trouver aussi le lieu des deux autres sommets.

2° Le lieu du point M est une cubique R. Trouver les parties de cette cubique qui correspondent aux points M pour lesquels le triangle indiqué est réel et dire quelles sont les positions correspondantes du point N.

3° Voir ce qui arrive quand le point M est un des points réels d'intersection de la cubique R avec la parabole ou avec la développée de cette parabole. Où est le point M qui correspond à un triangle équilatéral ?

CAMILLE MASSING.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

22e Année. Avril 1912. N° 7.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

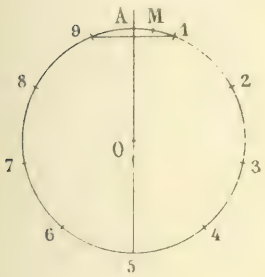
PREMIÈRE PARTIE

PROPRIÉTÉ DES POLYGONES RÉGULIERS

par M. **Mathieu Weill.**

Théorème. — *Si l'on considère la circonférence circonscrite à un polygone régulier d'un nombre impair de côtés, la somme des distances d'un point* M *de cette circonférence aux sommets numérotés* 1, 3, 5, ... *est égale à la somme des distances du point* M *aux sommets numérotés* 2, 4, 6, ...

Considérons, par exemple, un polygone régulier de neuf côtés ; désignons l'arc M1 par $2y$, et l'arc $\frac{\pi}{9}$ par ω.



La distance M1 a pour valeur, le rayon de la circonférence étant l'unité,

$$2\sin y\,;$$

la distance M2 a pour valeur $2\sin(y+\omega)$;
la distance M3 a pour valeur $2\sin(y+2\omega)$;
et ainsi de suite ; la distance M6 a pour valeur

$$2\sin(4\omega-y)\,,$$

la distance M7 a pour valeur $2\sin(3\omega-y)$. ..

L'égalité à démontrer est donc la suivante :

$$\sin y-\sin(y+\omega)+\sin(y+2\omega)-\sin(y+3\omega)+\sin(y+4\omega)$$
$$-\sin(4\omega-y)+\sin(3\omega-y)-\sin(2\omega-y)+\sin(\omega-y)=0,$$

ou bien $$\sin y\,[1-2\cos\omega+2\cos 2\omega-2\cos 3\omega+2\cos 4\omega]=0.$$

Or $\cos\omega+i\sin\omega$ satisfait à l'équation $x^9+1=0$,

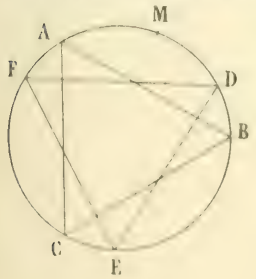
qui donne $$x^8-x^7+x^6-\ldots+1=0,$$

ou $$1-\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)=0,$$

ou $$1-2\cos\omega+2\cos 2\omega-2\cos 3\omega+2\cos 4\omega=0.$$

Le coefficient de $\sin y$ est donc nul, et le théorème est démontré ; la démonstration est, évidemment, générale.

Remarques. — 1° En considérant deux triangles équilatéraux inscrits dans une même circonférence ou un triangle équilatéral et un pentagone régulier, ou deux pentagones réguliers, ou d'autres combinaisons analogues, on obtient des théorèmes analogues au précédent.



Considérons, par exemple, deux triangles équilatéraux ABC, DEF ; on aura

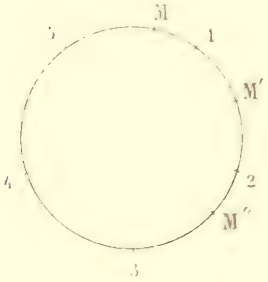
$$MC=MA+MB,$$
$$ME=MD+MF,$$

d'où $$MC+ME=MA+MB+MD+MF$$

et, aussi, $$MA+MB+MF=MC+MD+MF.$$

2° Considérons un pentagone régulier inscrit et un point M de la circonférence; on aura

$$M1 - M3 + M5 = M2 + M4,$$



tant que M reste entre les points 1 et 5; si M occupe la position M′, la relation devient $-M1 - M3 + M5 = M2 - M4$.

Si M occupe la position M″, la relation devient :

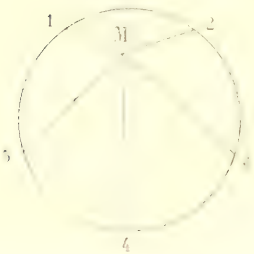
$$-M1 - M3 + M5 = -M2 + M4.$$

Le théorème est toujours le même.

3° Considérons toujours un pentagone régulier; en appliquant le calcul au problème posé, nous aurons à écrire une équation de la forme

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} = \sqrt{D} + \sqrt{E}.$$

En faisant disparaître les radicaux, nous aurons une équation du seizième degré, car, pour faire disparaître les radicaux d'une expression de la forme



$$\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} \pm \sqrt{\gamma} \pm \sqrt{\delta} \pm \sqrt{\varepsilon} = 0,$$

il faut faire le produit des 16 facteurs obtenus par toutes les combinaisons des signes (+) et (—); l'équation du seizième degré représente 8 fois le cercle circonscrit.

La fonction $M1 - M3 + M5 - M2 - M4$, des coordonnées du point M est positive quand le point M est au centre de la circonférence, donc elle est positive *pour tout point* M *du plan*, et s'annule, sans changer de signe, quand M traverse la circonférence.

PRODUIT DE DEUX SÉRIES

par M. **G. Valiron.**

Je me propose de modifier quelque peu la démonstration de Mertens (Voir Papelier, *Précis d'Algèbre, d'Analyse et de Trigonométrie*, p. 136). Je ferai d'abord quelques remarques.

Soit $u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$

une série absolument convergente. Posons $U_n = |u_n|$, et soit A la somme de la série de terme général U_n; on a évidemment, quels que soient les entiers m et q,

(1) $$U_m + U_{m+1} + \ldots + U_{m+q} \leqslant A.$$

Soit maintenant $v_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots$

une série convergente quelconque; je dis qu'on peut trouver un nombre B, tel que, quels que soient m et q, on ait

(2) $$|v_m + v_{m+1} + \ldots + v_{m+q}| \leqslant B.$$

En effet, soient S′ la somme de la série v_n, S'_n la somme des $n+1$ premiers termes, on peut trouver un nombre N, correspondant à un nombre positif donné β, tel que, pour $n > N$, on ait

$$|S_n - S'| < \beta.$$

Cela résulte immédiatement de la définition de la convergence. On a ainsi

$$|S_n| < |S'| + \beta, \qquad n > N;$$

et par suite, si B′ est le plus grand des nombres

$$|S'|, \ |S'_1|, \ \ldots, \ |S'_N|, \ |S'| + \beta,$$

on a, quel que soit n, $$|S'_n| \leqslant B',$$

et par conséquent $$|S_{m+q} - S_{m-1}| \leqslant |S_{m+q}| + |S_{m-1}| \leqslant 2B'.$$

L'inégalité (2) sera donc vérifiée à la condition de prendre $B = 2B'$.

Enfin, si nous considérons simultanément les deux séries (u_n) et (v_n) précédentes, à un nombre α positif donné, nous pouvons faire correspondre un nombre p, tel que, pour $n > p$, on ait

(3) $$U_{n-1} + U_{n-2} + \cdots + U_{n-p} < \alpha,$$

(4) $$| v_{n-1} + v_{n-2} + \cdots + v_{n-p} | < \alpha.$$

Cette propriété résulte de la convergence des deux séries de termes généraux v_n et U_n.

Arrivons maintenant au théorème sur le produit :

Considérons les deux séries $$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$
$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n + \cdots$$

la première étant absolument convergente, et ayant pour somme S *; la deuxième convergente (absolument ou non), et ayant pour somme* S′ *; la série dont le terme général est*

$$w_n = u_0 v_n + \cdots + u_n v_0,$$

est convergente et a pour somme SS′ *; elle est d'ailleurs absolument convergente si les deux séries données le sont.*

Désignons par S_n, S'_n, Σ_n les sommes des $n+1$ premiers termes des trois séries (u_n), (v_n), (w_n). Nous allons montrer que la différence $\delta_n = S_n S'_n - \Sigma_n$, tend vers zéro, lorsque n croît indéfiniment, c'est-à-dire qu'on peut trouver un nombre N, tel que, pour $n > N$, $$| \delta_n | < \varepsilon,$$

aussi petit que soit le nombre positif ε. Prenons dans les inégalités (3) et (4), $\alpha = \frac{\varepsilon}{A+B}$, et prenons $n > 2p$, p étant le nombre qui entraîne les inégalités (3) et (4). Nous avons

$$\delta_n = u_1 v_n + u_2 (v_{n-1} + v_n) + \cdots + u_{n-p} (v_{p+1} + \cdots + v_n)$$
$$+ u_{n-p+1} (v_p + \cdots + v_n) + \cdots + u_n (v_1 + v_2 + \cdots + v_n),$$

et par suite

$$| \delta_n | < U_1 | v_n | + U_2 | v_{n-1} + v_n | + \cdots + U_{n-p} | v_{p+1} + \cdots + v_n |$$
$$+ U_{n-p+1} | v_p + \cdots + v_n | + \cdots + U_n | v_1 + v_2 + \cdots + v_n | ;$$

d'après l'inégalité (4), la première ligne est inférieure ou égale à

$$(U_1 + U_2 + \cdots + U_{n-1}) \frac{\varepsilon}{A+B},$$

ou encore, d'après l'inégalité (1), à $$\frac{A\varepsilon}{A+B};$$

de même, puisque $n - p + 1 > p$, la seconde ligne qui, d'après l'inégalité (2), est inférieure ou égale à $$(U_{n-p+1} + \cdots + U_n) B,$$

est inférieure, d'après l'inégalité (3), à $$\frac{B\varepsilon}{A+B},$$

de sorte que $| \delta_n | < \varepsilon$ lorsque $n > 2p$.

Puisque δ_n tend vers zéro, $$\Sigma_n = S_n S'_n - \delta_n$$

a pour limite le produit SS′ des limites de S_n et S'_n. La première partie du théorème est donc démontrée.

Si la série (v_n) était aussi absolument convergente, et si $| v_n | = V_n$, la série de terme général

$$U_0 V_n + \cdots + V_0 U_n$$

est convergente ; puisqu'elle est le produit des séries de termes généraux U_n et V_n, et comme

$$| w_n | \leqslant U_0 V_n + \cdots + V_0 U_n,$$

on voit bien que la série (w_n) converge absolument.

NOTE

RELATIVE A LA SOLUTION DE LA TROISIÈME PARTIE DE LA QUESTION 1950 (**Ecole Polytechnique. 1911**).

Il y a lieu de remarquer que, tout arc pouvant se mettre sous la forme

$$x = n\pi + \varepsilon\alpha,$$

α étant un arc compris entre 0 et 100π, n un nombre entier, pair pour les arcs se terminant sur le premier et le quatrième quadrants, impair pour les autres, ε un facteur égal à ± 1, $+1$ dans le premier et le troisième quadrants, -1 dans les autres, on a toujours

$$y = (-1)^n \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} + \frac{n\pi}{\sin x} \right).$$

Cela montre, d'une façon précise, que l'adjonction de la table de $\frac{\pi}{\sin x}$ à celle de $\frac{x}{\sin x}$ suffit à tout, à une interpolation près pour les arcs intermédiaires.

SURFACES TRANSFORMÉES DES SURFACES TÉTRAÉDRALES PAR LA TRANSFORMATION D'AMPÈRE ET SOLUTION DE LA QUESTION 1970

par M. **E. Kéraval**

1970. — *On considère la surface*

$$(S) \qquad z^2 = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2).$$

1° *On demande de déterminer ses lignes asymptotiques et de faire voir qu'on peut exprimer x^2, y^2, z^2 en fonctions rationnelles de paramètres u, v tels que u reste constant sur chaque ligne asymptotique de la première famille et v sur chaque ligne de la seconde famille.*

2° *Quand un point M décrit une ligne asymptotique de (S), le plan tangent en M est également tangent au cône de sommet M d'un complexe tétraédral. Ce complexe varie quand on change de ligne asymptotique, mais le tétraèdre du complexe ne varie pas : il est formé des trois plans de coordonnées supposés rectangulaires et du plan de l'infini.*

J'avais proposé dans ce journal l'étude des lignes asymptotiques de la surface

$$c^2 z^2 = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2).$$

J'ai su depuis que M. E. Rouché avait présenté une note sur la surface (*Comptes Rendus de l'Académie*, 1877)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2},$$

connue en stéréotomie sous le nom de surface de l'Arrière voussure Saint-Antoine. M. Picard en parle également au tome premier de son cours d'analyse. C'est évidemment la même surface que la mienne aux notations près. Pour l'étude qu'on se propose on peut évidemment prendre tout simplement la surface

$$z = (x^2 - 1)(y^2 - 1),$$

qui en dérive par une transformation homographique simple qui conserve et les lignes asymptotiques et le tétraèdre fondamental T formé des trois plans de coordonnées et du plan de l'infini.

Je prendrai même la surface plus générale

$$(S) \qquad z = (x^2 - \alpha)(y^2 - \beta),$$

où α et β sont des constantes liées par la relation

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

Si avec les notations de Monge on désigne par p, q, r, s, t les dérivées de z par rapport à x et y du premier et du deuxième ordre, l'équation différentielle des lignes asymptotiques est

$$r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 = 0.$$

Ici cette équation devient

$$\frac{(1-\alpha)x^2}{(x^2-1)^2}\frac{dx^2}{x^2} + \frac{(1-\beta)y^2}{(y^2-1)^2}\frac{dy^2}{y^2} + 2\cdot\frac{x^2}{x^2-1}\cdot\frac{y}{y^2-1}\cdot\frac{dx}{x}\cdot\frac{dy}{y} = 0.$$

Si on pose $x^2 = X^2$, $y^2 = Y^2$, l'équation se simplifie et devient

$$(1)\qquad \frac{dX^2}{(X^2-1)^2} + \frac{dY^2}{(Y^2-1)^2} - \frac{2XY\,dX\,dY}{(X^2-1)(Y^2-1)} = 0.$$

On est ainsi ramené au cas primitif où $\alpha = 2$, $\beta = 2$.

L'équation (1) s'intègre par un procédé souvent employé. On change de variable de manière à faire disparaître le terme rectangle, il arrive alors que les variables se séparent.

Si l'on pose $X = \lambda$, $Y = f(\lambda, \mu)$, en égalant à zéro le coefficient de $d\lambda d\mu$ on trouve pour déterminer f l'équation

$$\frac{f'_\lambda}{f(f^2-1)} = \frac{\lambda}{\lambda^2-1}.$$

d'où facilement

$$X = \lambda, \qquad Y = \mu(\mu^2 - \lambda^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

L'équation à intégrer devient

$$\frac{d\lambda^2}{\lambda^2-1} = \frac{d\mu^2}{\mu^2+1},$$

d'où

$$\mu + \sqrt{\mu^2+1} = v(\lambda + \sqrt{\lambda^2-1}),$$
$$\mu - \sqrt{\mu^2+1} = u(\lambda - \sqrt{\lambda^2-1}),$$

d'où λ, μ en fonction de u et v, par suite X, Y et ensuite x, y en fonction de u, v qui sont les paramètres des lignes asymptotiques. Les équations paramétriques de la surface (S) sont alors

$$(S')\qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{(uv-1)^2}{(u^2-1)(v^2-1)}, \\[2ex] y^2 = \dfrac{(u+v)^2}{4uv}, \\[2ex] z^{2/3} = \dfrac{(u-v)^{2/3}}{4uv^{1/3}(u^2-1)^{1/3}(v^2-1)^{1/3}}. \end{cases}$$

Propriété des lignes asymptotiques des surfaces (S). — De l'équation (S) on tire

$$\begin{cases} \dfrac{px}{z} = \dfrac{x^2}{x^2-1}, \\[2ex] \dfrac{qy}{z} = \dfrac{y^2}{y^2-1}. \end{cases}$$

Mais

$$x^2 = \frac{(uv-1)^2}{(u^2-1)(v^2-1)}, \qquad y = \frac{(u+v)^2}{4uv},$$

d'où

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{px}{z}} = \dfrac{uv-1}{u-v}, \\[2ex] \sqrt{\dfrac{qy}{z}} = \dfrac{u+v}{u-v}, \end{cases}$$

les signes étant convenablement choisis devant les radicaux. On en déduit

$$(2)\qquad 2v\sqrt{\frac{px}{z}} + (1-v^2)\sqrt{\frac{qy}{z}} = v^2+1.$$

Or cette équation (2) traduit la propriété que j'ai énoncée pour l'asymptotique $v = \text{Cte}$. En effet cette équation exprime qu'au point (x, y, z) la normale à la surface transportée parallèlement à elle-

même à l'origine est sur un cône du second degré. Le plan tangent transporté à l'origine sera tangent au cône réciproque

$$xYZ + \frac{(v^2-1)^2}{4v^2}\,yXZ - \frac{(v^2+1)^2}{4v^2}\,zXY = 0,$$

équation de la forme

$$xYZ - kyZX - (k-1)zXY = 0.$$

C'est le cône du complexe de Chasles pour les droites telles que si elles coupent yOz en A, zOx en B, xOy en C, $\frac{CA}{CB} = k$.

Je vais montrer maintenant que les surfaces (S) dérivent des surfaces tétraédrales par la transformation d'Ampère. Cela me conduira à une deuxième méthode pour la détermination des lignes asymptotiques.

Transformation d'Ampère. — C'est une transformation dite « de contact ». Étant donné un point de l'espace E (x, y, z) et un plan passant par ce point,

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

elle lui fait correspondre dans l'espace E′ un point (x', y', z') et un plan passant par ce point

$$Z - z' = p'(X - x') + q'(Y - y'),$$

c'est-à-dire qu'à l'élément x, y, z, p, q, elle fait correspondre x', y', z', p', q', par les formules

$$(3) \qquad x' = p, \qquad y' = y, \qquad z' = z - px, \qquad p' = -x, \qquad q' = q.$$

Ces formules entraînent l'identité

$$(4) \qquad dz' - p'dx' - q'dy' = dz - pdx - qdy,$$

de telle sorte qu'aux différents points d'une surface S et à leurs plans tangents elles font correspondre les éléments analogues d'une deuxième surface S′.

Théorème. — *A une surface réglée la transformation d'Ampère fait correspondre une surface engendrée par une conique, et telle que les plans tangents à la surface le long de chaque conique enveloppent un cône qui, naturellement, sera du second degré, de telle sorte que la nouvelle surface sera à la fois « lieu de coniques et enveloppe de cônes du second degré »* (*).

Soient

$$\begin{cases} x = az + \alpha, \\ y = bz + \beta, \end{cases}$$

les équations d'une génératrice G; le plan tangent au point (x, y, z) de cette génératrice aura une équation de la forme

$$X - aZ - \alpha + \lambda(Y - bZ - \beta) = 0.$$

Si l'on pose $z = \mu$ nous pourrons écrire

$$\begin{cases} x = a\mu + \alpha, \qquad y = b\mu + \beta, \qquad z = \mu, \\ p = \dfrac{1}{a + b\lambda}, \qquad q = \dfrac{\lambda}{a + b\lambda}. \end{cases}$$

En outre, d'après la loi de Chasles, λ, μ sont liés homographiquement. La transformation d'Ampère donne alors

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a + b\lambda}, \\ y = b\mu + \beta, \\ z = \dfrac{b\mu\lambda - \alpha}{a + b\lambda}, \\ p = -a\mu - \alpha\lambda, \\ q = \dfrac{\lambda}{a + b\lambda}. \end{cases}$$

(*) Voir la thèse de M. Blutel.

Comme λ, μ sont liés homographiquement, les trois premières équations montrent que le point (x', y', z') décrit une conique C. Il reste à vérifier que le long de cette conique le plan tangent passe par un point fixe (x_0, y_0, z_0), c'est-à-dire que l'on a une relation de la forme

$$p'(x_0 - x') + q'(y_0 - y') = z_0 - z'.$$

En remplaçant x', y', z', p', q', par leurs valeurs on trouve

$$abx_0\lambda\mu + \lambda(bzx_0 + bz_0 - y_0 + y) + a\mu(ax_0 - 1) - a(z_0 - zx_0) = 0,$$

qu'il faut identifier avec la relation homographique

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0.$$

On a ainsi trois équations qui donnent x_0, y_0, z_0.

Dans le cas d'une génératrice torsale, c'est-à-dire le long de laquelle le plan tangent est fixe, il lui correspond une autre génératrice. Je laisse de côté les cas particuliers.

On peut arriver au même résultat en remarquant qu'à une droite correspond un paraboloïde hyperbolique, ayant zOx, zOy pour plans directeurs, c'est-à-dire passant par deux droites fixes ; à une surface réglée correspond l'enveloppe de ces paraboloïdes ; or, deux paraboloïdes infiniment voisins ont une conique commune à distance finie.

Transformée de la quadrique $y^2 + z^2 = 1 + x^2$. — Il est facile de vérifier que la surface (S) et celles qu'on obtient en changeant x, y, z en $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$, dérivent des surfaces tétraédrales par la transformation d'Ampère. Je m'en tiendrai à la surface de l'Arrière-voussure Saint-Antoine. Partons de l'hyperboloïde

$$(\mathrm{H}) \qquad y'^2 + z'^2 = 1 + x'^2$$

dans l'espace E'. On peut remplacer cette équation par

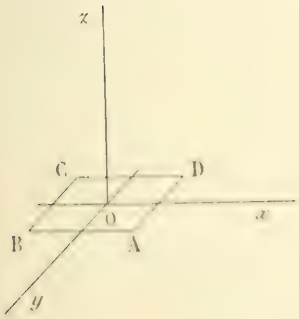
$$(\mathrm{H}_1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{uv - 1}{v - u}, \\ y' &= \frac{u + v}{v - u}, \\ z' &= \frac{uv - 1}{v - u}, \qquad p' = \frac{x}{z}. \end{aligned} \right.$$

Dans l'espace E nous aurons

$$x = -p', \qquad y = y', \qquad z = z' - px',$$

donc

$$(\Sigma) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{uv + 1}{1 - uv}, & x^2 - 1 &= \frac{4uv}{(1 - uv)^2}, \\ y &= \frac{u + v}{v - u}, & y^2 - 1 &= \frac{4uv}{(v - u)^2}, \\ z &= \frac{4uv}{(1 - uv)(v - u)}, \end{aligned} \right.$$



qui donne bien $z^2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$, c'est-à-dire la surface à étudier. Dans les formules (H_1), u et v étant les paramètres des génératrices rectilignes, donc d'après le théorème précédent, sur la surface (Σ) les courbes $u = \mathrm{C}^{te}$ et $v = \mathrm{C}^{te}$ sont des coniques le long desquelles il existe un cône circonscrit. Si A, B, C, D sont les quatre points coniques de (Σ), les plans des coniques passent par AC ou par BD. Les cônes circonscrits le long des coniques dont les plans passent par AC sont sur BD et réciproquement. L'étude est facile, je la laisse de côté.

Recherche des lignes asymptotiques. — L'équation à intégrer est

$$\frac{dx^2}{x^2-1} - \frac{dy^2}{y^2-1} + \frac{2xy\,dx\,dy}{(x^2-1)(y^2-1)} = 0,$$

et nous sommes conduits à poser

$$x = \frac{uv+1}{1-uv}, \qquad y = \frac{u+v}{v-u},$$

d'où l'on tire très facilement

$$\text{(E)} \qquad \frac{du^2}{u^2-u} = \frac{dv^2}{v^2-v}.$$

Cette équation, où les variables sont séparées, conduit aux fonctions elliptiques, et pourtant l'intégrale est algébrique d'après ce que nous savons déjà. On a là un cas particulier d'une équation célèbre intégrée par Euler et qui conduit au théorème d'addition des fonctions elliptiques. On peut exposer la question d'une façon *très élémentaire* par la méthode suivante que j'emprunte à M. Kœnigs (Darboux, tome quatre de la *Théorie des surfaces*) :

Intégration de l'équation d'Euler

$$\text{(E')} \qquad \frac{dx}{\sqrt{lx^4+mx^3+nx^2+px+q}} = \frac{dy}{\sqrt{ly^4+my^3+ny^2+py+q}}.$$

Écrivons l'équation générale d'une conique

$$AX^2+AY^2+A''+2BY+2B'X+2B''XY=0,$$

en coordonnées ordinaires. Puis posons

$$X = xy, \qquad Y = x+y,$$

et prenons x, y pour nouvelles coordonnées. L'équation de la conique devient

$$(x-y)^2 + Py^2 + 2Qy + R = 0,$$

ou

$$P = Ax^2 + 2B'x + A'',$$
$$Q = Bx^2 + (A+B'')x + B,$$
$$R = A + 2Bx + A'',$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y} = Py + Q.$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = P^2y^2 + 2PQy + Q^2 = Q^2 - PR,$$

car

$$Py^2 + 2Qy = -R.$$

Ainsi

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = Q^2 - PR = H(y),$$

et, à cause de la symétrie en x et y,

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = H(x).$$

Mais $z(x, y) = 0$ donne $\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 0$,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{H(x)}{H(y)} = \frac{H(y)}{H(x)}$$

Donc

$$\frac{dy}{\sqrt{H(y)}} = \frac{dx}{\sqrt{H(x)}}.$$

Si on calcule H on trouve :

$$H(x) = ax^4 + 2bx^3 + (a+2b'')x^2 + 2b'x + a,$$

a, a', a'', b, b', b'' étant les coefficients de l'équation tangentielle de la conique, $a = A'A'' - B^2$, etc.

Réciproquement, si on veut intégrer l'équation (E), on pose

$$a = -l, \qquad 2b = -n - r, \qquad u = -q,$$
$$2b = m, \qquad 2b = p, \qquad v = q.$$

Il reste une constante arbitraire λ.

On a donc les coniques d'un faisceau tangentiel ; de là on remonte à l'équation ponctuelle en X et Y, puis, en remplaçant X par xy et Y par $x - y$, on a la relation cherchée en x et y :

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Si l'on applique ce procédé si simple à l'équation (E) on trouve, pour relation entre u et v,

$$(A) \qquad u^2v^2 + 2\lambda uv(u + v) + \lambda^2(u - v)^2 - 2uv - 2\lambda(u - v) - 1 = 0$$

Je dirai que c'est la relation qui correspond à la ligne asymptotique λ.

Propriétés des lignes asymptotiques de Σ. — Cherchons d'abord le degré, c'est-à-dire le nombre des points de rencontre de l'asymptotique λ et d'un plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

qui donne

$$uv = \frac{P}{Q},$$

en posant $P = (A + D - B)u - (A + B + D)v$, $Q = (D - A - B)u + (A - B - D)v - 4C$.

En tenant compte de cette relation, (A) devient l'équation d'une cubique ayant un point simple à l'infini dans la direction $Q = 0$. Cette cubique coupe $Quv = P$ en 8 points, le neuvième point à l'infini ne convenant pas comme on doit le vérifier à priori. Ainsi les lignes asymptotiques sont du degré 8. On vérifie encore plus facilement les autres propriétés que voici :

Chaque asymptotique coupe en deux points les coniques de la surface qui passent soit par AC soit par BD. Elles coupent en quatre points chaque droite double de la surface, c'est-à-dire les droites de l'infini du plan zOx et du plan zOy. Elles coupent aussi en quatre points les coniques $x = C^{te}$ ou $y = C^{te}$, c'est-à-dire dont les plans passent par une droite double. Enfin chaque ligne asymptotique passe par les quatre points coniques A, B, C, D qu'elle admet pour points de rebroussement.

Symétries d'une ligne asymptotique λ. — D'abord les asymptotiques λ et $-\lambda$ sont symétriques par rapport au plan xOy et par suite, comme nous le verrons, par rapport à zOx, zOy. Ceci nous permettra de supposer $\lambda > 0$. L'équation (A) ne change pas si on échange u et v, d'où symétrie par rapport à Oz ; elle ne change pas si on change u en $\frac{1}{u}$ et v en $\frac{1}{v}$, d'où symétrie par rapport à Ox ; enfin elle ne change pas non plus si on change u en $\frac{1}{v}$ et v en $\frac{1}{u}$, d'où symétrie par rapport à Oy. Ainsi chaque ligne asymptotique admet les trois axes Ox, Oy, Oz pour axes de symétrie.

Construction de la courbe (A). — A chaque point de cette courbe correspond par les formules Σ un point de l'asymptotique λ.

La relation (A) peut s'écrire :

$$(u + v)^2v^2 + 2\lambda(u - v)(u - 1)(v - 1) - (u - 1)^2 - (v - 1)^2 = 0.$$

ou

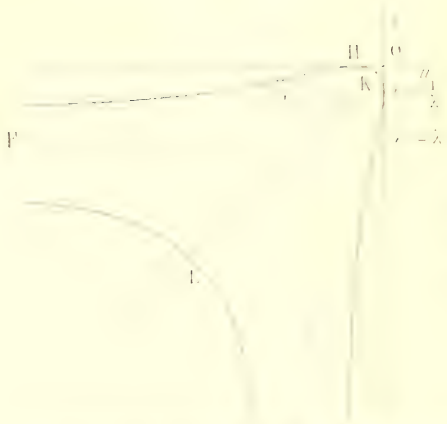
$$v = \frac{-(u - 1)(\lambda u - 1) \pm \sqrt{-4\lambda u + 1}\,(u + 1)(u + v)}{(u + 1)^2}$$

Comme $\lambda > 0$ il faut donc $u \leq 0$.

La forme change un peu suivant les valeurs de λ.

Pour ne pas allonger cet article je supposerai $\lambda > 1$. Alors on a la courbe ci-contre.

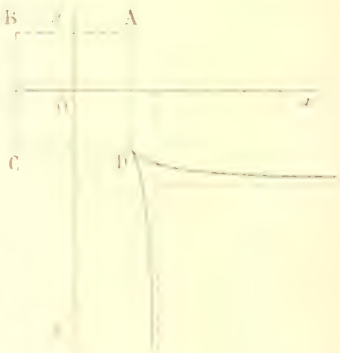
(On a représenté en points l'hyperbole $uv = 1$.)



A cause de la symétrie en u, v il suffit de considérer les 2 arcs FGHK et FL, mais on peut encore réduire. Si la courbe passe par le point $x = u$, $y = v$, elle passe par $x = \frac{1}{u}$, $y = \frac{1}{v}$, $z = \frac{1}{uv} = \frac{y'}{x} = \frac{y}{x}$. Les points correspondants se trouvent sur des droites passant par l'origine. K et L se correspondent, donc les arcs KH et LI se correspondent ; de même LG et HG. Il suffit donc de déplacer le point (u, v) sur l'arc GHK. Sur cet arc on a

$$y(x - 1) = 0,$$
$$x(y - 1) = 0,$$
$$z(x - y) = 0,$$
$$(x - y)(y - 1) = 0.$$

Donc sur l'asymptotique $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. On a ainsi un morceau de la courbe situé dans le trièdre $Oxyz$. Par symétrie on a une asymptotique formée de 4 morceaux superposables par rotation de 180° autour des axes de coordonnées et complètement séparés les uns les autres. Quand on suit l'arc GHK le point M qui décrit l'asymptotique part de l'infini, va au point conique $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$, qui est un point de rebroussement, et remonte à l'infini. La projection sur xOy a la forme indiquée sur la figure, il est facile de trouver les asymptotes.



Quant à la surface elle-même, elle se compose d'une nappe fermée qui se projette à l'intérieur du carré ABCD, auquel elle vient se raccorder, et de 4 nappes indéfinies qui se projettent dans les angles droits opposés aux angles du carré. C'est sur ces nappes que se trouvent toutes les parties réelles des lignes asymptotiques.

ALGÈBRE

1969. — *Démontrer que le déterminant*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & (\alpha - \beta)^2 & (\alpha - \gamma)^2 & (\alpha - \delta)^2 \\ (\beta - \alpha)^2 & 0 & (\beta - \gamma)^2 & (\beta - \delta)^2 \\ (\gamma - \alpha)^2 & (\gamma - \beta)^2 & 0 & (\gamma - \delta)^2 \\ (\delta - \alpha)^2 & (\delta - \beta)^2 & (\delta - \gamma)^2 & 0 \end{vmatrix}$$

est divisible par le carré du déterminant de Vandermonde

$$V = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \beta & \beta^2 & \beta^3 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 \\ 1 & \delta & \delta^2 & \delta^3 \end{vmatrix}.$$

Indiquer le quotient.

Démontrer que ce quotient a un signe constant et qu'il ne s'annule que lorsque trois des quatre quantités α, β, γ, δ sont égales.

Le déterminant peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 0 & A & B & C \\ A & 0 & D & E \\ B & D & 0 & F \\ C & E & F & 0 \end{vmatrix} = \Delta,$$

en posant $\qquad A = (\alpha - \beta)^2, \qquad B = (\alpha - \gamma)^2, \qquad$ etc.

Si on le développe par rapport aux mineurs formés avec les deux premières lignes, on trouve immédiatement pour valeur de ce déterminant

$$\Delta = A^2F^2 + B^2E^2 + C^2D^2 - 2ABEF - 2ACDF - 2BCDE.$$

C'est une expression du seizième degré en α, β, γ, δ.

Posons alors

$$(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) = u,$$
$$(\alpha - \gamma)(\beta - \delta) = v,$$
$$(\alpha - \delta)(\beta - \gamma) = w;$$

nous aurons évidemment $\qquad v - w = \alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\delta - \beta\gamma = u.$

D'autre part, d'après ce qui précède,

$$\Delta = u^8 + v^8 + w^8 - 2u^4v^4 - 2u^4w^4 - 2v^4w^4$$

et ceci peut s'écrire $\qquad \Delta = u^4(u^4 - 2v^4 - 2w^4) - v^8 - w^8.$

ou $\qquad \Delta = u^4(u^4 - 2v^4 - 2w^4) + (v^4 - w^4)(v^4 + w^4).$

Nous voyons donc que Δ est divisible par u^4 ; il est de même divisible par v^4 et w^4 ; dès lors il est divisible par $u^2v^2w^2$, c'est-à-dire par le carré du déterminant de Vandermonde.

Le quotient est une fonction du quatrième degré de α, β, γ, δ, c'est-à-dire du premier degré de u^2, v^2, w^2. En outre, c'est une fonction symétrique de ces trois quantités ; c'est donc une fonction de la forme $\qquad A(u^2 + v^2 + w^2),$

A étant une constante.

Pour avoir cette constante nous faisons $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $\delta = -1$, alors $u = 1$, $v = 4$, $w = 3$, et nous avons $\Delta = 1 - 2.4^4 - 2.3^4 - 7(16 - 9) = 29952$.

Nous avons aussi $\qquad (u^2 + v^2 + w^2)u^2v^2w^2 = 26 \cdot 16 \cdot 9;$

en divisant successivement 29952 par 9, 16 et 26, nous trouvons 8 pour quotient, donc $A = 8$ et

$$\Delta = 8(u^2 + v^2 + w^2)V^2,$$

V^2 étant le carré du déterminant de Vandermonde

Nous voyons de suite que le quotient est positif et ne peut s'annuler que si trois des quantités α, β, γ, δ sont égales.

R. DONTOT, élève de l'École normale supérieure.

M. E. N. Barisien nous a envoyé une très bonne démonstration basée sur l'identité

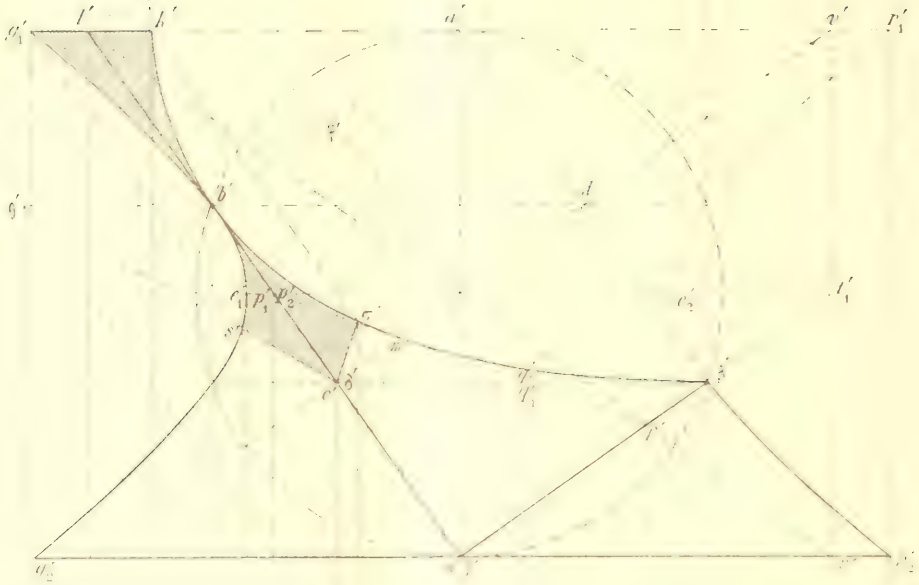
$$2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 = (a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b).$$

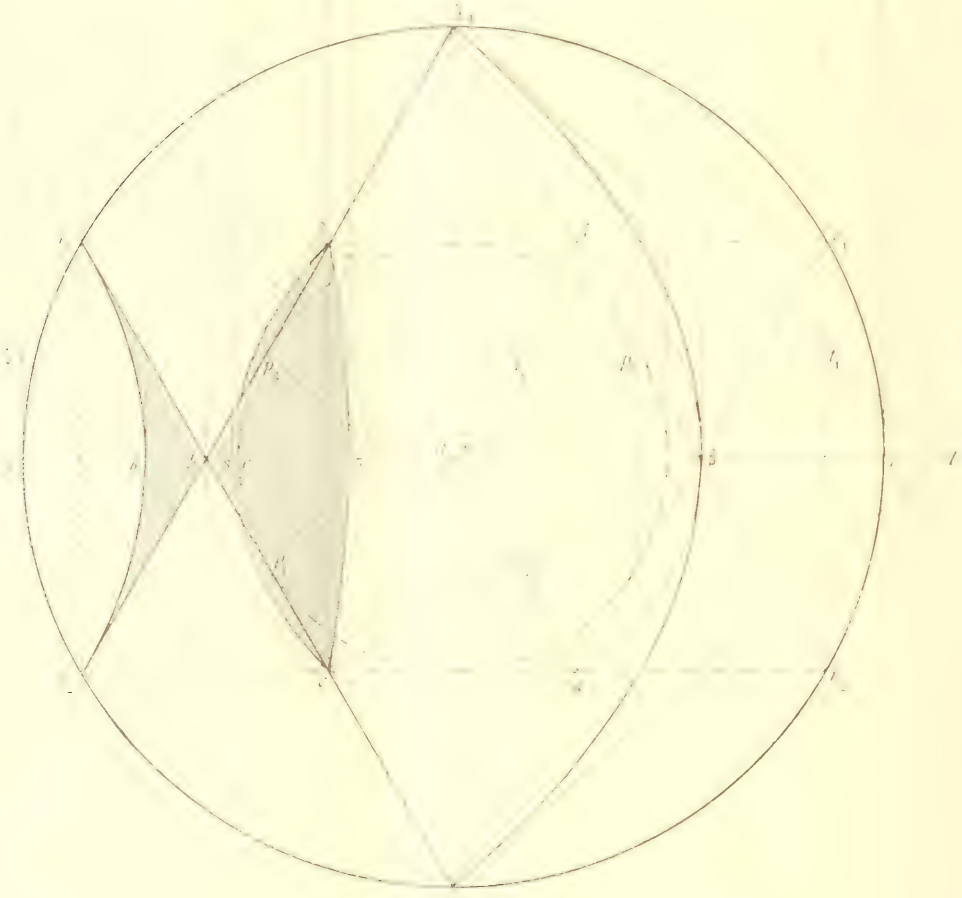
Elle donne de suite

$$\Delta = (\alpha - \beta + \gamma - \delta)(\alpha - \beta - \gamma + \delta)(\alpha + \beta - \gamma - \delta)(\alpha + \beta + \gamma + \delta)(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\beta - \gamma)^2(\alpha - \delta)^2(\beta - \delta)^2(\gamma - \delta)^2;$$

et la question s'achève sans peine.

Bonne solution : M. G. Lach, à Rodez.





Escala $\frac{3}{5}$

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

1962. — *Un cube abcdαβγδ a pour diagonales les droites αγ, bβ, cγ, dδ. La diagonale αγ est verticale et sa longueur vaut 12 cm. Sur l'épure, elle se projette suivant le grand axe de la feuille ; son extrémité inférieure (α, α') est placée de manière que αα' = 12 cm et que le point α soit à 12 cm du bord inférieur du cadre. La diagonale bβ est de front, le point b à gauche du point β et plus haut que lui. L'arête cd est en avant du plan de front αabβ, le point c à gauche du point d.*

Cela posé, on considère :

1° L'hyperboloïde qui a pour directrices les trois droites bc, dβ, γδ ;

2° Le paraboloïde qui a pour plan directeur le plan abcd et pour directrices les droites bδ et cβ.

On demande :

1° De déterminer l'intersection des deux surfaces ;

2° De représenter le solide limité d'une part à ces deux surfaces, d'autre part aux plans horizontaux menés par les extrémités de la diagonale verticale du cube. L'arête αβ fait partie de ce solide ;

3° De déterminer les ombres produites sur la surface de ce solide par des rayons lumineux parallèles à la droite bα ;

4° de calculer, à 1mm² près, l'aire de la section faite dans ce solide par le plan horizontal mené par le point β.

Expliquer succinctement l'épure.

Cadre 28 × 44 cm.

(École normale supérieure et bourses de licence, concours de 1911.)

L'hyperboloïde défini par les trois arêtes du cube parallèles à ses trois dimensions a pour centre le centre du cube et est de révolution autour de la diagonale verticale, son cône asymptote ayant pour demi-angle au sommet l'angle formé par chacune des arêtes issues de A avec la diagonale verticale. Nous avons par la construction bien connue la projection verticale du cube, dont la diagonale verticale a une longueur donnée, $a'\alpha'$: il suffit de décrire la circonférence de diamètre $a'\alpha'$ et de partager ce diamètre en trois parties égales, puis de mener $b'd'$ et $c'\beta'$ par les points de division perpendiculairement à la diagonale pour obtenir le rectangle $a'b'\alpha'\beta'$ qui donne le contour apparent vertical du cube. Son contour apparent horizontal est l'hexagone régulier inscrit dans le cercle de rayon ab et dont un côté, cd, est de front.

Le cercle inscrit dans cet hexagone est le cercle de gorge de l'hyperboloïde et nous en déduisons les sommets e'_1, e'_2 de l'hyperbole méridienne, dont les asymptotes sont $c'o'd'$ et la droite $o'f'$, symétrique par rapport à l'axe $a'\alpha'$. On peut maintenant construire l'hyperbole et la limiter aux deux parallèles passant par les points a' et α', dont la projection horizontale commune est la circonférence de rayon og, qui forme avec le cercle de gorge oe le contour apparent horizontal de l'hyperboloïde.

Le paraboloïde, ayant pour plan directeur le plan $abcd$ et pour directrices $b\delta$ et $c\beta$, a pour second plan directeur le plan $abcd$ et par suite pour axe la droite ab. Les plans directeurs étant rectangulaires, c'est un paraboloïde équilatère dont les plans principaux sont le plan de front aob et le plan de bout ab. Le plan bcd, perpendiculaire à l'axe, coupant la surface suivant les deux génératrices bc et $b\delta$, est le plan tangent au sommet b du paraboloïde. Le contour apparent vertical sera donc la parabole principale d'axe $b'\alpha'$ et de sommet b'. Cette parabole passe d'ailleurs par le point β' où elle est tangente à la droite $\delta'\beta'$, car les deux droites $\beta\delta$ et βc sont deux génératrices de systèmes différents du paraboloïde et leur plan, qui est horizontal, est tangent à la surface du point (β, β'). Donc la sous-normale, qui est la projection de $\beta'n'$ sur l'axe, ou la projection de son égale $\alpha'a'$, est précisément $a'b'$, en sorte que le foyer de la parabole méridienne est au point φ', milieu de $a'b'$. On peut donc construire cette parabole. Il est facile d'en obtenir quelques points remarquables, par exemple le point m', intersection des génératrices p_1q_1 et p_2q_2, dont le plan de bout donne la tangente $p'q'$ au point m', situé sur $c'd'$. On détermine aussi le point k' où la parabole traverse le plan du parallèle $a'g'_1$, et qui donne, par sa projection horizontale k, le sommet de la parabole section du paraboloïde par le plan de ce parallèle.

Le contour apparent horizontal du paraboloïde est la parabole projection de la section de la surface par le plan diamétral conjugué des cordes verticales. Ce plan est le plan de bout parallèle au plan principal $a'b'$ et passant par le point φ'' où l'horizontale du foyer φ' coupe la directrice de la parabole méridienne. On voit aisément qu'en raison des données particulières la trace de ce plan $\varphi''l'$ coupe le parallèle $a'g_1$ précisément au point l', où la droite $\alpha'b'$ coupe $a'g'_1$, en sorte qu'il ne restera rien de la parabole contour apparent horizontal dans la projection du solide défini dans l'énoncé.

Intersection des deux surfaces. — On voit immédiatement que les deux surfaces ont en commun les deux génératrices bc et $b\delta$ qui forment une courbe plane commune ; elles se coupent donc suivant une seconde courbe plane. Comme elles ont toutes deux pour plan de symétrie le plan de front aob, le plan de cette seconde courbe est un plan de bout.

La projection verticale de l'intersection est donc une conique réduite à deux droites et ces deux droites sont les sécantes communes aux deux méridiennes, l'une d'elles étant la tangente en b'. Comme la parabole a son axe parallèle à l'une des asymptotes de l'hyperbole, l'autre sécante commune est parallèle à cette asymptote, et puisqu'elle passe par le point β', c'est précisément la droite $\alpha'\beta'$. Il suffit donc de prendre l'intersection d'une des deux surfaces par le plan de bout $\alpha\alpha'\beta'$. C'est manifestement une parabole égale à la parabole principale du paraboloïde. La projection horizontale a pour sommet le point β, pour axe $\alpha\beta$ et nous obtenons son foyer en construisant la tangente en λ_1 qui est la droite $\lambda_1 t$ telle que $\beta t = \alpha\beta$. Comme vérification, on remarque que la tangente $\lambda_1 t$ passe au point $t_1 t'_1$ intersection des horizontales de même cote du plan sécant $\alpha'\beta'$ et du plan tangent à l'hyperboloïde au point λ_1, à savoir le plan des génératrices $\lambda_1 p_2$ et $\lambda_1 p_3$. On en déduit la normale en λ_1 et par suite la sous-normale, qui fait connaître le paramètre. On peut donc tracer cette parabole $\lambda_1\beta\lambda_2$.

La projection horizontale de l'intersection se compose donc de l'arc de parabole ainsi tracé et des deux portions de génératrices $\lambda_1 l_2$ et $\lambda_2 l_1$.

Il reste à limiter le paraboloïde aux deux parallèles $a'g'_1$ et $\alpha'g'_2$. Nous avons déjà dit que le plan supérieur donne une parabole de sommet k et d'axe kg passant par les points l_1 et l_2. Cette parabole étant tangente en l_1 et l_2 aux deux génératrices puisqu'elle touche en ces points la parabole de contour apparent horizontal, on a immédiatement son foyer et on peut la tracer par le procédé ordinaire.

La section du paraboloïde par le plan horizontal $\alpha'g'_2$ est une hyperbole tangente en λ_1 et λ_2 au parallèle de l'hyperboloïde et par suite qui a ces points pour sommets. Il n'en reste donc rien sur le solide commun défini par l'énoncé.

En résumé, le solide est limité : en projection verticale par la parabole $k'b'\beta'$, l'arc d'hyperbole $g'_1 b' g'_2$, l'arc $\beta' r'_2$, le parallèle $g'_2 r'_2$, le segment $g'_1 l' k'$, la droite $l'b'\lambda'$ et la seconde section $\lambda'\beta'$; en projection horizontale, par le parallèle αg de l'hyperboloïde, l'arc $l_1 g l_2$ du parallèle supérieur, l'arc de parabole $l_1 k l_2$, les deux génératrices $l_2\lambda_1$ et $l_1\lambda_2$ puis l'arc de parabole $\lambda_1\beta\lambda_2$; il reste aussi l'arc du cercle de gorge $p_2 p_1$ qui est caché par la surface convexe du paraboloïde. Toutes les autres lignes sont vues ; l'arc $l_1 g l_2$ du parallèle inférieur est caché mais a la même projection que l'arc qui est vu sur le parallèle supérieur.

Ombre du solide. — Cherchons d'abord s'il y a une courbe d'ombre propre sur la surface de l'hyperboloïde et celle du paraboloïde. Cette courbe serait la section diamétrale conjuguée des cordes parallèles à la direction $b\alpha$ des rayons lumineux. Or sur l'hyperboloïde cette section est l'ellipse de bout projetée suivant $b'\beta'$ et l'on voit qu'elle est entièrement sur la portion de surface enlevée. Sur le paraboloïde la courbe d'ombre serait la section principale située dans le plan $a'b'$ et cette section n'a que le point (b, b') sur la surface conservée. Donc nous n'avons qu'à chercher l'ombre portée sur les deux surfaces réglées par la surface plane limitée aux arcs $l_1 g l_2$ et $l_1 k l_2$. L'arc $l_1 g l_2$ donne une surface cylindrique à base circulaire dont il faut prendre la seconde courbe plane commune à l'hyperboloïde. Ce cylindre, ayant pour plan de symétrie le plan méridien de front de l'hyperboloïde, coupe celui-ci suivant une seconde courbe dont le plan est de bout. On en a un point à l'intersection (s, s') de la parallèle à $b'\alpha'$ menée par g'_1 avec l'hyperbole méridienne, et on en a deux autres points en δ et c sur les génératrices $b\delta$ et bc dont le plan contient la direction $b\alpha$, en sorte que $s'c'$ est la projection verticale de la courbe d'ombre ; la projection horizontale est l'arc d'ellipse $\delta s c$ dont le sommet est en s ; on peut construire la tangente en c par exemple en prenant l'intersection du plan de bout et du plan tangent en c à l'hyperboloïde ; on obtient ainsi $0c$.

Il est manifeste que le cylindre d'ombre portée par l'arc $l_1 g l_2$ ne coupe pas la portion de surface du paraboloïde qui limite le solide commun. Prenons maintenant le cylindre parabolique de base $l_1 k l_2$; il ne coupera pas l'hyperboloïde, mais il coupera la surface du paraboloïde suivant une seconde courbe plane, et comme les deux surfaces ont pour plan de symétrie commun aussi bien le plan de bout $a'b'$ que le plan de front ag, la seconde courbe plane se projette verticalement suivant une droite symétrique de $a'g'$, par rapport à $a'b'$; on en conserve le segment $\sigma'\delta'$. Horizontalement, c'est un arc de parabole $\delta\sigma c$, d'axe $a\sigma$, de sommet σ et dont on a la tangente aux points δ et c par la construction ordinaire de la sous-tangente. Nous remarquerons que l'arc d'ellipse $\delta s c$ est vu sur la portion de surface de l'hyperboloïde qui se projette dans l'angle $\lambda_1 b l_1$ puis caché par la surface du paraboloïde projetée dans l'angle $\delta b c$, tandis que l'arc de parabole d'ombre $\delta\sigma c$ est entièrement vu.

La section du solide par le plan horizontal du point β se compose des deux génératrices $\beta\delta$ et βc sur le paraboloïde, et de l'arc de parallèle $\delta b c$ sur l'hyperboloïde ; l'aire demandée se compose donc de l'aire du triangle équilatéral de côté βc augmentée de l'aire du segment $c\delta l$, ce qui revient à prendre les deux tiers du triangle et leur ajouter le tiers du cercle. On aura donc la formule

$$S = \frac{R\sqrt{3}}{6}\left(\frac{2\pi R}{3} + \frac{R}{6}\right)\left(2\pi + \sqrt{3}\right)$$

En constatant que $R = 0^m,65$, on obtient ainsi $S = 0^{m}\,,22$, avec une erreur inférieure à $0^{m}\,,001$.

QUESTIONS PROPOSÉES

2014. — 1° Trouver la condition pour que l'équation

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + f = 0$$

ait deux racines égales et de signes contraires.

2° Quand l'équation est quelconque, on change x en $x + h$ et on détermine h de façon que la nouvelle équation jouisse de la propriété signalée. Former l'équation en h et en déduire l'équation aux sommes des racines deux à deux.

3° Trouver, à l'aide de la nouvelle équation, la condition pour que les racines soient harmoniques et montrer comment on pourrait résoudre l'équation dans ce cas. E. H.

2015. — Étant donnés une hyperbole H et un point A dans son plan, par le point A on mène une sécante variable AR, et on considère la parabole P bitangente à l'hyperbole H aux points M et N où la sécante AR la rencontre :

1° Trouver l'équation de la parabole P ; démontrer que par tout point du plan passent, lorsque la sécante AR varie, deux paraboles réelles ou imaginaires ; discussion ;

2° Démontrer analytiquement et géométriquement que la tangente à la parabole P au point I, où elle est rencontrée par celui de ses diamètres qui passe par le point A, a une équation indépendante du coefficient angulaire de la sécante AL ;

3° K désignant le pôle de AR par rapport à l'hyperbole H, trouver le lieu du point d'intersection de la droite KI avec la sécante AR lorsque cette sécante tourne autour du point A ; nature du lieu suivant la position du point A dans le plan ;

4° Lieu de la projection du point A sur l'axe de la parabole P ; construire le lieu et trouver son aire dans le cas particulier où l'hyperbole H est équilatère. A. M. de L.

2016. — Soit O un point fixe d'un plan. A tout point M du plan, on fait correspondre un point M′ de la droite OM tel qu'entre les rayons vecteurs OM et OM′ de ces deux points on ait la relation $OM + \frac{a^2}{OM'} = b$.

1° Étudier cette transformation en supposant a et b positifs, et, plus spécialement, quand $b = 2a$.

2° Montrer ce qu'est la transformée d'une courbe quelconque. Dire quelles relations existent entre les angles V, les sous-normales et les sous-tangentes en deux points correspondants de ces courbes.

3° Appliquer à un cercle passant en O, à un limaçon ayant son point double au point O et à la spirale d'Archimède. L. Montaut, à Alger.

Note sur la question **2009**. — Dans l'énoncé de cette question, au lieu de « soit M un point de coordonnées p et q, il faut lire : *un point de coordonnées q et p*.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE

Concours de 1911

1953. — *Poulie fixe avec frottement.*

On néglige les poids et les épaisseurs de la poulie et de la corde et on admet que la corde ne peut pas glisser sur la poulie. La puissance P *et la résistance* Q *s'exercent suivant la corde tangentiellement à la poulie et sont supposées verticales. Soit* R *le rayon de la poulie circulaire,* R′ *le rayon de l'ouverture centrale circulaire ou œil de la poulie,* α *l'angle de frottement de la poulie sur l'axe fixe qui est un cylindre de révolution horizontal de rayon moindre que celui de l'œil.*

Pour une même valeur de Q, *on demande de donner, sans démonstration*

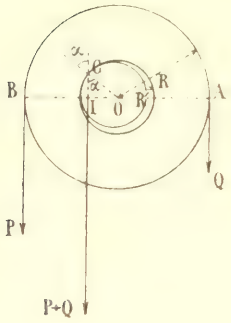
1° *L'expression de la valeur* P′ *de* P *qui correspond à l'état d'équilibre limite où la poulie est sur le point de tourner dans le sens de* P;

2° *L'expression de la valeur* P″ *de* P *qui correspond à l'état d'équilibre-limite où la poulie est sur le point de tourner dans le sens de* Q.

Application numérique. — *On donne* $R = 22,5$, $R' = 4,5$ *en centimètres*,
$P = 2,057$, $P' = 1,377$ *en kilogrammes*.

Calculer la résistance Q *et l'angle* α *de frottement.*

Lorsque la poulie est sur le point de tourner dans le sens de P, la résultante $P + Q$ des forces parallèles P et Q rencontre l'œil de la poulie en son point de contact avec l'axe et fait avec la normale à l'œil en ce point un angle égal à l'angle de frottement, α. En se reportant à la figure on peut écrire immédiatement :



$$P \times BI = Q \times AI.$$

d'où

$$(1) \qquad P = Q\,\frac{AI}{BI} = Q\,\frac{R + R'\sin\alpha}{R - R'\sin\alpha}.$$

On aura la valeur P″ de P correspondant à l'état d'équilibre limite lorsque la poulie est sur le point de tourner dans le sens de Q en changeant dans la formule précédente P′ en Q et Q en P″, d'où

$$(2) \qquad P'' = Q\,\frac{R - R'\sin\alpha}{R + R'\sin\alpha}.$$

A remarquer que

$$(3) \qquad P \times P'' = Q^2.$$

Application. — La relation (3) donne immédiatement

$$Q^2 = 2,057 \times 1,377 = \frac{11 \times 17 \times 9}{1\,000^2}.$$

d'où

$$Q = \frac{11 \times 9 \times 17}{1\,000} \text{ en kilog.} = 1^{\text{k}},683.$$

La relation (1) donne

$$\frac{P'}{Q} = \frac{17 \times 11^2}{17 \times 11 \times 9} = \frac{11}{9} = \frac{R + R'\sin\alpha}{R - R'\sin\alpha}.$$

d'où

$$\frac{11 - 9}{11 + 9} = \frac{2}{20} = \frac{R'}{R}\sin\alpha,$$

et enfin

$$\sin\alpha = \frac{R}{10R'} = \frac{225}{450} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$\alpha = \frac{\pi}{6} = 30^\circ.$$

G. LACH, à Rodez.

Autres solutions de MM. A. Rousseau, à Fourmes; C. Jacquet, à Grenoble.

1954. — *On considère deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox *et* Oy, *un point* P *mobile sur* Ox *d'abscisse* α *et un point* Q *mobile sur* Oy *d'ordonnée* β *et tels que :* $\alpha + \beta = 2a$, a *étant une longueur positive donnée.*

1° *Sur* PQ *comme diagonale on construit le carré* PRQS ; *montrer que l'un des sommets* R *reste fixe et trouver le lieu du quatrième sommet* S.

2° *Par le point* S *on mène la parallèle à la droite dont l'équation est* $y - x = 0$; *elle rencontre la droite* PQ *en un point* M.

Trouver, reconnaître et construire le lieu (G) *de* M *et démontrer qu'il est tangent à la droite* PQ *au point* M.

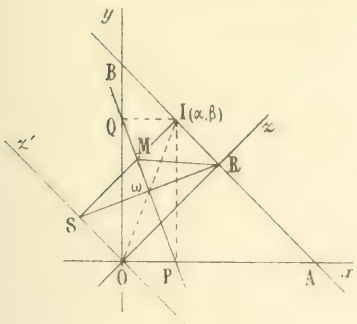
3° *Sachant que le vecteur-vitesse de* M *sur* (G) *est la projection orthogonale du vecteur* $\overline{MR}$ *sur la droite* PQ, *trouver l'équation du mouvement de chacun des points* P *et* Q *et discuter le mouvement de* M *sur* (G). *On supposera qu'à l'origine du temps, le point* Q *est à l'origine* O *des coordonnées.*

4° *Par l'origine* O *des coordonnées on mène le vecteur* OM′ *équipollent au vecteur-vitesse de* M. *Trouver, reconnaître et construire le lieu du point* M′. *Trouver le lieu de* V, *extrémité du vecteur-vitesse* M′V *de* M′ *et en déduire une construction géométrique du vecteur-accélération de* M.

1. Les points R et S sont à l'intersection du cercle décrit sur PQ comme diamètre,

$$x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y = 0,$$

avec la perpendiculaire à PQ en son milieu ω,



$$(1) \qquad y - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{\beta}\left(x - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Eliminant y entre ces équations, il vient

$$4x^2 - 4\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0,$$

d'où $$x = \frac{\alpha - \varepsilon\beta}{2}. \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

Telles sont les abscisses des points cherchés. En portant ces valeurs dans (1) il vient

$$y = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\alpha(\alpha - \varepsilon\beta)}{2\beta}, \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{\alpha - \varepsilon\beta}{2}.$$

En prenant $\varepsilon = +1$, et en tenant compte de la relation $\alpha + \beta = 2a$, on obtient le point R, $x = y = a$; il est fixe. En prenant $\varepsilon = -1$, on obtient le point S, $x = \frac{\alpha - \beta}{2}$, $y = \frac{\beta - \alpha}{2}$, d'où $x + y = 0$; ce point décrit la seconde bissectrice Oz′ de l'angle des axes.

Tout ceci s'établit géométriquement : les points R, S étant les milieux des demi-circonférences déterminées sur le cercle POQ par le diamètre PQ, sont sur les bissectrices Oz, Oz′ des axes. Si $\alpha + \beta = 2a$, le point I, projeté sur les axes en P et Q, décrit la droite AB qui intercepte sur les axes les segments $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, égaux à $2a$. Le cercle OPQ, qui passe par I, passe par la projection de O sur AB, qui n'est autre que le point R ; il est donc fixe.

2. La relation $\alpha + \beta = 2a$ conduit à poser $\alpha = a - l$, $\beta = a + l$, l étant le paramètre variable ; les coordonnées de S sont alors $x = l$, $y = -l$. La parallèle menée de S à la bissectrice Oz a pour équation $x - y - 2l = 0$,
et la droite PQ $\beta x + \alpha y - \alpha\beta = 0$, ou $(a - l)x + (a + l)y - (a^2 - l^2) = 0$.
Il suffit d'éliminer l entre ces équations pour obtenir le lieu de M ; cherchons plutôt les coordonnées de ce point, qui nous seront utiles ; on trouve

$$x = \frac{(a + l)^2}{2a}, \qquad y = \frac{(a - l)^2}{2a}.$$

En remplaçant dans l'une d'elles l par $\frac{x - y}{2}$, il vient

$$(x + y - 2a)^2 - 2xy = 0, \qquad \text{ou} \qquad (x - a)^2 + (y - a)^2 - \left(\frac{x + y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0.$$

Sous la première forme, on voit que le lieu est une parabole (G) symétrique par rapport à Oz et tangente aux axes en A et B. La seconde équation montre que le foyer de la parabole est le point R et sa directrice la seconde bissectrice, Oz′.

Si on écrit l'équation de PQ ainsi : $F = (x - y)l + a(x + y - a) = 0$, on voit que l'enveloppe de

cette droite est $(x-y)^2-4a(x+y)+4a^2=0$, c'est-à-dire la parabole (G) ; le point de contact est sur la droite obtenue en dérivant par rapport à l, qui est $2l-(x-y)=0$, c'est-à-dire la parallèle menée de S à Oz. Le point M est donc le point de contact.

Tout ceci est immédiat géométriquement si on remarque que $MR = MS$ et que PQ est bissectrice intérieure de l'angle RMS.

3. La projection du point R sur PQ est ω. Le vecteur-vitesse du point M est à chaque instant $\overline{M\omega}$; ses projections sur les axes sont $x-x_M$ et $y-y_M$, ou, en fonction de l,

$$\frac{a+l}{2}-\frac{(a+l)^2}{2a}=-\frac{l(a-l)}{2a} \qquad \text{et} \qquad \frac{a-l}{2}-\frac{(a-l)^2}{2a}=\frac{l(a-l)}{2a}.$$

Elles sont respectivement égales à

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dl}\cdot\frac{dl}{dt}=\frac{a-l}{a}\cdot\frac{dl}{dt},$$

et à $$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dl}\cdot\frac{dl}{dt}=-\frac{(a-l)}{a}\cdot\frac{dl}{dt}.$$

Par suite, on a

$$\frac{dl}{dt}-\frac{l}{2}=0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dl}{l}-\frac{1}{2}dt=0, \qquad \text{L}\frac{l}{C}-\frac{1}{2}t=0 ;$$

puis enfin $$l=Ce^{\frac{t}{2}}.$$

Au temps $t=0$, $l=a-l=0$, donc $l=a=C$, et, finalement,

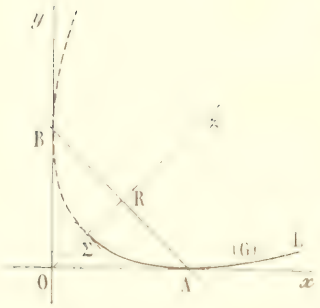
$$l=ae^{-\frac{t}{2}}.$$

Les mouvements de P et de Q ont respectivement pour équations

$$x=a(1+e^{-\frac{t}{2}}), \qquad y=a(1-e^{-\frac{t}{2}}).$$

En outre, les équations du mouvement de M sont

$$x=\frac{a}{2}(1+e^{-\frac{t}{2}})^2, \qquad y=\frac{a}{2}(1-e^{-\frac{t}{2}})^2.$$



Le tableau suivant rend compte du mouvement du point M sur la parabole (G) :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
x	$-\infty$	↗	$2a$	↘	$\frac{a}{2}$
y	$-\infty$	↗	0	↘	$\frac{a}{2}$

Ainsi, pour $t=-\infty$, M est à l'infini sur la branche AL de la trajectoire ; t croissant de $-\infty$ à 0, M décrit l'arc infini LA ; t croissant de 0 à $+\infty$, M part de A et décrit l'arc fini AΣ, Σ étant le sommet de la parabole.

L'étude de l'hodographe, qui suit, met en relief les particularités du mouvement du point M.

4. Les coordonnées du point M′ sont évidemment

$$X=-\frac{l(a+l)}{2a}, \qquad Y=\frac{l(a-l)}{2a}.$$

Pour éliminer l, on écrit : $2aX=-(al+l^2)$, $2aY=al-l^2$, d'où $2a(Y-X)=2al$, puis $l=Y-X$: l'élimination est immédiate et donne

$$(X-Y)^2+a(X+Y)=0.$$

Telle est l'équation de l'hodographe (H), lieu du point M'.

C'est une parabole d'axe Oz, de sommet O et de tangente au sommet Oz' qui coupe les axes en $(-a, 0)$ et $(0, -a)$. Sa construction ne présente aucune difficulté.

Les équations du mouvement de M' sont :

$$X = -\frac{a}{2} e^{-\frac{t}{2}}\left(1 + e^{-\frac{t}{2}}\right), \qquad Y = \frac{a}{2} e^{-\frac{t}{2}}\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right),$$

d'où
$$\frac{dX}{dt} = \frac{a}{4} e^{-\frac{t}{2}}\left(1 + 2e^{-\frac{t}{2}}\right), \qquad \frac{dY}{dt} = -\frac{a}{4} e^{-\frac{t}{2}}\left(1 - 2e^{-\frac{t}{2}}\right).$$

On peut donc former le tableau :

t	$-\infty$		0		$2L2$		∞
X	$-\infty$	↗	$-a$	↗	$-\frac{3a}{8}$	↘	0
Y	$-\infty$	↘	0	↘	$\frac{a}{8}$	↘	0

Ainsi, t croissant de $-\infty$ à 0, M' décrit l'arc infini EK ; t croissant de 0 à L4, M' décrit l'arc KN ; enfin, t croissant de L4 à $+\infty$, M' décrit l'arc NO.

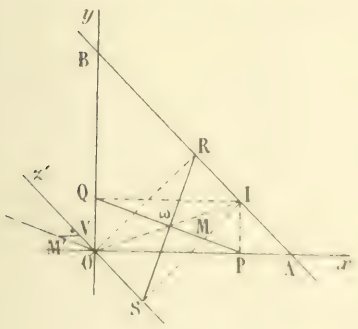
La vitesse du point M est à chaque instant équipollente au rayon vecteur OM' : ses variations sont dès lors bien tangibles ; d'ailleurs,

$$OM' = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{e^{-t}(1 + e^{-t})}.$$

Le vecteur M'V, qui est à chaque instant équipollent au vecteur-accélération du point M, a pour composantes suivant les axes $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$; les coordonnées ξ, η, du point V sont par suite, à chaque instant :

$$\xi = X + \frac{dX}{dt} = -\frac{a}{4} e^{-\frac{t}{2}} = -\frac{l}{4}, \qquad \eta = Y - \frac{dY}{dt} = \frac{a}{4} e^{-\frac{t}{2}} = \frac{l}{4}.$$

Le lieu du point V est la bissectrice Oz', $\xi + \eta = 0$. De plus, le point V est à chaque instant l'homothétique du point S par rapport à O dans le rapport $-\frac{1}{4}$.



On en déduit la construction du vecteur accélération de M :

On mène $\overline{OM}$ équipollent à $\overline{M_\infty}$; on prend le point V sur Oz, tel que $\frac{\overline{OV}}{\overline{OS}} = -\frac{1}{4}$. Le segment MV est équipollent au vecteur cherché.

Sa longueur à l'instant t est

$$MV = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{a}{2\sqrt{2}} \sqrt{e^{-t}(1 + 2e^{-t})}.$$

J. SOUBAIGNÉ (Montauban-Marsoin).

Bonnes solutions de MM. André Courtois ; G. Deferrois ; G. Lacu ; R. Masse ; J. Neuhaus ; Pierre-Louis ; A. Sommerat ; C. Jacquet.

1955. — *On considère un trapèze* ABCD *rectangle en* A *et en* D, *soit* E *le point de rencontre des côtés* AD *et* BC. *On désigne par* x *l'angle* CED, *par* a *la longueur* BC *et par* d *la longueur* DE.

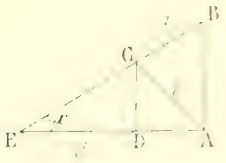
1° *Évaluer la longueur de la diagonale* AC *en fonction de* a, d, x *et étudier la variation de cette longueur* AC *quand* x *varie, les longueurs* a *et* d *restant constantes.*

2° *Déterminer l'angle* x, *connaissant les trois longueurs*

$$BC = a, \qquad DE = d, \qquad AC = b.$$

Discuter, indiquer dans quels cas ce problème est possible et combien il a de solutions.

1. On a visiblement $\overline{AC}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{DC}^2 = a^2\cos^2 x + d^2 \operatorname{tg}^2 x$.



Étudions les variations de la fonction $y = a^2\cos^2 x + d^2 \operatorname{tg}^2 x$; il suffira de faire varier x de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Calculons la dérivée

$$y' = -2a^2\cos x \cdot \sin x + 2d^2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x\,(d^2 - a^2\cos^2 x)}{\cos^3 x}.$$

1° $a = d$, y' est constamment positive ou nulle, y croît de a^2 à $+\infty$.

2° $a > d$, y' s'annule pour $\cos x = \sqrt{\frac{d}{a}}$ en passant du négatif au positif ; soit α l'angle aigu défini par l'équation $\cos\alpha = \sqrt{\frac{d}{a}}$; x variant de 0 à α, y décroît de a^2 à un minimum, $2ad - d^2$, puis x allant de α à $\frac{\pi}{2}$, y croît de $2ad - d^2$ à $+\infty$.

2. Voyons maintenant à quelle condition on pourra déterminer l'angle x pour que AC ait une longueur donnée, b.

1° Si $a = d$, le problème n'est possible que si $b > a$, et il n'admet qu'une solution.

2° Si $a > d$, le problème n'est possible que si $b > \sqrt{2ad - d^2}$; il admet deux solutions si b est compris entre $\sqrt{2ad - d^2}$ et a,

$$\sqrt{2ad - d^2} < b < a$$

et une seule si $b > a$.

Nous allons retrouver ces résultats en étudiant l'équation du problème

$$b^2 = a^2\cos^2 x + d^2 \operatorname{tg}^2 x.$$

Prenons $\operatorname{tg} x$ comme inconnue ; nous aurons l'équation bicarrée

$$d^2 \operatorname{tg}^4 x - (b^2 - d^2)\operatorname{tg}^2 x - a^2 - b^2 = 0.$$

Pour $a < b$, cette équation fournit une valeur et une seule pour $\operatorname{tg}^2 x$,

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{b^2 - d^2 + \sqrt{(b^2 + d^2)^2 - 4a^2d^2}}{2d^2},$$

et pour $a = b$, le problème n'est possible que si l'on a à la fois

$$b^2 > 2ad - d^2,$$
$$b^2 > d^2 ;$$

il admet alors deux solutions, correspondant aux deux valeurs

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{b^2 - d^2 \pm \sqrt{(b^2 + d^2)^2 - 4a^2d^2}}{2d^2}.$$

Pour accorder cette discussion avec la précédente, il faut d'abord classer par ordre de grandeur les limites trouvées pour b^2, savoir a^2, d^2, et $2ad - d^2$ qui est positif ou négatif suivant que $d \lesseqgtr 2a$.

D'abord, on a toujours $a^2 > 2ad - d^2$, ce qui équivaut à $(a - d)^2 > 0$; on aura $d^2 \lesseqgtr 2ad - d^2$ suivant que $d \lesseqgtr a$. Cela étant,

1° $a > d$. On a la disposition $2ad - d^2 < a^2 < d^2$.

Si $b < a$, comme $b^2 < d^2$ le problème n'est pas possible ; si $b > a$, il admet une solution et une seule ; c'est bien ce que nous avons trouvé dans la première discussion.

2° $a > d$. On a une disposition différente.

$$d^2 < 2ad - d^2 < a^2.$$

Si $b < a$, le problème n'est possible que si l'on prend b^2 supérieur à la fois à d^2 et à $2ad - d^2$, ce qui est possible, donc $\sqrt{2ad - d^2} < b < a$,
et il admet deux solutions. Au contraire si $b > a$, le problème est possible et n'admet qu'une solution. Ce sont encore les résultats trouvés précédemment.

Bonnes solutions de MM. G. Lach, à Rodez ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; J. Sourbaigné, à Mont-de-Marsan.

1956. — *Calculer, soit en grades, soit en degrés, l'angle x, l'angle y et l'angle z, compris tous les trois entre zéro et deux angles droits, qui vérifient les équations :*

$$\cos x = \sqrt[3]{\frac{31625}{325138}}, \qquad \operatorname{tg} y = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \qquad \operatorname{tg} z = \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 2y}.$$

Calcul de l'angle x

$\log 31625 = 4{,}50003$

$\operatorname{colog} 325138 = \bar{6}{,}48793$

$3 \log \cos x = \bar{2}{,}98796$

$\log \cos x = \bar{1}{,}66265{,}3$

$62°38'$ 46 $\Delta = 24$

19,3

$-40''$ 16

$-8''$ 3,3

$x = 62°37'12''$

Calcul de l'angle y

$\operatorname{tg} y = \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1 = 2{,}15470$

2,154 0,33325 $\Delta = 20$

7 14

$\log \operatorname{tg} y = 0{,}33339$

$65°6'$ 1 $\Delta = 33$

8

$10''$ 5,5

$4'',5$ 2,5

$y = 65°6'14'',5$

Calcul de l'angle z

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 2y} = -\frac{\sin(180° - 2x)}{\operatorname{tg}(180° - 2y)} = -\operatorname{tg}\varphi$$

$\log \sin(180° - 2x) = \bar{1}{,}91208{,}4$

$\operatorname{colog} \operatorname{tg}(180° - 2y) = \bar{1}{,}92701{,}6$

$\log \operatorname{tg} \varphi = \bar{1}{,}83910$

$34°37'$ 03 $\Delta = 27$

7

$10''$ 4,5

$3''$ 2,3

$\varphi = 34°37'15''$

$z = 180° - \varphi = 145°22'45''$

Calculs auxiliaires

3162 49996 $\Delta = 14$

3 7

$\log 31625 = 4{,}50003$

3251 51202 $\Delta = 13$

3 3,9

8 1,04

$\log 325138 = 5{,}51207$

$2x = 125°14'24''$

$180° - 2x = 54°45'36''$

$\log \sin 54°45' = \bar{1}{,}91203$ $\Delta = 8$

30'' 4,5

6'' 0,9

$\log \sin(180° - 2x) = \bar{1}{,}91208{,}4$

$\sqrt{3} = 1{,}73205$

$2\sqrt{3} = 3{,}46410$

$\frac{2\sqrt{3}}{3} = 1{,}15470$

$2y = 130°12'29''$

$180° - 2y = 49°47'31''$

$\log \operatorname{tg} 49°47 = 0{,}07283$ $\Delta = 26$

30'' 13,0

4 0,43

$\log \operatorname{tg}(180° - 2y) = 0{,}07283{,}43$

Résultats (en degrés)

$x = 62°37'12''$

$y = 65°6'14''$

$z = 145°22'45''$

En grades, on trouverait

$x = 69{,}578$

$y = 72{,}348$

$z = 161{,}581$

Bonnes solutions de MM. J. Sourbaigné ; C. Jacquet.

1958. — *Dans une première approximation, on a calculé la densité d'une vapeur (déterminée par la méthode de Dumas) sans tenir compte d'une bulle d'air observée lors du jaugeage du ballon et l'on a trouvé le nombre* $d' = 8{,}730$.

Calculer la densité exacte connaissant :

Le volume V_0 *à zéro du ballon,* $V_0 = 324^{cm^3}$;

Son coefficient de dilatation, $K = 0{,}000029$;

La température T *et la pression* H *sous lesquelles il a été fermé,* $T = 300^\circ$, $H = 753$;

Le coefficient de dilatation des gaz, $\alpha = 0{,}00367$;

Le volume u *de la bulle d'air mesuré à la température* t_1 *et sous la pression* H_1, $u = 2^{cm^3}$, $t_1 = 16^\circ$, $H_1 = 752$.

Au moment où l'on ferme le ballon, on y emprisonne :

1° De l'air qui a une certaine pression h et dont le poids est

$$V_0(1 + KT)a\frac{h}{760}\frac{1}{1 + \alpha T},$$

a désignant le poids spécifique de l'air dans les conditions normales ;

2° De la vapeur dont la pression est $H - h$ et le poids

$$V_0(1 + KT)ad\frac{H - h}{760}\frac{1}{1 + \alpha T},$$

d désignant la densité exacte de cette vapeur.

D'autre part, la densité d' que l'on déduit des pesées est précisément la densité du mélange dont le poids peut, par conséquent, s'exprimer par

$$V_0(1 + KT)ad'\frac{H}{760}\frac{1}{1 + \alpha T}.$$

Écrivons que ce poids est la somme des deux premiers, il vient

$$h + (H - h)d = Hd', \qquad \text{d'où} \qquad d = \frac{Hd' - h}{H - h}.$$

Mais la bulle d'air occupe un volume u à la température t_1 et sous la pression H_1, et, dans le ballon, un volume $V_0(1 + KT)$ à la température T et sous la pression h. En lui appliquant la loi de Mariotte, on a

$$\frac{V_0(1 + KT)h}{1 + \alpha T} = \frac{uH_1}{1 + \alpha t_1} \qquad \text{d'où} \qquad h = \frac{uH_1(1 + \alpha T)}{V_0(1 + KT)(1 + \alpha t_1)}.$$

Portons cette valeur de h dans l'expression de d ; il vient

$$d = \frac{V_0(1 + KT)H(1 + \alpha t_1)d' - uH_1(1 + \alpha T)}{V_0(1 + KT)H(1 + \alpha t_1) - uH_1(1 + \alpha T)}.$$

L'application numérique donne

$$d = 8{,}825.$$

J. SOUBAIGNÉ, à Mont-de-Marsan.

1959. — A. *Quatre opérations distinctes sont faites avec le chlorure d'ammonium pur et sec (sel ammoniac, chlorhydrate d'ammoniaque) en vue de préparer un litre de chacun des gaz suivants :* 1° *l'ammoniac,* 2° *l'acide chlorhydrique,* 3° *le chlore,* 4° *l'hydrogène.*

On demande d'indiquer les réactions, de les formuler et de calculer le poids de sel ammoniac employé pour chacune des préparations.

B. *Dire comment on pourrait, dans une opération unique, mettre simultanément en liberté le chlore et l'azote contenus dans le chlorure d'ammonium. Formuler la réaction proposée et calculer le volume de chacun des deux gaz obtenus en décomposant* 1 *gramme de sel.*

C. *Indiquer quelles expériences il faudrait faire pour reconstituer le sel ammoniac en partant respectivement de chacun des quatre gaz préparés en* A. *Écrire seulement les réactions proposées sans faire de calculs.*

On supposera que les réactions sont complètes et qu'il n'y a pas de pertes.

On ne fera pas les corrections de température et de pression.

A. — 1° Pour préparer le gaz ammoniac, on chauffera le chlorure d'ammonium avec un alcali, par exemple la potasse : $AzH^4Cl + KOH = KCl + H^2O + AzH^3$.

Avec une molécule, c'est-à-dire $53^g,5$ de chlorure d'ammonium, on obtient une molécule, c'est-à-dire $22^l,4$ de gaz ammoniac. Pour préparer un litre, il faudra employer

$$\frac{53,5}{22,4} = 2^g,39.$$

2° Pour préparer l'acide chlorhydrique, on chauffera avec de l'acide sulfurique :

$$2AzH^4Cl + SO^4H^2 = SO^4(AzH^4)^2 + 2HCl.$$

Le poids nécessaire pour préparer un litre sera encore $2^g,39$.

3° Pour préparer le chlore, on emploiera la réaction de Berthollet :

$$2AzH^4Cl + MnO^2 + 2SO^4H^2 = SO^4(AzH^4)^2 + SO^4Mn + 2H^2O + Cl^2.$$

Il faut ici deux molécules de chlorure d'ammonium pour obtenir une molécule de gaz ; le poids demandé est double du précédent, soit $4^g,78$.

4° On aura de l'hydrogène en chauffant le chlorure d'ammonium avec du potassium et recueillant le gaz qui se dégage sur l'eau acidulée, pour absorber l'ammoniaque :

$$2AzH^4Cl + 2K = 2KCl + 2AzH^3 + H^2.$$

On pourrait aussi opérer à froid avec l'amalgame de sodium et la dissolution. Le poids à employer sera encore $4^g,78$.

Au rouge vif, la vapeur de chlorure d'ammonium, dissociée, abandonnerait au bore à la fois son chlore et son azote et tout l'hydrogène se trouverait libéré.

B. — Au rouge, le chlorure d'ammonium est dissocié en gaz ammoniac et gaz chlorhydrique, et chacun de ces deux gaz peut être brûlé par l'oxygène. On portera donc au rouge le mélange de vapeur de chlorure d'ammonium avec un excès d'oxygène :

$$AzH^4Cl + O^2 = Az + Cl + 2H^2O.$$

Une molécule de chlorure d'ammonium fournit $11^l,2$ de chaque gaz. Avec un gramme, on en aura $\frac{11,2}{53,5} = 0^l,209$.

On pourrait songer, pour brûler l'hydrogène, à l'acide azotique ou à l'acide azoteux, mais la réaction serait complexe et donnerait des composés oxygénés ou chloro-oxygénés de l'azote.

C. — 1° Diriger le gaz ammoniac dans une dissolution d'acide chlorhydrique ; puis évaporer :

$$AzH^3 + HCl = AzH^4Cl.$$

2° Absorber l'acide chlorhydrique dans une dissolution de gaz ammoniac : même réaction.

3° Diriger le chlore dans une dissolution de gaz ammoniac :

$$3Cl + 4AzH^3 = 3AzH^4Cl + Az.$$

4° Combiner l'hydrogène et l'azote par les étincelles électriques en absorbant l'ammoniac, au fur et à mesure, par une dissolution d'acide chlorhydrique :

$$Az + 3H + HCl = AzH^4Cl.$$

Ou bien combiner l'hydrogène et le chlore à la lumière, puis absorber l'acide chlorhydrique par une dissolution de gaz ammoniac.

Une partie de ce qui précède nous a été obligeamment communiqué par M. [illegible]

QUESTIONS PROPOSÉES

2017. — On considère la fonction $y = \frac{x^2 - ax + a^2}{x - a}$,

où a désigne une constante arbitraire.

1° Trouver la fonction Y telle que $Y - y = a$ et calculer Y′ en fonction de x et de Y.

2° La courbe Y est une hyperbole. Étudier sa déformation et trouver le lieu de son centre quand a varie.

3° Soit $Z = \frac{aY}{x}$. Les asymptotes des courbes Y et Z forment un triangle qui reste semblable à lui-même quand a varie. Appelons $f(a)$ l'aire de ce triangle. Quel est le lieu du point $x = a$, $y = f(a)$?

4° Une des asymptotes rencontre la courbe Z. Donner les abscisses de ces points en fonction de a et leurs lieux.

H. Cousin, à Limoges.

2018. — Soient P et Q deux points fixes sur une conique C. Par P et Q, on mène deux cordes parallèles variables PP′ et QQ′, rencontrant la conique aux points P′ et Q′. Trouver : 1° le lieu du point de rencontre de PQ′ et P′Q ; 2° l'enveloppe de la droite P′Q′.

E.-N. Barisien.

2019. — Sur les trois côtés d'un triangle ABC comme bases on construit trois triangles isocèles semblables P_ABC, P_BAC, P_CAB, dirigés à la fois vers l'intérieur ou vers l'extérieur du triangle ABC.

1° Montrer que les droites AP_A, BP_B, CP_C se coupent en un même point P.

2° Quand l'angle à la base varie, le point P décrit une conique Γ qui passe au barycentre G du triangle ABC.

3° Les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur les côtés correspondants du triangle $P_AP_BP_C$ se coupent en un point Q de la conique Γ.

4° La corde PQ de la conique Γ passe par un point fixe.

5° Les côtés du triangle $P_AP_BP_C$ enveloppent trois paraboles qui ont pour directrices les médianes du triangle ABC.

A. Barbelenet, à Limoges.

Question 1967 (1). — Voici deux résultats intéressants sur la courbe enveloppe de la droite de l'énoncé.

1° Cette courbe, dont les équations paramétriques sont

$$x = \frac{ac}{a^2 + b^2}\cos\varphi(3 - 2\cos^2\varphi), \qquad y = -\frac{b}{a^2 + b^2}\sin\varphi(3 - 2\sin^2\varphi),$$

est *unicursale* et du 6e degré, ce qui se voit en posant $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = t$.

L'équation cartésienne de la courbe est

$$\left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\frac{a^2 + b^2}{c^2} - 8\right]\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{(a^2 + b^2)^2}\right] - \frac{4(2x^2 + a^2)(a^2 + b^2)}{a^2b^2c^2} = 0.$$

2° L'aire de cette courbe est $U = \frac{3\pi(ab)^2}{2(a^2 + b^2)}$,

c'est-à-dire *une fois et demie l'aire de l'ellipse de Frégier* relative à l'ellipse donnée.

La courbe est tangente à l'ellipse de Frégier en ses quatre sommets, qui sont aussi des sommets de la courbe.

E.-N. BARISIEN.

1. Résolue dans la *Revue de Math. Spéc.* p. 451.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

22e Année. Mai 1912. N° 8.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LA MÉTHODE D'APPROXIMATION DE NEWTON

par M. **R. Vintéjoux**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Carnot.

Soient x_0 une valeur approchée d'une racine $x_0 + h$ de l'équation $f(x) = 0$; α_0 un nombre positif donné, tel que $|h| < \alpha_0$. On suppose que, pour toute valeur de x comprise entre x_0 et $x_0 + h$, on a $f(x)f''(x) > 0$ et $|f''(x)| < M$. Dans ces conditions, on sait que l'expression $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ est une valeur approchée de la racine, plus approchée que x_0 et dans le même sens, c'est-à-dire comprise entre x_0 et $x_0 + h$, et que l'erreur k commise en remplaçant $x_0 + h$ par x_1 est en valeur absolue plus petite que le nombre positif $\beta = A\alpha_0^2$, où l'on a posé $A = \frac{M}{2|f'(x_0)|}$. Cette limite supérieure de l'erreur k est, dans la plupart des cas, beaucoup trop grande, et par suite peu avantageuse. On augmenterait dans une large mesure l'efficacité de la méthode en la remplaçant par un nombre plus petit.

D'après ce qui précède, on a l'une des deux suites d'inégalités

$$x_0 < x_1 < x_0 + h < x_1 + \beta,$$
$$x_0 > x_1 > x_0 + h > x_1 - \beta.$$

Dans le premier cas, $|h| < x_1 + \beta - x_0$; dans le second, $|h| < x_0 - x_1 + \beta$. Dans les deux cas,

$$|h| < \beta + |x_1 - x_0|,$$

ou, en posant $B = \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|$,

$$|h| < B + \beta.$$

Dans le calcul bien connu qui nous a fourni l'inégalité

$$|k| < A\alpha_0^2,$$

α_0 représente une quantité quelconque plus grande que $|h|$. On peut donc y remplacer α_0 par $B + \beta$, d'où

$$|k| < A(B + \beta)^2.$$

Ce résultat est sans intérêt si $B + \beta > \alpha_0$. Si $B + \beta < \alpha_0$, on voit qu'on peut, comme limite supérieure de l'erreur k, prendre au lieu de β le nombre $\beta_1 = A(B + \beta)^2$. Ce résultat est bien connu. Mais il n'épuise pas l'intérêt de la remarque qui y a conduit. On peut en effet répéter la même opération, et former ainsi une suite de nombres positifs, déduits les uns des autres par la formule

$$(1) \qquad \beta_n = A(B + \beta_{n-1})^2,$$

et tous supérieurs à l'erreur $|k|$ commise en prenant x_1 comme valeur approchée de la racine.

Or la formule (1) montre que $\beta_n - \beta_{n-1}$ a le même signe que $\beta_{n-1} - \beta_{n-2}$. Donc si $\beta_1 < \beta_0$, la suite $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ est décroissante. β_n étant positif, tend alors vers une limite quand n croît indéfiniment. La formule (1) montre que cette limite est racine de l'équation

$$(2) \qquad A(r + B)^2 - r = 0.$$

C'est d'ailleurs évidemment la plus petite des deux racines de cette équation, car l'inégalité $\beta_{n-1} < \beta_0$ jointe à l'égalité (1) entraîne

$$\beta_n > A\beta_0 + B)^2,$$

ce qui montre que β_n est, quel que soit n, compris entre les racines de l'équation (2).

On a donc

$$\lim_{\varepsilon} \beta_1 = \frac{1 - 2AB - \sqrt{1 - 4AB}}{2A} = \alpha_1.$$

Puisque $|k| < \beta_1$, on a évidemment

$$|k| < \alpha_1.$$

Pour apprécier l'avantage qui résulte de la substitution de α_1 à β_1 comme limite supérieure de $|k|$, il suffira de traiter l'exemple auquel Newton a appliqué lui-même sa méthode. L'équation

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

a une racine comprise entre 2 et 2,1. Faisant $x_0 = 2{,}1$, $\alpha_0 = 1$, on trouve

$$A = \frac{6.3}{11.23}, \qquad B = \frac{0.063}{11.23}, \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \frac{6.3}{11.23},$$

tandis qu'on s'assure aisément que $\alpha_1 < \frac{4}{10000}$. Le nombre $x_1 = 2{,}0946$ fourni par une application de la méthode peut donc être donné comme valeur approchée à $\frac{1}{2000}$ près et non pas à $\frac{7}{1000}$ près seulement. En fait, il est exact à $\frac{1}{20000}$ près.

SUR LE RAYON DE COURBURE D'UNE KREUZCURVE

par M. **Louis Sire**.

Soient M un point d'une kreuzcurve, de centre O ; Δ sa polaire par rapport à un cercle ayant son centre en O et de rayon 1. Lorsque le point M décrit la kreuzcurve, la droite Δ enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements de centre O.

Soit N le point limite de la droite Δ ; le produit des rayons de courbure aux points correspondants M et N des deux courbes a pour valeur $\frac{1}{\sin^3 \varphi}$, φ étant l'angle du rayon vecteur OM avec la tangente en M à la kreuzcurve.

D'autre part, si δ désigne la distance du point O à la droite Δ, le rayon de courbure en N de l'hypocycloïde a pour valeur 3δ ; par suite le rayon de courbure ρ de la kreuzcurve au point M est égal à $\frac{1}{3\delta \sin^3 \varphi}$.

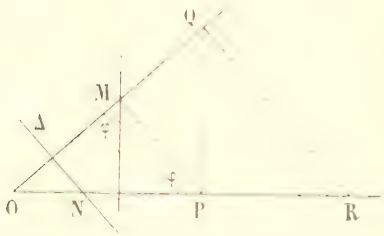
Nous avons aussi

$$OM \times \delta = 1.$$

d'où

$$\rho = \frac{OM}{3 \sin^3 \varphi}$$

c'est-à-dire :



Le rayon de courbure en un point d'une kreuzcurve est proportionnel au rayon vecteur joignant ce point au centre de la courbe et inversement proportionnel au cube du sinus de l'angle de la tangente à la kreuzcurve avec le rayon vecteur considéré.

Par suite, si nous menons MP perpendiculaire à OM, puis PQ perpendiculaire à ON, enfin QR perpendiculaire à OM, nous obtiendrons en OR le triple du rayon de courbure de la kreuzcurve au point M.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Concours de 1911.

Groupe I.

1960. — *On considère trois axes rectangulaires* $Oxyz$ *et la surface de révolution, appelée tore, dont l'équation est*

$$(x^2 + y^2 + z^2 + l^2 \cos^2 \theta)^2 = 4l^2(x^2 + y^2),$$

l *étant un nombre positif et* θ *un angle aigu.*

1° *On coupe le tore par le plan* $z = x \operatorname{tg} \theta$. *Former l'équation de la section dans son plan et vérifier que cette section se compose de deux circonférences* c *et* γ, *ayant leurs centres sur* Oy. *Les projections de ces circonférences sur le plan* xOy *admettent le point* O *pour foyer.*

On déduit facilement de là qu'il existe sur le tore, à part les parallèles et les méridiens, deux systèmes de circonférences : les circonférences C *et les circonférences* Γ. *Montrer que deux circonférences d'un même système* (C *ou* Γ) *ne se coupent jamais, que deux circonférences de systèmes différents* (C *et* Γ) *ont toujours deux points communs.*

2° *Trouver les courbes* K *qui coupent tous les parallèles du tore sous un angle donné* V. *Construire la projection de ces courbes sur le plan* xOy, *d'abord pour* $V = 0$, *puis pour* $\operatorname{tg} V = 2 \operatorname{tg} \theta$. *Comment peut-on déduire la seconde courbe de la première et, d'une manière plus générale, comment peut-on construire point par point les courbes* K ?

3° *Former l'équation générale des sphères* s *passant par l'une des circonférences* C, *trouver le lieu des centres de ces sphères et montrer que chacune d'elles contient aussi une circonférence* Γ.

Montrer que toutes les sphères s *passant par un point* a *passent aussi par un point associé* a'.

4° *On donne deux points* a *et* b *non situés sur le tore ; b est différent de* a *et de son associé* a'. *Soit* C_0 *l'une des circonférences* C. *Par* C_0 *et* a *passe une sphère* A_0 *qui coupe le tore suivant une autre circonférence* Γ_0. *Par* Γ_0 *et* b *passe une sphère* B_0 *qui coupe le tore suivant une circonférence* C_1. *Par* C_1 *et* a *passe une sphère* A_1 *qui coupe le tore suivant une circonférence* Γ_1. *Par* Γ_1 *et* b *passe une sphère* B_1 *qui coupe le tore suivant une circonférence* C_2, *et ainsi de suite.*

On étudiera dans deux cas particuliers à quelle condition la suite des circonférences $C_0, C_1, C_2, \ldots$ *est périodique.*

Supposant d'abord a *et* b *sur* Oz, *on montrera que les centres des sphères* A_i *et* B_i *sont alors dans deux plans dont on se donnera les équations sous la forme*

$$z = l \cos \theta \operatorname{tg} \alpha, \qquad z = l \cos \theta \operatorname{tg} \beta.$$

Quelle relation doit-il y avoir entre α *et* β *pour que* $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ *étant différentes,* C_n *soit identique à* C_0 ? — *Calculer algébriquement le rapport* $u = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$ *dans le cas où* $n = 10$.

En second lieu, on prendra les valeurs suivantes pour les coordonnées de a *et de* b :

$$a \begin{cases} x = l \cos \theta \cos A, & y = l \cos \theta \sin A, \quad z = 0, \\ b \begin{cases} x = l \cos \theta \cos B, & y = l \cos \theta \sin B, \quad z = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que si C_0 *est identique à* C_n *pour un choix particulier de* C_n, *il en est de même quelle que soit* C_n, *et trouver la relation de position entre* a *et* b *pour laquelle cette circonstance se produit.*

1. La circonférence Ω qui engendre le tore a pour équations

$$y = 0, \qquad (x - l)^2 + z^2 = l^2 \sin^2 \theta,$$

et le plan $z = x \operatorname{tg} \theta$ coupe le plan zOx suivant une tangente OD menée de O à la circonférence Ω

Pour avoir l'équation de la section dans son plan, il faudra, dans l'équation du tore, remplacer x, y, z par les formules de transformation de coordonnées

$$x = X\cos\theta - Z\sin\theta, \qquad y = Y, \qquad z = X\sin\theta + Z\cos\theta,$$

puis faire $Z = 0$ dans l'équation trouvée. Donc l'équation de la section dans son plan est

$$X^2\cos^2\theta + Y^2 + X^2\sin^2\theta - l^2\cos^2\theta = 4l^2X^2\cos^2\theta + Y^2,$$

qui peut s'écrire $$X^2 - Y^2 - l^2\cos^2\theta = 4l^2Y^2\sin^2\theta,$$

ou $$X^2 - Y^2 \pm l\sin\theta)^2 - l^2 = 0.$$

Donc cette section se compose de deux circonférences c et γ de même rayon, l, et dont les centres c et γ, situés sur Oy, sont tels que $\overline{Oc} = l\sin\theta$, $\overline{O\gamma} = -l\sin\theta$.

Pour avoir l'équation de la projection sur le plan xOy de cette section, il suffit de remplacer dans l'équation précédente X par $\frac{x}{\cos\theta}$ et Y par y. On trouve l'équation

$$\frac{x^2}{\cos^2\theta} + y^2 \pm 2l\sin\theta y - l^2 = 0,$$

ou encore $$x^2 + y^2 - 2y\sin\theta - l^2\cos^2\theta = 0.$$

Cette projection se compose donc de deux ellipses de foyer O, d'excentricité $e = \sin\theta$ et de directrices $y = \pm l\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$. Ces directrices sont donc respectivement les polaires des centres c et γ des circonférences c et γ par rapport au cercle $z = 0$, $x^2 + y^2 - l^2\cos^2\theta = 0$, qui est la projection, sur le plan xOy, du parallèle du point D.

Si l'on fait tourner d'un angle quelconque le plan $z = x\,\mathrm{tg}\,\theta$ autour de l'axe Oz du tore, ce plan coupera le tore suivant deux circonférences C et Γ. Il y a donc sur le tore deux systèmes de circonférences C et Γ, le premier système C étant obtenu en faisant tourner d'un angle quelconque la circonférence c autour de Oz. Le second système Γ se déduit de même du cercle γ.

Deux circonférences de même système, par exemple C, n'ont aucun point commun ; car elles se déduisent l'une de l'autre par une rotation autour de Oz et le plan mené par Oz perpendiculairement au plan du cercle C n'est pas un plan de symétrie pour ce cercle. Mais une circonférence C et une circonférence Γ ont toujours deux points communs, car ces deux circonférences sont symétriques par rapport au plan passant par Oz et l'intersection de leurs plans. Donc cette intersection les coupe toutes deux aux mêmes points et elle les coupe forcément puisqu'elle passe par le point O qui leur est intérieur à toutes deux.

Remarque. — *Généralisation de la propriété précédente.* — D'une manière plus générale considérons la surface engendrée par une conique Σ tournant autour d'un axe Oz situé dans son plan. La méridienne de la surface se composera de la conique Σ et de la conique Σ′ symétrique par rapport à Oz. Les tangentes communes DD', $D_1D'_1$, non perpendiculaires à Oz, sont symétriques par rapport à Oz et ont pour équations

$$z = x\,\mathrm{tg}\,\theta, \qquad z = -x\,\mathrm{tg}\,\theta,$$

si on prend pour origine leur point de rencontre O. La conique Σ a une équation de la forme

$$(Ax + Bz + 1)^2 - (Cz^2 - x^2\,\mathrm{tg}^2\theta) = 0.$$

Si dans cette équation on remplace x par $\sqrt{x^2 + y^2}$, on aura l'équation de la surface

$$(A\sqrt{x^2 + y^2} + Bz + 1)^2 - (Cz^2 - (x^2 + y^2)\,\mathrm{tg}^2\theta) = 0.$$

L'équation de la projection sur le plan xOy de la section de cette surface par le plan $z = x \operatorname{tg}\theta$ s'obtient en remplaçant dans l'équation de la surface z par $x \operatorname{tg}\theta$. C'est donc

$$(A\sqrt{x^2+y^2} + Bx\operatorname{tg}\theta - 1)^2 - \lambda y^2 \operatorname{tg}^2\theta = 0,$$

ou

$$A\sqrt{x^2+y^2} + Bx\operatorname{tg}\theta - 1 \pm \sqrt{\lambda}\, y \operatorname{tg}\theta = 0,$$

ou encore

$$A^2(x^2+y^2) = (1 - Bx\operatorname{tg}\theta - 1 \pm \sqrt{\lambda}\, y \operatorname{tg}\theta)^2.$$

Donc cette projection se compose de deux coniques ayant pour foyer le point O. Donc la section elle-même se compose de deux coniques.

Mais cette dernière partie est évidente *géométriquement*, car la surface étant du 4e degré, la section sera du 4e degré. Cette section admet pour points doubles les points D et D'. D'autre part les coniques Σ et Σ' ont deux points communs (réels ou imaginaires) symétriques par rapport à Oz, qui engendrent un parallèle double de la surface. Tout plan sécant coupe ce parallèle en deux points qui sont des points doubles de la section. Donc la section de la surface par le plan $z = x \operatorname{tg}\theta$ a quatre points doubles. Donc elle se décompose en deux coniques.

Dans le cas du tore, le parallèle double est engendré par les points cycliques à l'infini du cercle Ω. Donc la section du tore par le plan $z = x \operatorname{tg}\theta$ se compose de deux cercles, puisque les coniques de section passent par deux points cycliques.

On trouvera, page 486 de la *Géométrie* de Rouché et Comberousse, une démonstration tout à fait élémentaire de cette propriété du tore, qui est connue sous le nom de théorème d'Yvon Villarceau.

2. Les coordonnées d'un point M de la surface du tore sont :

$$(1) \qquad x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega, \qquad z = \pm\sqrt{l^2\sin^2\theta - (\rho - l)^2},$$

ρ et ω étant deux paramètres variables, qui sont les coordonnées polaires de la projection du point M sur le plan xOy. Cherchons à déterminer ρ en fonction de ω de façon que la courbe (K), décrite par le point M, fasse avec les parallèles l'angle V. Cette relation entre ρ et ω sera précisément l'équation polaire de la projection de la courbe (K) sur le plan xOy.

Les cosinus directeurs de la tangente en M au parallèle sont $-\sin\omega$, $\cos\omega$, 0 et ceux de la tangente en M à la courbe (K) sont $\dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$, $\dfrac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$, $\dfrac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$, x', y', z' étant les dérivées de x, y, z par rapport à ω.

On doit donc avoir

$$\cos V = -\frac{x'\sin\omega}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} + \frac{y'\cos\omega}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}.$$

ou

$$(x'\sin\omega - y'\cos\omega)^2 = (x'^2+y'^2+z'^2)\cos^2 V.$$

Mais $\quad x' = -\rho\sin\omega + \rho'\cos\omega, \qquad y' = \rho\cos\omega + \rho'\sin\omega, \qquad z' = \dfrac{(\rho - l)\rho'}{\sqrt{l^2\sin^2\theta - (\rho - l)^2}}$

On en tire $\qquad x'\sin\omega - y'\cos\omega = -\rho.$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \rho^2 + \rho'^2 + \frac{(\rho - l)^2\rho'^2}{l^2\sin^2\theta - (\rho - l)^2} = \frac{\rho^2[l^2\sin^2\theta - (\rho - l)^2] + \rho'^2 l^2\sin^2\theta}{l^2\sin^2\theta - (\rho - l)^2}$$

Donc l'équation en ρ et ω est

$$\rho^2 = \frac{\rho^2[l^2\sin^2\theta - (\rho - l)^2] + \rho'^2 l^2\sin^2\theta}{l^2\sin^2\theta - (\rho - l)^2}\cos^2 V,$$

ou

$$\rho^2[l^2\sin^2\theta - (\rho - l)^2](\sin^2 V - \cos^2 V) = \rho'^2 l^2\sin^2\theta\cos^2 V.$$

Pour $V = 0$ et $V = \dfrac{\pi}{2}$, les courbes (K) sont évidemment les parallèles et les méridiens du tore.

Ces deux cas mis à part, il faut intégrer l'équation

$$\frac{\rho'}{\rho\sqrt{l^2\sin^2\theta-(\rho-l)^2}}=\pm\frac{\operatorname{tg}V}{l\sin\theta}.$$

Pour cela on pose

(2) $$\rho=l(1+\sin\theta.\sin u),$$

et l'on a l'équation $$\frac{u}{1+\sin\theta\sin u}=\pm\frac{\operatorname{tg}V}{\sin\theta}.$$

On pose ensuite

(3) $$\operatorname{tg}\frac{u}{2}=t,$$

et l'on a $$\frac{2t}{t^2+2t\sin\theta+1}=\pm\frac{\operatorname{tg}V}{\sin\theta}.$$

ou $$\frac{2t}{(t+\sin\theta)^2+\cos^2\theta}=\pm\frac{\operatorname{tg}V}{\sin\theta}.$$

dont l'intégrale est $$\operatorname{arc\,tg}\frac{t+\sin\theta}{\cos\theta}=\pm\frac{\operatorname{tg}V}{2\operatorname{tg}\theta}(\omega+\omega_0),$$

ω_0 étant une constante. En posant, pour abréger les écritures,

(4) $$\pm\frac{\operatorname{tg}V}{2\operatorname{tg}\theta}(\omega+\omega_0)=\lambda,$$

on a $$\frac{t+\sin\theta}{\cos\theta}=\operatorname{tg}\left[\pm\frac{\operatorname{tg}V}{2\operatorname{tg}\theta}(\omega+\omega_0)\right]=\operatorname{tg}\lambda.$$

Donc $$t=\operatorname{tg}\frac{u}{2}=\cos\theta\operatorname{tg}\lambda-\sin\theta=\frac{\sin(\lambda-\theta)}{\cos\lambda}.$$

Par suite

$$\sin u=\frac{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{u}{2}}=\frac{2\sin(\lambda-\theta)\cos\lambda}{\cos^2\lambda+\sin^2(\lambda-\theta)}=\frac{\frac{\sin(2\lambda-\theta)-\sin\theta}{2}}{\frac{1+\cos 2\lambda}{2}+\frac{1-\cos 2(\lambda-\theta)}{2}}=\frac{\sin(2\lambda-\theta)-\sin\theta}{1-\sin\theta\sin(2\lambda-\theta)},$$

$$\rho=l(1+\sin\theta\sin u)=l\left[1+\sin\theta\cdot\frac{\sin(2\lambda-\theta)-\sin\theta}{1-\sin\theta\sin(2\lambda-\theta)}\right]=\frac{l(1-\sin^2\theta)}{1-\sin\theta\sin(2\lambda-\theta)}.$$

En remplaçant λ par sa valeur (4) on a enfin pour l'équation polaire des projections des courbes (K) sur le plan xOy, l'équation

(5) $$\rho=\frac{l\cos^2\theta}{1-\sin\theta\sin\left[\pm\frac{\operatorname{tg}V}{\operatorname{tg}\theta}(\omega+\omega_0)-\theta\right]}.$$

ρ étant ainsi déterminé en fonction de ω par l'équation (5) les équations des courbes (K) sont données par les formules (1).

Changeons de variable en posant

$$\pm\frac{\operatorname{tg}V}{\operatorname{tg}\theta}(\omega+\omega_0)-\theta=\pm\frac{\operatorname{tg}V}{\operatorname{tg}\theta}\varphi-\frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire $$\omega=\varphi-\omega_0\pm\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}V}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

ce qui revient à faire tourner l'axe polaire de l'angle $-\omega_0\pm\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}V}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$.

L'équation polaire des projections des courbes (K) sur le plan xOy est donc

(6) $$\rho=\frac{l\cos^2\theta}{1-\sin\theta\cos\left[\frac{\operatorname{tg}V}{\operatorname{tg}\theta}\cdot\varphi\right]}.$$

1er Cas. — $V = \theta$. — L'équation (6) est

$$\rho = \frac{l\cos^2\theta}{1 - \sin\theta\cos\varphi}. \tag{7}$$

Elle représente une ellipse ayant pour foyer l'origine, pour excentricité $l = \sin\theta$ et pour grand axe

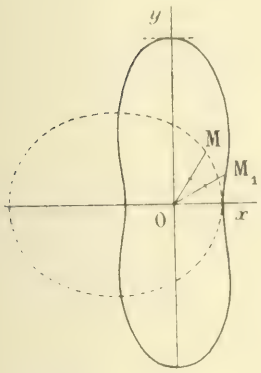
$$2a = \frac{l\cos^2\theta}{1-\sin\theta} + \frac{l\cos^2\theta}{1+\sin\theta} = \frac{2l\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta} = 2l.$$

Cette ellipse est donc précisément la projection sur le plan xOy de l'un des cercles C ou Γ. Donc Pour $V = \theta$, les courbes (K) sont les cercles (C) et (Γ).

2e Cas. — $\operatorname{tg} V = 2\operatorname{tg}\theta$. — L'équation (6) est

$$\rho = \frac{l\cos^2\theta}{1 - \sin\theta\cos 2\varphi}.$$

C'est une courbe du 4e degré qu'il est facile de construire d'après son équation mais on l'obtient plus rapidement par la remarque suivante. Considérons la courbe définie par l'équation (6) et l'ellipse définie par l'équation (7). A l'angle polaire φ pour l'ellipse et à l'angle polaire φ_1 pour la courbe tel que $\varphi = \varphi_1 \dfrac{\operatorname{tg} V}{\operatorname{tg}\theta}$ correspond la même valeur de ρ. Donc à tout point $M(\rho = OM,\ \varphi = \widehat{xOM})$ de l'ellipse, correspond le point M_1 de la courbe tel que $OM_1 = OM$ et



$$\widehat{xOM_1} = \varphi_1 \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg} V} = \widehat{xOM} \times \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg} V}.$$

En particulier pour $\operatorname{tg} V = 2\operatorname{tg}\theta$, l'angle xOM_1 est la moitié de l'angle xOM. La courbe a la forme ci-contre.

3. Les équations de la circonférence c sont :

$$z = x\operatorname{tg}\theta, \qquad x^2 + (y - l\sin\theta)^2 + z^2 - l^2 = 0.$$

On obtiendra les équations d'une circonférence C en faisant tourner c d'un angle arbitraire ω autour de Oz, c'est-à-dire en remplaçant dans ces équations x par $x\cos\omega - y\sin\omega$ et y par $x\sin\omega + y\cos\omega$. Donc les équations d'un cercle quelconque C sont

$$(C) \qquad z = (x\cos\omega - y\sin\omega)\operatorname{tg}\theta, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2l\sin\theta(x\sin\omega + y\cos\omega) - l^2\cos^2\theta = 0.$$

Les équations d'un cercle Γ s'obtiennent en changeant dans les précédentes l en $-l$: elles sont donc

$$(\Gamma) \qquad z = (x\cos\omega - y\sin\omega)\operatorname{tg}\theta, \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2l\sin\theta(x\sin\omega + y\cos\omega) - l^2\cos^2\theta = 0$$

L'équation générale des sphères s passant par C est

$$(s) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2l\sin\theta(x\sin\omega + y\cos\omega) - l^2\cos^2\theta + 2\lambda(z - (x\cos\omega - y\sin\omega)\operatorname{tg}\theta) = 0.$$

L'équation d'une sphère s' passant par une circonférence Γ' est

$$(s') \qquad x^2 + y^2 + z^2 + 2l\sin\theta(x\sin\omega' + y\cos\omega') - l^2\cos^2\theta + 2\lambda'(z - (x\cos\omega' - y\sin\omega')\operatorname{tg}\theta) = 0.$$

Pour montrer que la sphère s contient une circonférence Γ' il suffit de prouver que l'on peut déterminer λ' et ω' de façon que s et s' soient identiques. Pour cela il faut et il suffit que l'on ait

$$\lambda' = \lambda, \qquad l\sin\omega - \lambda\cos\omega\operatorname{tg}\theta = -l\sin\omega' - \lambda'\cos\omega'\operatorname{tg}\theta,$$

et

$$l\cos\omega + \lambda\sin\omega\operatorname{tg}\theta = -l\cos\omega' + \lambda'\sin\omega'\operatorname{tg}\theta.$$

Les deux dernières s'écrivent

$$l(\sin\omega' + \sin\omega) = \lambda\operatorname{tg}\theta(\cos\omega' - \cos\omega)$$
$$l(\cos\omega' - \cos\omega) = \lambda\operatorname{tg}\theta(\sin\omega' - \sin\omega),$$

et sont toutes deux vérifiées si on prend ω' tel que

$$\operatorname{tg}\frac{\omega' - \omega}{2} = -\frac{l}{\lambda\operatorname{tg}\theta}.$$

Donc toute sphère s contient un cercle Γ.

Les coordonnées du centre de la sphère s sont

$$x = l \sin\theta \sin\omega - \lambda \cos\omega \operatorname{tg}\theta, \qquad y = l \sin\theta \cos\omega - \lambda \sin\omega \operatorname{tg}\theta, \qquad z = -\lambda.$$

En éliminant λ et ω entre ces trois équations on trouve que le lieu des centres de ces sphères est l'hyperboloïde de révolution H d'équation

$$\text{(H)} \qquad x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2\theta - l^2 \sin^2\theta = 0.$$

Le cercle de gorge, situé dans le plan xOy, a pour centre O, pour rayon $l \sin\theta$ et les génératrices font avec le plan xOy l'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$.

Points associés a et a'. — La puissance du point O par rapport à toutes les sphères s est la même que celle des cercles C et Γ. Elle est égale à $-l^2 \sin^2\theta$. Donc toute sphère s passant par un point a, passe aussi par le point a' situé sur la droite Oa et tel que $\overline{Oa}.\overline{Oa'} = -l^2 \sin^2\theta$.

Remarque. — *Solution géométrique.* — Le lieu des centres des sphères s passant par une circonférence C est la perpendiculaire Cs au plan de C menée par son centre, C. Le lieu des centres des circonférences C est le cercle de centre O, de rayon $l \sin\theta$, situé dans le plan xOy. Donc les perpendiculaires telles que Cs aux plans des circonférences C, menées par leurs centres, engendrent un hyperboloïde de révolution H, puisque ces perpendiculaires forment avec le plan xOy un angle constant, $\frac{\pi}{2} - \theta$.

Enfin toute sphère s passant par une circonférence C contient une circonférence Γ. Car son centre S est sur la génératrice Cs de l'hyperboloïde H perpendiculaire au plan de C. La génératrice sΓ, d'espèce différente, de l'hyperboloïde passant par s, est perpendiculaire au plan d'une circonférence Γ. Les circonférences C et Γ, ayant 2 points communs, sont sur une même sphère, qui coïncide avec la sphère S puisque son centre est le même point s.

4. Toutes les sphères A, passant par le point a, passent par le point associé a' et le lieu des centres de ces sphères est la section de l'hyperboloïde H par le plan P_a perpendiculaire au milieu de aa'. De même le lieu des centres des sphères B est la section de cet hyperboloïde par le plan P_b perpendiculaire au milieu de bb'

1er Cas particulier. — Les points a et b sont sur Oz. — Alors les plans P_a et P_b ont des équations de la forme

$$(P_a) \quad z = l \cos\theta \operatorname{tg}\alpha, \qquad (P_b) \quad z = l \cos\theta \operatorname{tg}\beta,$$

en posant

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{Oa}{l\cos\theta} - \frac{l\cos\theta}{Oa}\right), \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{Ob}{l\cos\theta} - \frac{l\cos\theta}{Ob}\right).$$

Comme on l'a vu dans la 2e partie, à toute circonférence C on peut faire correspondre une génératrice de 1re espèce F de l'hyperboloïde H, passant par le centre C de cette circonférence et perpendiculaire à son plan. De même à toute circonférence Γ on peut faire correspondre une génératrice Φ de 2e espèce. Si on pose

$$f = \widehat{xOC}, \qquad g = \widehat{xOΓ},$$

C et Γ étant les centres des circonférences C et Γ, les équations de ces génératrices sont respectivement :

$$(F) \begin{cases} x = l \sin\theta \cos f - z \operatorname{tg}\theta \sin f, \\ y = l \sin\theta \sin f - z \operatorname{tg}\theta \cos f, \end{cases} \qquad (\Phi) \begin{cases} x = l \sin\theta \cos g - z \operatorname{tg}\theta \sin g, \\ y = l \sin\theta \sin g + z \operatorname{tg}\theta \cos g. \end{cases}$$

Soient F_0 la génératrice correspondant à la circonférence donnée C_0, f_0 la valeur correspondante de l'angle f. Le centre A_0 de la sphère A_0 sera l'intersection du plan P_a par la génératrice F_0. Les coordonnées de ce point s'obtiennent en résolvant le système

$$(F_0) \begin{cases} x = l \sin\theta \cos f_0 + z \operatorname{tg}\theta \sin f_0, \\ y = l \sin\theta \sin f_0 - z \operatorname{tg}\theta \cos f_0; \end{cases} \qquad (P_a) \quad z = l \cos\theta \operatorname{tg}\alpha.$$

On trouve pour ces coordonnées

$$(A_0) \qquad x = \frac{l \sin \theta}{\cos \alpha} \cos(f_0 - \alpha), \qquad y = \frac{l \sin \theta}{\cos \alpha} \sin(f_0 - \alpha), \qquad z = l \cos \theta \operatorname{tg} \alpha.$$

Pour déterminer la circonférence Γ_0 il suffit de déterminer la génératrice correspondante Φ_0 et pour cela la valeur φ_0 de l'angle φ correspondant à cette génératrice. Pour cela on écrit que le point A_0 est sur cette génératrice, ce qui donne

$$\begin{cases} \dfrac{l \sin \theta}{\cos \alpha} \cos(f_0 - \alpha) = l \sin \theta \cos \varphi_0 - l \cos \theta \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \sin \varphi_0, \\ \dfrac{l \sin \theta}{\cos \alpha} \sin(f_0 - \alpha) = l \sin \theta \sin \varphi_0 + l \cos \theta \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \cos \varphi_0. \end{cases}$$

Ces deux équations s'écrivent

$$\begin{cases} \cos(f_0 - \alpha) = \cos \alpha \cos \varphi_0 - \sin \alpha \sin \varphi_0 = \cos(\varphi_0 + \alpha), \\ \sin(f_0 - \alpha) = \cos \alpha \sin \varphi_0 + \sin \alpha \cos \varphi_0 = \sin(\varphi_0 + \alpha). \end{cases}$$

Elles exigent $\qquad \varphi_0 + \alpha = f_0 - \alpha + 2k\pi.$

Mais comme deux angles φ qui diffèrent d'un multiple de 2π donnent la même génératrice, on peut supposer $k = 0$, et on a $\qquad \varphi_0 = f_0 - 2\alpha.$

La circonférence Γ_0 et la génératrice correspondante Φ_0 étant ainsi déterminées par l'angle φ_0, on obtiendra les coordonnées du centre B_0 de la sphère B_0 en cherchant le point d'intersection de la génératrice Φ_0 avec le plan P_0, c'est-à-dire en résolvant le système

$$(\Phi_0) \quad \begin{cases} x = l \sin \theta \cos(f_0 - 2\alpha) - z \operatorname{tg} \theta \sin(f_0 - 2\alpha), \\ y = l \sin \theta \sin(f_0 - 2\alpha) + z \operatorname{tg} \theta \cos(f_0 - 2\alpha); \end{cases} \qquad (P_0) \quad z = l \cos \theta \operatorname{tg} \beta.$$

On trouve

$$(B_0) \qquad x = \frac{l \sin \theta \cos(f_0 - 2\alpha + \beta)}{\cos \beta}, \qquad y = \frac{l \sin \theta \sin(f_0 - 2\alpha + \beta)}{\cos \beta}, \qquad z = l \cos \theta \operatorname{tg} \beta.$$

Pour déterminer la circonférence C_1, il suffit de déterminer la génératrice correspondante F_1 et pour cela de trouver la valeur f_1 de l'angle f correspondant. Pour cela on écrira que le point B_0 est sur cette génératrice F_1 ce qui donne

$$\frac{l \sin \theta \cos(f_0 - 2\alpha + \beta)}{\cos \beta} = l \sin \theta \cos f_1 - l \cos \theta \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \theta \sin f_1,$$

$$\frac{l \sin \theta \sin(f_0 - 2\alpha + \beta)}{\cos \beta} = l \sin \theta \sin f_1 + l \cos \theta \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \theta \cos f_1.$$

Ces deux équations s'écrivent

$$\cos(f_0 - 2\alpha + \beta) = \cos \beta \cos f_1 - \sin \beta \sin f_1 = \cos(f_1 + \beta),$$

$$\sin(f_0 - 2\alpha + \beta) = \cos \beta \sin f_1 + \sin \beta \cos f_1 = \sin(f_1 + \beta).$$

On en tire donc $\qquad f_1 = f_0 - 2(\beta - \alpha).$

De même en designant par $f_2, f_3, \ldots, f_n$ les valeurs de l'angle f qui correspondent aux circonférences $C_2, C_3, \ldots, C_n$ on trouvera

$$f_2 = f_0 + 4(\beta - \alpha), \qquad f_3 = f_0 + 6(\beta - \alpha), \qquad \ldots \qquad f_n = f_0 + 2n(\beta - \alpha).$$

Donc, en supposant $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ différentes, pour que C_n soit identique à C_0, il faut et il suffit que f_n et f_0 diffèrent d'un multiple de 2π,

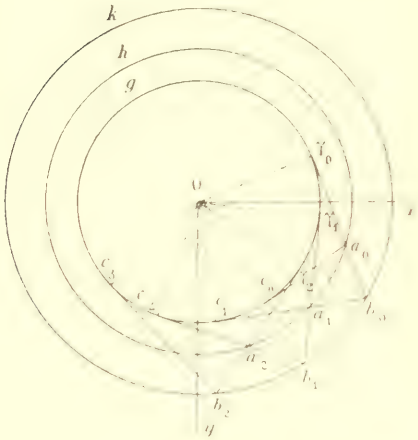
$$f_n = f_0 + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad 2n(\beta - \alpha) = 2k\pi, \qquad (k \text{ entier, premier avec } n)$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante est

$$\beta - \alpha = \frac{k\pi}{n} \qquad (k, \text{ entier premier avec } n)$$

Alors quelle que soit C_0, les circonférences $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ seront différentes, mais C_n sera identique à C_0.

Si $n = 10$, α et β vérifient la seule condition $\beta - \alpha = \frac{k\pi}{10}$. Donc le rapport $u = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$ n'est pas déterminé.



Remarque. — *Solution géométrique.* — Projetons la figure sur le plan xOy et soit g le cercle de gorge. Les lieux des centres des sphères A et B sont deux parallèles de l'hyperboloïde H, projetés respectivement en h et k.

Désignons par C_i, Γ_i les centres des circonférences C_i et Γ_i, qui se projettent en c_i et γ_i sur le cercle de gorge g, et par A_i et B_i les centres des sphères A_i et B_i qui se projettent en a_i et b_i sur les cercles h et k. Se donner la circonférence C_0, revient à se donner le point c_0 sur le cercle g. La tangente à ce cercle en c_0 coupe le cercle h en a_0 projection du centre A_0 de la sphère A_0. La 2e tangente $a_0\gamma_0$ menée de a_0 au cercle g touche ce cercle au point γ_0, qui est le centre du cercle Γ_0. Cette tangente $a_0\gamma_0$ coupe le cercle k au point b_0, projection du centre B_0 de la sphère B_0. La 2e tangente b_0c_1 menée par b_0 au cercle g touche ce cercle en c_1 et coupe le cercle h en a_1 et ainsi de suite.

Or on a angle $(Oc_0, Oc_1) = (Oc_0, O\gamma_0) + (O\gamma_0, Oc_1) = (Oc_0, Oc_1) - (O\gamma_0, Oc_0)$.

Mais on voit, sur la figure, que les angles $(O\gamma_0, Oc_0)$ et $(O\gamma_0, Oc_1)$ sont des angles constants. Si on les désigne par 2α et 2β on aura

$$(Oc_0, Oc_1) = 2(\beta - \alpha),$$

ce qui conduit aux mêmes conclusions que ci-dessus.

2e *Cas particulier.* — On donne

$$a(x = l\cos\theta\cos A,\quad y = l\cos\theta\sin A,\quad z = 0),\qquad b(x = l\cos\theta\cos B,\quad y = l\cos\theta\sin B,\quad z = 0).$$

Alors les points associés a' et b' sont symétriques des points a et b par rapport au point O et les plans P_a et P_b ont pour équations

$$(P_a)\quad x\cos A + y\sin A = 0,\qquad (P_b)\quad x\cos B + y\sin B = 0.$$

En employant les mêmes notations que dans le cas précédent, les coordonnées du centre A_0 de la sphère A_0 sont données en résolvant le système

$$(\Gamma_0)\quad \begin{cases} x = l\sin\theta\cos f_0 + z\operatorname{tg}\theta\sin f_0, \\ y = l\sin\theta\sin f_0 - z\operatorname{tg}\theta\cos f_0, \end{cases}\qquad (P_a)\quad x\cos A + y\sin A = 0.$$

On trouve pour ces coordonnées

$$A_0\left(x = -\frac{l\sin\theta\sin A}{\sin(f_0 - A)},\qquad y = \frac{l\sin\theta\cos A}{\sin(f_0 - A)},\qquad z = \frac{-l\cos\theta}{\operatorname{tg}(f_0 - A)}\right).$$

Pour déterminer la circonférence Γ_0 il suffit de déterminer l'angle φ_0 relatif à la génératrice correspondante, Φ_0. Pour cela on écrit que le point A_0 est sur cette génératrice, ce qui donne

$$\frac{-l\sin\theta\sin A}{\sin(f_0 - A)} = l\sin\theta\cos\varphi_0 - \frac{l\cos\theta}{\operatorname{tg}(f_0 - A)}\operatorname{tg}\theta\sin\varphi_0,$$

$$\frac{l\sin\theta\cos A}{\sin(f_0 - A)} = l\sin\theta\sin\varphi_0 - \frac{l\cos\theta}{\operatorname{tg}(f_0 - A)}\operatorname{tg}\theta\cos\varphi_0.$$

Ces deux équations s'écrivent

$$-\sin A = \sin(f_0 - A)\cos\varphi_0 - \cos(f_0 - A)\sin\varphi_0 = \sin(\varphi_0 + f_0 - A),$$

$$\cos A = \sin(f_0 - A)\sin\varphi_0 - \cos(f_0 - A)\cos\varphi_0 = -\cos(\varphi_0 + f_0 - A).$$

Elles exigent $\qquad \varphi_0 + f_0 - A = \pi - A.$

On a donc $\qquad \varphi_0 = \pi + 2A - f_0.$

La génératrice Φ_0 et la circonférence correspondante Γ_0 étant ainsi déterminées, on obtiendra les coordonnées du centre B_0 de la sphère B_0 en cherchant le point d'intersection de cette génératrice avec le plan P_b, c'est-à-dire en résolvant le système

$$(\Phi_0)\quad \begin{cases} x = l\sin\theta\cos(\pi - 2A - f_0) + z\,\mathrm{tg}\,\theta\sin(\pi + 2A - f_0), \\ y = l\sin\theta\sin(\pi + 2A - f_0) + z\,\mathrm{tg}\,\theta\cos(\pi + 2A - f_0); \end{cases} \qquad P_b\ \ x\cos B - y\sin B = 0.$$

On trouve

$$(B_0)\qquad x = \frac{l\sin\theta\sin B}{\sin(2A - B - f_0)},\qquad y = \frac{-l\sin\theta\cos B}{\sin(2A - B - f_0)},\qquad z = \frac{l\cos\theta}{\mathrm{tg}(2A - B - f_0)}.$$

Pour déterminer la circonférence C_1, il suffit de déterminer l'angle f_1 relatif à la génératrice correspondante F_1. Pour cela on écrit que le point B_0 est sur cette génératrice, ce qui donne

$$\frac{l\sin\theta\sin B}{\sin(2A - B - f_0)} = l\sin\theta\cos f_1 + \frac{l\cos\theta}{\mathrm{tg}(2A - B - f_0)}\,\mathrm{tg}\,\theta\sin f_1,$$

$$\frac{-l\sin\theta\cos B}{\sin(2A - B - f_0)} = l\sin\theta\sin f_1 - \frac{l\cos\theta}{\mathrm{tg}(2A - B - f_0)}\,\mathrm{tg}\,\theta\cos f_1.$$

Ces deux équations s'écrivent

$$\sin B = \cos f_1\sin(2A - B - f_0) - \sin f_1\cos(2A - B - f_0) = \sin(f_1 - 2A - B - f_0),$$

$$-\cos B = \sin f_1\sin(2A - B - f_0) + \cos f_1\cos(2A - B - f_0) = -\cos(f_1 + 2A - B - f_0).$$

Elles donnent $\qquad f_1 = f_0 + 2(B - A).$

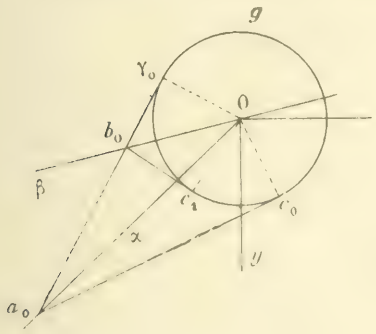
De même $\quad f_2 = f_0 + 4(B - A),\quad f_3 = f_0 + 6(B - A),\ \ldots\quad f_n = f_0 + 2n(B - A).$

et l'on voit que pour que C_0, C_1, ..., C_{n-1} soient différentes et C_n identique à C_0, il faut et il suffit que

$$B - A = \frac{k\pi}{n}\qquad (k,\ \text{entier premier avec } n.)$$

Cela a lieu alors quelle que soit C_0. Il faut donc et il suffit que l'angle aOb soit égal à $\frac{k\pi}{n}$.

Remarque. — Ce résultat se trouve facilement sans calcul par la géométrie. En employant les mêmes notations que dans le cas précédent, soient $O\alpha$ et $O\beta$ les traces des plans P_a et P_b sur le plan xOy. La tangente en c_0 au cercle de gorge g coupe $O\alpha$ au point a_0. La deuxième tangente menée par a_0 au cercle g touche ce cercle en γ_0 et coupe $O\beta$ en b_0. Enfin la deuxième tangente menée de b_0 au cercle g touche ce cercle en c_1.



On voit sur la figure que

$$\begin{aligned}\text{angle}\ (Oc_0, Oc_1) &= (Oc_0, O\gamma_0) + (O\gamma_0, Oc_1)\\ &= (Oa_0, O\gamma_0) - (Ob_0, Oc_1)\\ &= 2(Oc_0, Oa_0) - 2(Ob_0, Oc_1)\\ &= 2(O\alpha, O\beta).\end{aligned}$$

ce qui conduit aux mêmes résultats que ci-dessus.

Bonnes solutions : MM. J. Sourrigne, à Mont-de-Marsan. A. Boussac, à Fourmies en Wepres. G. [illegible] J. Ottenheimer, 8e régiment d'artillerie à Nancy.

1931. — 1° *Un système optique est formé de deux lentilles simples infiniment minces, centrées sur le même axe, séparées par la distance* D *et ayant pour distances focales* f *et* f'. *Calculer la distance focale du système et la position de ses foyers et de ses plans principaux.*

Application : D = 4 *centimètres,* f = 5 *centimètres,* f' = 3 *centimètres.*

Dessiner la position des éléments du système.

2° *Calculer la distance* D *en fonction de* f *et de* f' *pour que la distance focale du système demeure indépendante de l'indice au voisinage immédiat d'une certaine couleur, les deux lentilles étant faites avec le même verre. Calculer et placer les éléments du système constitué par deux lentilles identiques, de 5 centimètres de distance focale pour la couleur considérée.*

3° *Les lentilles précédentes étant disposées de façon à remplir la condition demandée, trouver la position des foyers et des plans principaux du système pour deux couleurs situées de part et d'autre de celle pour laquelle la condition est réalisée. Faire le calcul pour les couleurs ayant pour indices* 1,5124 *et* 1,5294 *; l'indice* 1,5200 *est celui pour lequel la distance focale de chaque lentille est* 5 *centimètres.*

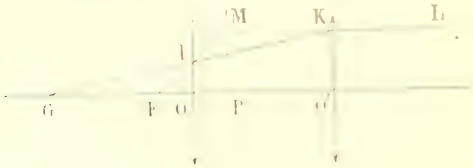
4° *Montrer que le système ainsi constitué ne donne pas d'images achromatiques. Calculer l'écart des images, correspondant aux deux couleurs extrêmes précédentes, d'un point situé sur l'axe, à* 2 *centimètres en avant de l'une des lentilles.*

5° *Indiquer dans quelles conditions le système précédent peut être employé et quels avantages il présente sur une lentille simple de même puissance, malgré quelques défauts d'achromatisme qui n'ont pas d'importance sensible.*

1. La distance focale du système, φ, est donnée par la formule connue

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'} - \frac{D}{ff'}.$$

Pour mettre en place les éléments principaux, considérons les deux lentilles O et O', le premier foyer F du système et un rayon quelconque FI ; la direction du rayon IK, réfracté dans la première lentille, doit passer par le premier foyer, G, de la seconde ; la direction du rayon KL, réfracté dans la seconde lentille, rencontre la direction FI au point M et la perpendiculaire MP, abaissée du point M sur l'axe, représente la trace du premier plan principal.



L'application de la formule générale des lentilles à la lentille O donne

$$\frac{1}{OI} - \frac{1}{f - D} = \frac{1}{f}, \qquad \text{d'où} \qquad OF = \frac{f(f - D)}{f - f' - D}.$$

On a d'autre part

$$\frac{PO + OF}{OF} = \frac{f}{f' - D}, \qquad \text{d'où} \qquad OP = -\frac{fD}{f - f' - D}.$$

De même, en désignant par F' et par P' le second foyer et le second plan principal du système, on trouverait

$$O'F' = -\frac{f'(f' - D)}{f - f' - D} \qquad \text{et} \qquad O'P' = \frac{f'D}{f - f' - D}.$$

L'application numérique donne

$$\varphi = 3{,}75, \quad OF = -1{,}25, \quad O'F' = -0{,}75, \quad OP = 3, \quad O'P' = 3.$$

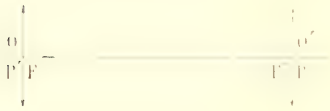
Les résultats en sont représentés par la figure ci-contre.

2. Le calcul de D se fait par une méthode connue : on écrit

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\varphi}\right) = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{f}\right) + \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{f'}\right) = \frac{D}{ff'}; \quad \text{on en déduit}$$

$$D = \frac{f + f'}{2}.$$

Pour deux lentilles de 5 centimètres de distance focale, on trouve $D = 5$ et, par suite, $\varphi = 5$: les foyers et les plans principaux sont situés sur les lentilles.



3. Pour calculer la position des foyers et des plans principaux pour une couleur autre que celle pour laquelle $D = \frac{f + f'}{2}$, nous calculerons les variations de OF et de OP quand on passe de l'indice n à l'indice $n + dn$.

Transformons d'abord l'expression de OF :

$$OF = \frac{1 - \frac{D}{f'}}{\frac{1}{f} + \frac{1}{f'} - \frac{D}{ff'}} = \varphi\left(1 - \frac{D}{f'}\right), \qquad \text{et de même} \qquad OP = -\varphi\frac{D}{f}.$$

Formons la dérivée de OF :

$$\frac{d}{dn}OF = \frac{d\varphi}{dn}\left(1 - \frac{D}{f'}\right) - \varphi D\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{f'}\right).$$

Mais $\frac{d\varphi}{dn} = 0$ par hypothèse, donc $d.OF = -\frac{\varphi D}{f'}\frac{dn}{n-1} = \varepsilon$.

La variation de OP est la même, puisque la distance PF est constante. De plus, puisque le système est symétrique, les déplacements de F′ et de P′ sont symétriques de ceux de F et de P.

Pour la première couleur,

$$dn = 1,5124 - 1,5200 = -0,0076 \quad \text{et} \quad \varepsilon = 0,073.$$

Les foyers F_1 et F_1' sont un peu en dehors du système.

Pour la seconde couleur, $dn = 1,5294 - 1,5200 = 0,0094$ et $\varepsilon = -0,0[illegible]$. Les foyers F_2 et F_2' sont un peu en dedans du système.

4. Le système ne donne pas d'images achromatiques puisque, pour un point à l'infini par exemple, les images, suivant la couleur, peuvent être en F_1' ou en F_2'.

Soit A un point lumineux placé sur l'axe, q sa distance à la première lentille et, par conséquent, $q - \varepsilon_1$ et $q - \varepsilon_2$ ses distances aux foyers F_1 et F_2, q_1 la distance de l'image A_1' au foyer F_1', q_2 la distance de l'image A_2' au foyer F_2'; la distance focale φ est la même pour les deux couleurs ; on a donc, avec la formule de Newton,

$$q_1 = -\frac{\varphi^2}{q - \varepsilon_1}, \qquad \text{et} \qquad q_2 = -\frac{\varphi^2}{q - \varepsilon_2}.$$

Calculons la distance des deux images :

$$A_1'A_2' = A_1'F_1' + F_1'F_2' + F_2'A_2' = -q_1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + q_2 = \frac{\varphi^2}{q - \varepsilon_1} + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \frac{\varphi^2}{q - \varepsilon_2}.$$

Réduisons et négligeons les quantités du second ordre, il vient

$$A_1'A_2' = \frac{\varphi^2 + q^2}{q^2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

et l'application numérique donne

$$A_1'A_2' = \frac{25 + 4}{4}(0,163 - 1,18).$$

5. Le système précédent peut être employé comme oculaire négatif et présente, sur une lentille simple de même puissance, c'est-à-dire sur une seule des lentilles du système, l'avantage de donner un champ un peu plus grand.

L'image objective devra se former sur le verre de champ et le défaut d'achromatisme aura la même importance que dans une loupe ordinaire, c'est-à-dire qu'il ne sera guère sensible, à la condition que l'observateur place l'œil près de la seconde lentille, qui sera d'ailleurs très voisine de l'anneau oculaire de l'instrument tout entier.

Bonne solution de M. Charles Guillaume.

QUESTIONS PROPOSÉES

2020. — Étant donnée l'équation différentielle

$$y'' = 2y' + (2 + [illegible])y$$

trouver le développement en série de y suivant les puissances croissantes de x; cela fait, en déduire un changement de variable permettant d'obtenir directement l'intégrale générale. Construire les courbes intégrales.

A. M. de L.

2021. — Étant donnés trois axes rectangulaires et deux cercles tangents en O à Oy, l'un dans le plan des xy de rayon a, l'autre dans le plan des yz de rayon $2a$, on considère les quadriques contenant ces deux cercles.

1° Trouver l'équation générale de ces quadriques et discuter leur nature ;

2° Trouver le lieu des centres et séparer sur le lieu les portions qui correspondent aux centres des diverses espèces de quadriques ;

3° Trouver l'équation de la sphère de Monge relative à une quelconque de ces quadriques ; démontrer que toutes ces sphères sont orthogonales à une sphère fixe ayant son centre dans le plan des xz, et trouver leur enveloppe.

A. M. de L.

2022. — Un point matériel de masse 1 décrit la spirale logarithmique $r = a^\theta$ sous l'influence d'une force centrale F. Trouver l'expression de cette force F, ainsi que la loi de la vitesse ; réciproquement, trouver l'équation générale des trajectoires décrites par le point matériel sous l'influence de la force F précédemment obtenue, ainsi que la loi du mouvement sur cette trajectoire ; choisir ensuite les constantes pour que la trajectoire soit la spirale donnée, et les interpréter géométriquement.

A. M. de L.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Cours préparatoire*)

Concours de 1911.

1977. — *Soit* $y = \sqrt{1 - x^2}$.

1° *Calculer les coefficients numériques du développement convergent de la forme*

$$y = x + a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots$$

qui satisfait à cette relation pour les valeurs de x *suffisamment grandes,* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *étant des constantes ; on pourra poser* $x = \frac{1}{z}$; *vérifier la convergence de la série obtenue.*

2° *Peut-on ensuite indiquer une valeur positive* x_0 *de* x, *aussi petite que possible et telle que, lorsque* $x > x_0$, *on ait, à* 0,01 *près,*

$$y = x + a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots$$

3° *Trouver, soit en s'aidant du développement ci-dessus de* y, *soit autrement, la limite de l'expression*

$$\frac{(1 - \cos z)^2\left(y - \frac{1}{z}\right)\cos^{\alpha}(z - 45^\circ)}{z(\sin z)^3}$$

lorsque z *tend vers* 0, α *étant un nombre donné, positif ou négatif. A quelle condition doit satisfaire* α *pour que cette limite soit finie et différente de zéro ?*

1. En supposant $x > 0$, on peut écrire

$$y = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} ;$$

et si $\frac{1}{x^2}$ est plus petit que 1, ou si x est plus grand que 1, on peut développer $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ par la

formule du binome. On obtient

$$y = x\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\cdot\frac{1}{x^4} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\cdot\frac{1}{x^6} + \cdots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\cdot\frac{1}{x^{2n}}\cdots\right].$$

ou $$y = x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + \frac{1.3}{2^3 3!}\cdot\frac{1}{x^5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots.2n-3}{2^n n!}\cdot\frac{1}{x^{2n-1}} + \cdots$$

Il est d'ailleurs facile de vérifier que cette série est convergente si x est plus grand que 1. En effet, le rapport d'un terme au précédent est en valeur absolue $\frac{2n-3}{2n}\cdot\frac{1}{x^2}$; pour n infini, ce rapport a pour limite $\frac{1}{x^2}$, quantité plus petite que 1. Donc la série est convergente.

2. Si l'on prend pour valeur de y la somme des deux premiers termes, $x + \frac{1}{2x}$, l'erreur commise a le signe du terme auquel on s'arrête et est moindre en valeur absolue que ce terme, puisque la série est alternée. Par conséquent, $x + \frac{1}{2x}$ est une valeur approchée par excès, et l'erreur commise est moindre que $\frac{1}{8x^3}$. Pour que cette erreur soit plus petite que $\frac{1}{100}$, il faut qu'on ait

$$\frac{1}{8x^3} < \frac{1}{100} \quad \text{ou} \quad x > \frac{\sqrt[3]{100}}{2}.$$

On aura donc $$x_0 = \frac{\sqrt[3]{100}}{2} = 2{,}32.$$

3. Considérons maintenant l'expression

$$u = \frac{1 - \cos z^2\left(y - \frac{1}{z}\right)^4 \cos^2\left(z + \frac{\pi}{4}\right)}{z^7 \sin z^2}$$

où l'on a posé $z = \frac{1}{x}$, et cherchons la limite de cette expression lorsque z tend vers zéro.

Remplaçons chaque infiniment petit par sa partie principale : $1 - \cos z$ par $\frac{z^2}{2}$, $y - \frac{1}{z}$ par $\frac{z}{2}$ (en nous appuyant sur le développement de y), et enfin $\sin z$ par z, et envisageons la fonction

$$v = \frac{\left(\frac{z^2}{2}\right)^2\left(\frac{z}{2}\right)^4 \cos^2\frac{\pi}{4}}{z^7 z^2},$$

qui a même limite que u, puisque la limite de $\frac{u}{v}$ est égale à 1.

On peut écrire $v = \frac{z^3}{64 z^7}$.

On en conclut que si $z < 2$, v a pour limite zéro, si $z > 2$, v est infini et, si $z = 2$, v a pour limite $\frac{1}{64}$.

A. ROUSSEAU, à Fourmies-en-Wappes.

Bonnes solutions par MM. A. Courtois, 142e d'infanterie, à Sedan ; J. Vitry, à Mille-Aveu ; C. Jacquet, conducteur des ponts et chaussées, à Grenoble ; L. Simon, à Fourmies.

1978. — *Calculer* $\int \frac{x^4}{1+x^2} \operatorname{arc\,tg} x\, dx$.

Indiquer plus généralement un procédé pour intégrer

$$\int \frac{f(x^2)}{1+x^2} \operatorname{arc\,tg} x\, dx,$$

$f(x^2)$ étant un polynome en x^2.

On a
$$\frac{x^4}{1+x^2} = \frac{x^4-1+1}{x^2+1} = x^2-1+\frac{1}{1+x^2}.$$

et par suite

$$\int \frac{x^4}{1+x^2} \operatorname{arc\,tg} x\, dx = \int (x^2-1) \operatorname{arc\,tg} x\, dx + \int \operatorname{arc\,tg} x \frac{dx}{1+x^2}.$$

La seconde intégrale du second membre s'écrit $\int \operatorname{arc\,tg} x\, d(\operatorname{arc\,tg} x)$; elle est donc égale à $\frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{2}$.

Pour calculer la première, nous intégrerons par parties, en posant $u = \operatorname{arc\,tg} x$, $dv = (x^2-1)\,dx$, ce qui donne $v = \frac{x^3}{3} - x$.

Nous obtenons ainsi

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,(x^2-1)\,dx = \operatorname{arc\,tg} x\left(\frac{x^3}{3}-x\right) - \int \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\frac{dx}{1+x^2}.$$

et nous sommes ramenés au calcul de l'intégrale d'une fonction rationnelle.

Nous pouvons écrire

$$\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\frac{1}{x^2+1} = \frac{x(x^2-3)}{3(x^2+1)} = \frac{x(x^2+1-4)}{3(x^2+1)} = \frac{x}{3} - \frac{4x}{3(x^2+1)}.$$

et
$$\int \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{x\,dx}{3} - \frac{4}{3}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{6} - \frac{2}{3}\,L(1+x^2).$$

On a donc

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,(x^2-1)\,dx = \operatorname{arc\,tg} x\left(\frac{x^3}{3}-x\right) - \frac{x^2}{6} + \frac{2}{3}\,L(1+x^2).$$

et
$$\int \frac{x^4}{1+x^2} \operatorname{arc\,tg} x\, dx = \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{2} + \operatorname{arc\,tg} x\left(\frac{x^3}{3}-x\right) - \frac{x^2}{6} - \frac{2}{3}\,L(1+x^2).$$

Soit maintenant à calculer l'intégrale $\int \frac{f(x^2)}{1+x^2} \operatorname{arc\,tg} x\, dx$, où $f(x^2)$ est un polynome en x^2.

Divisons $f(x^2)$ par x^2+1, nous obtenons un quotient $\varphi(x^2)$ et un reste qui est une constante égale à $f(-1)$, et nous avons

$$\frac{f(x^2)}{x^2+1} = \varphi(x^2) + \frac{f(-1)}{x^2+1}.$$

Par suite
$$\int \frac{f(x^2)}{x^2+1} \operatorname{arc\,tg} x\, dx = \int \varphi(x^2) \operatorname{arc\,tg} x\, dx + f(-1)\int \operatorname{arc\,tg} x \frac{dx}{1+x^2}.$$

Nous avons encore deux intégrales dans le deuxième membre : la seconde est égale à $f(-1)\frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{2}$, et on calcule la première en intégrant par parties.

Si l'on pose $u = \operatorname{arc\,tg} x$, $dv = \varphi(x^2)\,dx$, on remarque que v est un polynome qui ne contient que les puissances impaires de x ; on peut alors écrire $v = x\psi(x^2)$, et par suite

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\, \varphi(x^2)\, dx = \operatorname{arc\,tg} x\, x\psi(x^2) - \int \frac{x\psi(x^2)\,dx}{1+x^2}.$$

Et pour calculer cette dernière intégrale, nous divisons encore $\psi(x^2)$ par x^2+1 : soit $g(x^2)$ le quotient et $\psi(-1)$ le reste. Nous avons $\frac{\psi(x^2)}{x^2+1} = g(x^2) + \frac{\psi(-1)}{x^2+1}$, et

$$\int \frac{x\psi(x^2)}{x^2+1}\,dx = \int g(x^2)x\,dx + \psi(-1)\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int g(x^2)\,dx^2 + \frac{1}{2}\psi(-1)\,\mathrm{L}(x^2+1).$$

Et nous n'avons plus qu'à intégrer un polynome.

R. DONTOT, élève à l'École normale supérieure.

Bonnes solutions par MM. R. B., à Nice ; Théodore Coppel, à Paris ; H. Frobert, à Vichy ; L. Goujaud, élève des Jésuites, à Lyon ; C. Jacquet, conducteur des ponts et chaussées, à Grenoble ; G. Lach, à Rodez ; A. de Marrasson, à Paris ; R. Masen, à Albi ; Paul Remondin, 154e d'infanterie à Lérouville (Meuse) ; L. Simon, à Fourmies ; Wladimir Sieper ; R. Thérémin, lycée de Reims ; P. Vergnes, 23e d'artillerie ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; Savary, 61e d'artillerie.

1979. — 1° *Former en coordonnées rectangulaires l'équation de l'enveloppe des cercles passant par l'origine et interceptant sur la droite fixe $x = l$ une corde de longueur constante et égale à $2l$.*

2° *Passer des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires en prenant l'origine pour pôle et déduire de l'équation en coordonnées polaires une définition géométrique très simple de l'enveloppe.*

3° *Indiquer la forme de l'enveloppe et en déterminer les points d'inflexion.*

1. Soit $x^2+y^2+\lambda x+\mu y=0$ l'équation d'un cercle passant par l'origine. La droite $x=l$ rencontre ce cercle en deux points A et B dont les ordonnées y_1 et y_2 sont les racines de l'équation

$$y^2+\mu y+l^2+\lambda l=0.$$

Pour que AB soit égal à $2l$, il faut qu'on ait $(y_1-y_2)^2=4l^2$, ou $(y_1-y_2)^2=4l^2$, ou encore

$$y_1^2+y_2^2-4y_1y_2=4l^2.$$

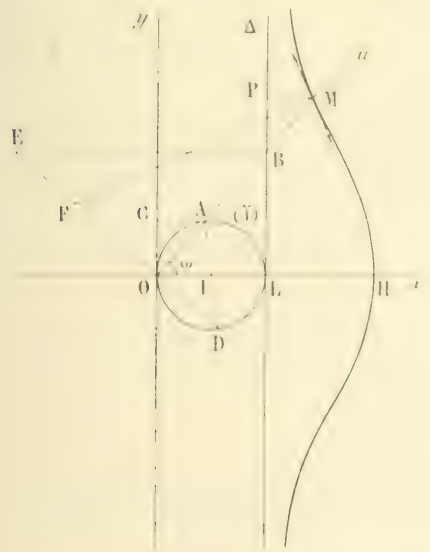
Remplaçons y_1+y_2 par $-\mu$, y_1y_2 par $l^2+\lambda l$, nous avons

$$\mu^2-4(l^2+\lambda l)=4l^2,$$

d'où nous tirons

$$\lambda=\frac{\mu^2-8l^2}{4l}.$$

L'équation générale des cercles satisfaisant aux conditions données est donc, en fonction du seul paramètre μ,



$$x^2+y^2+\frac{\mu^2-8l^2}{4l}x+\mu y=0,$$

ou

$$4l(x^2+y^2)+4\mu ly-4l(\mu^2-8l^2)=0.$$

Nous obtiendrons la courbe enveloppe de ces cercles en écrivant que cette équation en μ a une racine double, ce qui nous donne

$$4l^2y^2-4lx(x^2+y^2-2lx)=0,$$

ou

$$x(x^2+y^2)-2l(2x^2+y^2)=0.$$

Cette équation représente une cubique circulaire ayant un point double isolé à l'origine. La courbe est symétrique par rapport à l'axe des x, et admet l'asymptote réelle $x=\frac{l}{2}$.

2. Pour passer aux coordonnées polaires, nous remplaçons x par $\rho\cos\omega$ et y par $\rho\sin\omega$; nous obtenons

$$\rho\cos\omega-l(2\cos^2\omega+\sin^2\omega)=0,$$

ou

$$\rho\cos\omega-l(\cos^2\omega+1)=0,$$

ou enfin

$$\rho=l\cos\omega+\frac{l}{\cos\omega}.$$

De cette équation on déduit une définition géométrique très simple de l'enveloppe.

Prenons sur Ox le point L qui a pour abscisse l, et construisons le cercle (γ) qui a pour diamètre OL, et la tangente Δ à ce cercle au point L.

Une droite quelconque Ou faisant l'angle ω avec Ox rencontre le cercle (γ) au point A, la droite Δ au point B, et l'on a $\qquad OA = l\cos\omega, \qquad OB = \frac{l}{\cos\omega}.$

Par suite, si M est le point de l'enveloppe situé sur cette droite Ou, on a $OM = OA + OB$, ou $\overline{BM} = \overline{OA}$.

Ceci permet de construire la courbe, qui se compose ainsi de deux branches de courbe symétriques par rapport à Ox.

Il est aisé de voir que la droite Δ est asymptote. Si nous menons en effet MP perpendiculaire sur Δ, et AC sur Oy, les deux triangles rectangles BMP, OAC sont égaux puisqu'ils ont l'hypoténuse égale et les angles égaux. On a donc $MP = AC$. Mais lorsque le point A se rapproche indéfiniment du point O, AC tend vers zéro, il en est de même de MP ; donc Δ est asymptote.

On peut aussi construire la tangente au point M.

Posons $OA = z_1 = l\cos\omega$, $OB = z_2 = \frac{l}{\cos\omega}$, nous avons

$$z = z_1 + z_2 \qquad \text{et} \qquad \frac{dz}{d\omega} = \frac{dz_1}{d\omega} + \frac{dz_2}{d\omega}.$$

On en conclut que la sous-normale relative au point M est la somme algébrique des sous-normales relatives aux points A et B. Celles-ci se construisent aisément, et sont égales aux segments $\overline{OD}$ et $\overline{OE}$ portés sur la perpendiculaire à OA. Nous prendrons sur cette droite un segment $\overline{OF}$ égal à $\overline{OE} + \overline{OD}$, et la normale en M à la courbe est FM.

3. Les points d'inflexion sont définis par l'équation

$$\frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)'' = 0.$$

Nous avons $\quad \frac{1}{z} = \frac{1}{l} \cdot \frac{\cos^2\omega}{\cos^2\omega - 1}$; nous en tirons

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{l} \cdot \frac{\sin\omega}{(\cos^2\omega - 1)^2},$$

et

$$\left(\frac{1}{z}\right)'' = -\frac{\cos\omega}{l} \cdot \frac{3\sin^2\omega(\cos^2\omega - 1) + 4\sin^2\omega}{(\cos^2\omega - 1)^3}.$$

et par suite,

$$\frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)'' = \frac{1}{l} \cdot \frac{\cos\omega}{(\cos^2\omega - 1)^3}\left[(\cos^2\omega - 1)^2 - 3\sin^2\omega(\cos^2\omega - 1) - 4\sin^2\omega\right]$$

ou

$$\frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)'' = \frac{2\cos\omega}{l(\cos^2\omega - 1)^2}(5\cos^2\omega - 3).$$

La courbe présente donc deux points d'inflexion symétriques par rapport à Ox, et correspondant aux angles polaires dont les cosinus sont $\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$.

E. N. BARISIEN.

Bonnes solutions par MM. R. Bouin ; Théodore Coppel, à Paris ; André Courtois ; J. Dagnaux, à Dijon ; J. Fitte, à Azille (Aude) ; L. Goullot, école des Anglais, Lyon ; C. Jacquet, conducteur des ponts et chaussées, à Grenoble ; G. Lach, à Rodez ; A. Le Marchand, à Paris ; R. Manen, à Albi ; L. Nauelle ; Paul Remonen, 114e d'infanterie, à Lérouville (Meuse) ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; M. Roux, instituteur à Châlons-sur-Saône ; N. Savary, 61e d'artillerie ; L. Simon, à Fourmies ; Wladimir Sturtz.

ALGÈBRE

1965. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$a^2y'' - y = a.$$

Construire la courbe intégrale qui passe par l'origine et qui en ce point est tangente à Ox.

Exprimer l'aire de cette courbe comprise entre un arc MM_1, *l'axe des* x *et les deux ordonnées* MP, M_1P_1.

Exprimer la longueur de l'arc MM_1.

Considérons d'abord l'équation différentielle sans second membre, $a^2y'' - y = 0$. L'équation caractéristique, $a^2r^2 - 1 = 0$, admet les deux racines $\pm \frac{1}{a}$; par suite, l'équation sans second membre a pour intégrale générale $Ae^{\frac{x}{a}} + Be^{-\frac{x}{a}}$, A et B désignant deux constantes quelconques.

D'autre part, l'équation proposée avec second membre, $a^2y'' - y = a$, admet visiblement l'intégrale particulière $-a$. On en conclut que l'intégrale générale de l'équation avec second membre est

$$y = Ae^{\frac{x}{a}} + Be^{-\frac{x}{a}} - a.$$

Nous en déduisons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A}{a}e^{\frac{x}{a}} - \frac{B}{a}e^{-\frac{x}{a}}.$$

Écrivons que pour $x = 0$ y et $\frac{dy}{dx}$ sont nuls : nous avons

$$A + B - a = 0, \qquad A - B = 0,$$

d'où nous tirons

$$A = B = \frac{a}{2}.$$

Par suite, la courbe intégrale demandée a pour équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) - a,$$

ou

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} - a. \tag{1}$$

Si on transporte l'origine des coordonnées au point $x = 0$, $y = -a$, l'équation se réduit à $y' = a \operatorname{ch} \frac{x'}{a}$, et l'on voit sous cette forme que la courbe est une chaînette.

Nous conserverons l'équation (1); l'origine O est le sommet de la courbe.

Soient x et x_1 les abscisses des points M et M_1 $(x_1 > x)$; l'aire limitée par l'arc MM_1 de la courbe, l'axe des x et les deux ordonnées MP et M_1P_1 a pour valeur

$$A = \int_x^{x_1} y\,dx = a\int_x^{x_1}\left(\operatorname{ch}\frac{x}{a} - 1\right)dx.$$

L'intégrale indéfinie est égale à $a\left[a \operatorname{sh}\frac{x}{a} - x\right]$; on a donc

$$A = a^2\left(\operatorname{sh}\frac{x_1}{a} - \operatorname{sh}\frac{x}{a}\right) - a(x_1 - x).$$

D'autre part, on a $dy = \operatorname{sh}\frac{x}{a}dx$, et

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}\right)dx^2 = \operatorname{ch}^2\frac{x}{a}dx^2$$

On en déduit $ds = \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx$, en supposant que s varie dans le même sens que x, et la longueur de l'arc MM_1 est

$$s = \int_{x_1}^{x} \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx = a\left(\operatorname{sh}\frac{x}{a} - \operatorname{sh}\frac{x_1}{a}\right).$$

E. CLOUEZ, à Flines-lez-Mortagne.

Bonnes solutions par MM. André Courtois, à Sedan ; C. J[illegible], conducteur des ponts et chaussées, à Grenoble ; G. Lach, à Rodez ; J. Nyegaard, à Genève ; J. Oppenheimer, à Nancy ; Louis Pradix, élève à l'école des mines de Saint-Étienne ; A. Rousseau, à Fourmies-en-Weppes ; L. Simon, à Fourmies ; J. Sirmann, à Mont-de-Marsan.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1940. — *Étant donné un triangle* AOB, *dont les côtés de l'angle droit sont* $OA = a$ *et* $OB = b$, *on considère toutes les droites* Δ *qui coupent* OA, OB *et* AB *ou leurs prolongements en des points* M, N *et* P *tels que le point* P, *situé sur* AB, *soit le milieu du segment* MN.

1° *Former l'équation générale des droites* Δ, *en prenant pour axes des coordonnées les côtés de l'angle droit du triangle donné.*

2° *Par un point* R, *donné dans le plan* AOB, *passent deux droites* Δ *du système considéré ; former l'équation qui représente l'ensemble de ces deux droites et déterminer la région du plan dans laquelle doit être* R *pour qu'elles soient réelles ;*

3° *Les deux droites* Δ *qui passent par le point* R *et les deux qui passent par un autre point* R′ *se coupent mutuellement en quatre points, autres que* R *et* R′ ; *trouver la condition pour que ces quatre points soient sur une même circonférence : il faut et il suffit que la droite* RR′ *passe par un point fixe* F, *que l'on déterminera ;*

4° *Trouver le lieu du centre de la circonférence précédente, quand* R *et* R′ *décrivent une droite fixe, passant par* F. *Montrer que, par un choix particulier de la droite fixe, toutes les circonférences correspondantes sont concentriques.*

(*École supérieure d'aéronautique et de construction mécanique, concours de 1910, 2e session.*)

1. Nous prenons comme axes de coordonnées OA et OB, et nous désignons par $y = mx + p$ l'équation d'une droite Δ.

Cette droite rencontre la droite AB, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$, en un point P dont l'abscisse est égale à $\frac{ab - p}{b + am}$, et l'axe des x au point M qui a pour abscisse $-\frac{p}{m}$. Pour que le point P soit le milieu de MN, il suffit que l'abscisse de M soit double de celle de P ; on doit donc avoir

$$\frac{2a(b - p)}{b - am} = -\frac{p}{m}, \qquad \text{d'où l'on tire} \qquad p = \frac{2abm}{am - b}.$$

Il en résulte que l'équation générale des droites Δ est, en fonction de leur pente,

$$y = mx - \frac{2abm}{am - b}.$$

2. Écrivons que cette droite passe par le point R (x_0, y_0), nous obtenons l'équation

$$y_0 = mx_0 - \frac{2abm}{am - b}$$

ou, en chassant le dénominateur et en ordonnant par rapport à m,

$$(1) \qquad ax_0 m^2 - mbx_0 - ay_0 - 2ab(ay_0 - bx_0) = 0.$$

Cette équation admet comme racines les pentes des droites Δ qui passent au point R. Nous voyons ainsi qu'il passe deux droites Δ par le point R, et pour avoir l'équation de leur ensemble, il suffit de remplacer dans l'équation (1) m par $\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$, ce qui donne

$$ax_0(y-y_0)^2 - (bx_0+ay_0-2ab)(x-x_0)(y-y_0) + by_0(x-x_0)^2 = 0,$$

ou, en ordonnant,

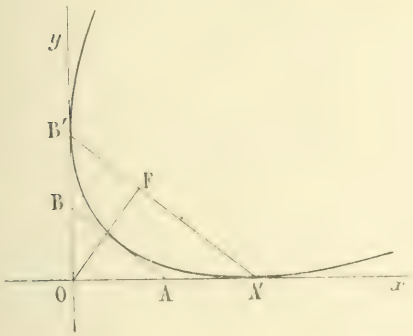
$$by_0x^2 - (bx_0+ay_0-2ab)xy + ax_0y^2 - (y_0bx_0+ay_0+2ab)x + (x_0bx_0+ay_0-2ab)y + 2abx_0y_0 = 0.$$

Pour que ces deux droites soient réelles, il faut et il suffit que l'équation (1) ait ses racines réelles, ce qui donne la condition

$$(bx_0+ay_0-2ab)^2 - 4abx_0y_0 \geq 0,$$

et ceci exprime que le point R doit se trouver dans la région positive de la courbe qui a pour équation

$$(bx+ay-2ab)^2 - 4abxy = 0.$$



On voit immédiatement que cette équation représente une conique tangente à Ox et à Oy aux points A' et B' qui ont respectivement pour abscisse et ordonnée $2a$ et $2b$. De plus, comme l'ensemble des termes du deuxième degré est

$$(bx-ay)^2,$$

cette conique est une parabole, et l'origine O est dans la région positive de cette parabole.

On voit de plus que cette parabole touche la droite AB en son milieu.

En résumé, pour que les deux droites Δ passant par le point R soient réelles, il faut que le point R soit extérieur à la parabole qui touche les axes Ox et Oy aux points A' et B'.

D'ailleurs cette parabole est visiblement l'enveloppe des droites Δ, car son équation s'obtient en écrivant que l'équation de Δ a une racine double en m; il en résulte que les droites Δ qui passent par le point R sont les tangentes menées par le point R à la parabole.

3. Rapportons maintenant la parabole à son axe et à sa tangente au sommet; l'équation de cette courbe s'écrit alors $y^2 - 2px = 0$, et en désignant toujours par x_0, y_0 les coordonnées du point R par rapport à ces nouveaux axes, l'équation de l'ensemble des tangentes issues de ce point à la courbe est

$$(yy_0 - px - px_0)^2 - (y^2 - 2px)(y_0^2 - 2px_0) = 0,$$

ou

$$p^2x^2 - 2py_0xy + 2px_0y^2 + 2p(y_0^2 - px_0)x - 2px_0y_0y + p^2x_0^2 = 0.$$

De même, l'ensemble des tangentes menées par le point $R'(x_1, y_1)$ a pour équation

$$p^2x^2 - 2py_1xy + 2px_1y^2 + 2p(y_1^2 - px_1)x - 2px_1y_1y + p^2x_1^2 = 0.$$

L'équation générale des coniques passant par les quatre points de rencontre de ces deux faisceaux est

$$p^2(1+\lambda)x^2 - 2p(y_0+\lambda y_1)xy + 2p(x_0+\lambda x_1)y^2 + 2p(y_0^2 - px_0 + \lambda(y_1^2 - px_1))x$$
$$- 2p(x_0y_0 + \lambda x_1y_1)y + p^2(x_0^2 + \lambda x_1^2) = 0.$$

Écrivons que cette conique représente un cercle : on doit avoir

$$p^2(1+\lambda) = 2p(x_0+\lambda x_1), \qquad y_0 + \lambda y_1 = 0.$$

On en tire

$$\lambda = \frac{x_0 - \frac{p}{2}}{x_1 - \frac{p}{2}} \qquad \text{et} \qquad \lambda = -\frac{y_0}{y_1}$$

Ces deux valeurs de λ devront être égales, ce qui donne la condition $\dfrac{x_0}{x_1 - \frac{p}{2}} = \dfrac{y_0}{x_1 - \frac{p}{2}}$ et

celle-ci exprime que la droite RR′ passe par le point qui a pour coordonnées $\frac{p}{2}$ et 0, c'est-à-dire par le foyer de la parabole.

4. Supposons ces conditions remplies. Le centre de la circonférence a pour coordonnées $x = \frac{px_0 - y_0^2 + \lambda(px_1 - y_1^2)}{p(1+\lambda)}$, $y = \frac{x_0y_0 + \lambda x_1y_1}{p(1+\lambda)}$, ou, en remplaçant λ par sa valeur $-\frac{y_0}{y_1}$,

$$(2) \qquad x = \frac{p(x_0y_1 - y_0x_1 + y_0y_1(y_1 - y_0))}{p(y_1 - y_0)}, \qquad y = \frac{y_0y_1(x_0 - x_1)}{p(y_1 - y_0)}.$$

Supposons que les points R et R′ se déplacent sur une droite fixe D passant par le point F, et désignons par α et β les paramètres directeurs de cette droite; nous avons

$$x_0 = \frac{p}{2} + \alpha\rho_0, \qquad x_1 = \frac{p}{2} + \alpha\rho_1,$$

$$y_0 = \beta\rho_0, \qquad y_1 = \beta\rho_1,$$

et en remplaçant x_0, y_0, x_1, y_1 par ces valeurs dans les formules (2), on obtient, après avoir divisé haut et bas par $\rho_1 - \rho_0$,

$$x = \frac{p}{2} + \frac{\beta^2\rho_0\rho_1}{p}, \qquad y = -\frac{\alpha\beta\rho_0\rho_1}{p}.$$

Pour avoir le lieu de ce point, il suffit d'éliminer $\rho_0\rho_1$ entre ces deux équations. On obtient sans difficulté

$$\alpha\left(x - \frac{p}{2}\right) + \beta y = 0;$$

ce qui montre que le lieu cherché est la droite passant par le foyer et perpendiculaire à la droite donnée D.

Pour que le centre du cercle reste fixe, quels que soient les points R et R′ de la droite D, il faut que les valeurs de x et y soient indépendantes de ρ_0 et ρ_1, et pour cela il faut qu'on ait $\beta = 0$. On en conclut que la droite fixe doit coïncider avec l'axe de la parabole.

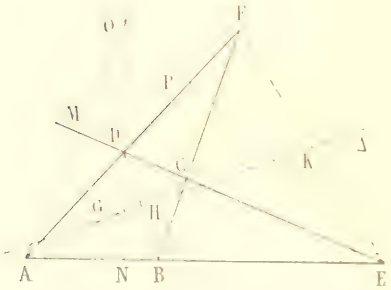
G. LACH, à Rodez.

Bonnes solutions par MM. André Collet, 117e d'infanterie, à Sedan; G. Lemoine, Elève de Vitt, lycée de Montpellier; Jean Ottenheimer, lycée de Nancy; Paul Raymondin, 153e d'infanterie, à Lérouville; A. Rousseau, à Fourmies-en-Weppes; Henri Recoing; L. Simon, à Fourmies.

GÉOMÉTRIE

1971. — *Démontrer que les cercles conjugués aux quatre triangles formés par les côtés d'un quadrilatère complet font partie d'un faisceau de cercles conjugué du faisceau déterminé par les cercles décrits sur les trois diagonales comme diamètres, et que les points communs à ces quatre cercles sont les centres des deux hyperboles équilatères inscrites dans le quadrilatère considéré.*

Première solution. — Soit le quadrilatère complet ABCDEF; considérons l'un des triangles formés par trois des côtés de ce quadrilatère, le triangle ADE par exemple. Menons les hauteurs AM, DN, EP qui se coupent au point O. Ce point est le centre du cercle conjugué par rapport au triangle ADE, et le rayon R de ce cercle est donné par les égalités



$$(1) \qquad R^2 = \overline{OA}.\overline{OM} = \overline{OD}.\overline{ON} = \overline{OE}.\overline{OP}.$$

Désignons par G, H, K les milieux des diagonales AC, BD, EF, qui sont sur la droite de Newton Δ, et par (G), (H) et (K) les cercles décrits sur les diagonales comme diamètres. Le cercle (G) passe par les deux points M et A, le cercle (H) par les points D et N, et le cercle (K) par P et E.

Les relations (I) prouvent alors que le point O a même puissance, R^2, par rapport aux trois cercles (G), (H), (K) ; donc le cercle conjugué par rapport au triangle ADE coupe orthogonalement ces trois cercles.

Il en est de même des cercles conjugués par rapport aux autres triangles formés par trois côtés du quadrilatère complet, AFB, BCE, DCF.

On en conclut que les cercles (G), (H), (K) forment un faisceau et que les cercles conjugués en forment un autre conjugué du premier.

De plus, on sait que le lieu des centres des hyperboles équilatères inscrites dans un triangle est le cercle conjugué au triangle. On en conclut que les centres des hyperboles équilatères inscrites dans le quadrilatère complet sont les deux points communs aux cercles du deuxième faisceau, ou les points limites du premier. Ces points sont d'ailleurs sur Δ, d'après le théorème de Newton.

A. ROUSSEAU, à Fournes-en-Weppes.

Deuxième solution. — La solution analytique de ce problème n'est pas dépourvue de difficultés. Il pourrait toutefois s'aborder facilement en coordonnées barycentriques, en prenant pour triangle de référence le triangle diagonal du quadrilatère, ou, en coordonnées tangentielles, en prenant pour axes deux des diagonales de ce quadrilatère. Les calculs sont simplifiés dans le cas particulier où deux de ces diagonales sont rectangulaires.

Nous suivrons une méthode plus géométrique, basée sur la propriété classique de l'invariant θ commun à deux coniques et sur les propriétés des faisceaux tangentiels de coniques.

Appelons C une conique quelconque inscrite dans le quadrilatère donné et Γ un cercle circonscrit à l'un des quatre triangles formés par les côtés de ce quadrilatère. La conique C est harmoniquement inscrite au cercle Γ ; donc l'invariant θ qui contient les coefficients tangentiels de C et les coefficients ponctuels de Γ est nul. Par suite, le cercle Γ est circonscrit à une infinité de triangles conjugués de C. D'après le théorème de Faure, le cercle Γ est orthogonal au cercle orthoptique de C.

Les coniques C forment un faisceau linéaire tangentiel dont les trois coniques impropres sont les couples de sommets opposés du quadrilatère. En s'appuyant sur le théorème corrélatif de celui de Desargues, il apparaît immédiatement que les cercles orthoptiques des coniques C forment un faisceau linéaire ponctuel dont font partie les trois cercles décrits sur les diagonales comme diamètres.

Les quatre cercles Γ font donc partie du faisceau linéaire ponctuel conjugué du précédent et passent aux deux points de Poncelet ou points limites. Ces deux points limites sont les centres des deux cercles orthoptiques de rayon nul du faisceau. Ce sont donc les centres des deux hyperboles équilatères du faisceau tangentiel (C).

Nous croyons intéressant de terminer cette solution en indiquant une élégante démonstration du théorème de Faure.

Lorsqu'un cercle Γ est harmoniquement circonscrit à une conique C, chacun de ses points est le sommet d'un triangle conjugué à la conique C et inscrit dans Γ. Soient alors A un des points de rencontre du cercle Γ avec le cercle orthoptique de la conique C, AB et AC les deux tangentes à la conique, B et C leurs points de contact. Les autres sommets du triangle conjugué qui a un sommet en A sont les couples de points conjugués dans l'involution dont les points doubles sont B et C. Soit (P, Q) l'un de ces couples. Le cercle circonscrit au triangle APQ est orthogonal au cercle décrit sur BC comme diamètre. Tous ces cercles APQ forment un faisceau linéaire tangent en A au rayon IA de ce dernier cercle (I, milieu de BC). Or le rayon IA est le diamètre conjugué de BC dans la conique C. Il passe donc au centre O de cette conique et est aussi un rayon du cercle orthoptique. Tous les cercles APQ sont donc aussi orthogonaux au cercle orthoptique en A. C'est le théorème de Faure.

Bonnes solutions géométriques par MM. R. Doyrot, élève à l'école normale supérieure, et L. Rées, conducteur des ponts et chaussées à Bernelle (Algérie).

Bonne solution analytique par M. J. Soubeyrand, à Mont-de-Marsan.

PHYSIQUE

1973. — *Deux barreaux aimantés B_1 et B_2, pris parallèlement et suspendus horizontalement à un fil sans torsion, forment un système oscillant sous l'action de la terre avec une durée d'oscillation de 3 secondes. On retourne l'un d'eux bout pour bout ; la durée d'une petite oscillation devient 5 secondes. Enfin on les croise à angle droit ; quelle est la nouvelle durée d'oscillation du système ?*

Dans chaque cas, le moment magnétique de l'aimant résultant, équivalent au système des deux barreaux B_1 et B_2, s'obtient en composant les moments de B_1 et de B_2 alignés suivant leurs axes respectifs. Soient M_1 et M_2 ces moments, I le moment d'inertie du système, qui est le même dans les trois expériences, et H la composante horizontale du champ terrestre.

Les trois expériences donnent respectivement

$$3 = \pi\sqrt{\frac{I}{(M_1 + M_2)H}}, \qquad 5 = \pi\sqrt{\frac{I}{(M_1 - M_2)H}}, \qquad x = \pi\sqrt{\frac{I}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}\,H}}.$$

Des deux premières équations, on tire

$$M_1 + M_2 = \frac{I}{9}\,\frac{\pi^2}{H} \qquad \text{et} \qquad M_1 - M_2 = \frac{I}{25}\,\frac{\pi^2}{H}$$

d'où

$$\sqrt{M_1^2 + M_2^2} = \frac{\pi^2}{H}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{81} + \frac{1}{625}\right)}.$$

En portant cette valeur dans l'expression de x, on trouve

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{81} + \frac{1}{625}\right)}.$$

et

$$x = 2{,}46.$$

F. BOURCIER, à Saint-Dié.

Bonne solution de M. P. Vergnes.

QUESTIONS PROPOSÉES

2023. — On considère deux séries (u) et (v) dont les termes généraux u_n et v_n sont définis par les équations

$$u_n = au_{n-1} + bv_{n-1},$$
$$v_n = \alpha u_{n-1} + \beta v_{n-1},$$

dans lesquelles a, b, α, β sont des constantes connues.

Calculer l'expression des termes généraux u_n et v_n en fonction de u_0 et v_0.

R. Hoverc, élève à l'École nationale supérieure des Mines.

2024. — On considère les parallélogrammes ABCD circonscrits à une ellipse et dont les côtés sont parallèles à deux diamètres conjugués.

Soit F l'un des foyers de l'ellipse.

1° Le lieu de l'orthocentre des triangles FAB, FBC, FCD, FDA est une sextique. Le construire.

2° Le lieu du centre des cercles circonscrits aux FDA triangles est une sextique. Le construire.

3° On a

$$FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2 = \text{constante}.$$

E. N. Barisien.

2025. — Soit $y = f(x)$ l'équation d'une courbe rapportée à deux axes rectangulaires, on considère un point $M(x, y)$ de cette courbe, dont on désigne l'ordonnée par PM, et on porte sur PM un vecteur PM′, tel que $PM.PM' = a^2$, a étant une constante. Quand le point M décrit la courbe (C) envisagée, le point M′ décrit une courbe (C′).

1° Déterminer la courbe (C) de façon que les tangentes aux courbes (C) et (C′) aux deux points M et M′, forment avec l'ordonnée MM′ un triangle MM′T d'aire constante, k^2.

2° Déterminer la courbe (C) de façon que ce triangle MM′T ait pour expression générale de son aire la fonction

$$\frac{\dfrac{dy}{dx}}{2(a^2 + y^2)}.$$

H. Cousin, à Limoges.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

22e Année. Juin 1912. N° 9.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

EXEMPLE DE DÉTERMINATION SIMULTANÉE DE DEUX COURBES PAR DEUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par M. G. Fontené.

I. Considérons en coordonnées polaires deux courbes (c) et (γ) dont les points se correspondent un à un, pour chaque valeur de θ, de manière que la sous-normale de chacune d'elles soit égale en valeur absolue au rayon vecteur de l'autre ; on devra avoir

$$(1)\quad r' = \rho, \qquad (2)\quad \rho' = \pm r,$$

le double signe pouvant être écarté pour la première égalité (1).

Les deux fonctions r et ρ de la variable θ sont déterminées par un système de deux équations différentielles ; l'élimination de ρ donne le système équivalent

$$(1)\quad r' = \rho, \qquad (3)\quad r'' = \pm r.$$

On aura donc $r = \rho$, $\rho = -r$, en prenant

$$(4)\quad \begin{cases} r = A\cos\theta + B\sin\theta, \\ \rho = -A\sin\theta + B\cos\theta, \end{cases}$$

ce qui donne deux cercles égaux se coupant à angle droit, puisque l'on passe de la première équation à la seconde en remplaçant θ par $\theta + \frac{\pi}{2}$; et l'on aura $r' = \rho$, $\rho' = r$, en prenant

$$(5)\quad \begin{cases} r = A\,\mathrm{ch}\,\theta + B\,\mathrm{sh}\,\theta, \\ \rho = A\,\mathrm{sh}\,\theta + B\,\mathrm{ch}\,\theta. \end{cases}$$

II. Les égalités (1) et (2) donnent

$$(6)\quad \frac{r}{r'} - \frac{\rho}{\rho} = \pm 1,$$

ce qui exprime que les angles V relatifs aux deux courbes, pour une même valeur de θ, ont leur différence ou leur somme égale à $\frac{\pi}{2}$; dans le premier cas, les tangentes en deux points correspondants sont rectangulaires. Si l'on demande simplement un système de deux courbes jouissant de cette propriété, les deux fonctions r et ρ de la variable θ sont liées par la seule relation (6), l'une de ces fonctions est arbitraire, et les équations différentielles des deux courbes sont

$$\frac{r'}{r} = f(\theta), \qquad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{-1}{f(\theta)},$$

la fonction f étant quelconque ; on a donc

$$r = e^{\int f(\theta)d\theta}, \qquad \rho = e^{\int \frac{-d\theta}{f(\theta)}}.$$

(1) Cette question m'a été indiquée autrefois par M. Maluski.

Si l'on écrit alors $r' = \rho$, ce qui forme avec la relation (6) un système équivalent au système des relations (1) et (2), on a

$$(7) \qquad f(\theta) = e^{\int f(\theta)d\theta} = e^{\int \frac{d\theta}{f(\theta)}}.$$

et cette relation détermine la fonction $f(\theta)$. On écrit

$$e^{\int \left(f \pm \frac{1}{f}\right)d\theta} = \frac{1}{f},$$

ou, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres et en multipliant par f,

$$f^2 \pm 1 = f'.$$

Selon que l'on prend le signe supérieur ou le signe inférieur, on a donc

$$f(\theta) = \operatorname{tg}(\theta - \theta_0), \qquad \text{ou} \qquad f(\theta) = \operatorname{th}(\theta - \theta_0).$$

Il faut d'ailleurs se souvenir que l'on a différentié la relation (7) après l'avoir transformée ; il faut donc revenir à cette relation : les constantes des deux intégrales qui y entrent, et que la dérivation effectuée a fait disparaître, ne sont pas indépendantes, et l'une de ces intégrales fait connaître l'autre ; on a dans un cas

$$e^{\int \operatorname{tg}(\theta - \theta_0)d\theta} = e^{\log(\cos(\theta - \theta_0)) + C} = M\cos(\theta - \theta_0),$$

et il faut prendre

$$e^{\int \cot(\theta - \theta_0)d\theta} = M\sin(\theta - \theta_0).$$

on a dans l'autre cas

$$e^{\int \operatorname{th}(\theta - \theta_0)d\theta} = e^{\log(M\operatorname{ch}(\theta - \theta_0))} = M\operatorname{ch}(\theta - \theta_0),$$

et il faut prendre

$$e^{\int \coth(\theta - \theta_0)d\theta} = M\operatorname{sh}(\theta - \theta_0);$$

on obtient ainsi $\qquad (4') \qquad r = M\cos(\theta - \theta_0), \qquad \rho = M\sin(\theta - \theta_0),$

ou $\qquad (5') \qquad r = M\operatorname{ch}(\theta - \theta_0), \qquad \rho = M\operatorname{sh}(\theta - \theta_0),$

et ces formules sont équivalentes aux formules (4) et (5).

III. Les égalités (1) et (2) donnent encore

$$(8) \qquad r = e^{\int \log(\rho)d\theta}, \qquad \text{ou} \qquad \rho = e^{\int \log(r)d\theta}.$$

Les équations de deux courbes qui ont simplement cette propriété sont faciles à former ; on écrit

$$\rho = \rho(\theta) = \rho(\theta - \theta_1) = \rho(\theta - \theta_2)$$

on pose

$$\frac{r_1 + \rho}{r_1 - \rho} = \varphi(\theta), \qquad \frac{r_2 - \rho}{r_2 + \rho} = \frac{1}{\varphi(\theta)},$$

et l'on a

$$r_1 + \rho = e^{\int \varphi(\theta)d\theta}, \qquad r_2 - \rho = e^{\int \frac{-d\theta}{\varphi(\theta)}}.$$

d'où

$$2r_1 = e^{\int \varphi(\theta)d\theta} + e^{\int \frac{-d\theta}{\varphi(\theta)}}, \qquad 2\rho = e^{\int \varphi(\theta)d\theta} - e^{\int \frac{-d\theta}{\varphi(\theta)}}.$$

Si l'on écrit alors $r' = \rho$, ce qui forme avec la relation (8) un système équivalent au système des relations (1) et (2), on a, avec une écriture abréviée,

$$r_1 - \frac{1}{r_2} = r_1 - r_2, \qquad \text{ou} \qquad r_1 - 1\left[r_2 + \frac{1}{r_2}\right] = 0.$$

c'est-à-dire

$$(9) \qquad \varphi(\theta) - 1\left[e^{\int \varphi(\theta)d\theta} + \frac{1}{\varphi(\theta)}e^{\int \frac{-d\theta}{\varphi(\theta)}}\right] = 0.$$

1° Si l'on prend $\varphi(\theta) = 1$, on a donc

$$(5') \quad r = Pe^{\theta} + Qe^{-\theta}, \qquad \varphi' = Pe^{\theta} - Qe^{-\theta},$$

et ces formules sont équivalentes aux formules (5) ; on a alors $\varphi' = r$ (signes inférieurs).

2° Si l'on annule le second facteur dans la relation (9), on a

$$e^{\int \left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right) d\theta} = \frac{-1}{\varphi},$$

ou, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres et en multipliant par φ,

$$\varphi^2 + 1 = \varphi\varphi';$$

on a donc

$$\varphi(\theta) = \operatorname{tg}(\beta - \theta).$$

On a alors

$$e^{\int \operatorname{tg}(\beta - \theta) d\theta} = e^{\log[M\cos(\beta - \theta)]} = M\cos(\beta - \theta),$$

et la relation (9) donne pour l'autre intégrale

$$e^{\int -\cot(\beta - \theta) d\theta} = -M\sin(\beta - \theta).$$

(Les relations (7) et (9) ont donné par dérivation les relations

$$f^2 + 1 = -f', \qquad \varphi^2 + 1 = -\varphi',$$

de sorte que les fonctions f et φ sont identiques ; mais, quand on revient aux relations elles-mêmes pour tirer les constantes des deux intégrales qui y entrent, la différence des deux relations amène naturellement des résultats différents.)

On a ainsi

$$r + \varphi = M\cos(\beta - \theta), \qquad r - \varphi = -M\sin(\beta - \theta)$$

ou

$$(4') \quad \begin{cases} r = \dfrac{M}{2}\cos(\beta - \theta) - \sin(\beta - \theta), \\ \varphi = \dfrac{M}{2}\cos(\beta - \theta) + \sin(\beta - \theta). \end{cases}$$

et ces formules sont équivalentes aux formules (4), on a ici $\varphi' = -r$.

Remarque. — En écrivant $r^2 + r'^2 = \varphi^2 + \varphi'^2$, $\varphi' = 1$,

on mêle deux problèmes que la décomposition de la relation (9) sépare ensuite : les deux facteurs de cette décomposition ont d'ailleurs des formes très différentes.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Concours de 1911 (*Suite*).

Groupe II

1963. — 1° *Un cadre rectangulaire, analogue à celui d'un galvanomètre, [illegible] 500 tours de fil de cuivre d'un dixième de millimètre de diamètre. Il a [illegible] centimètres sur [illegible] centimètres. Il est placé dans un champ magnétique uniforme, de 500 gauss, dont la direction est parallèle à l'un des côtés. Calculer l'action à laquelle ce cadre est soumis, quand on le ferme sur une pile de résistance négligeable, dont la force électromotrice est de 2 volts.*

On rappelle qu'un fil de cuivre de 1 millimètre de diamètre a une résistance de [illegible] ohms par kilomètre.

2° *Ce cadre, placé horizontalement, est rendu solidaire du plan d'une balance dont les bras de levier ont 10 centimètres. Le champ magnétique précédent est aussi horizontal et est perpendiculaire à l'axe du*

couteau de la balance. L'équilibre étant obtenu, en l'absence du courant, par des poids placés dans l'un des plateaux, de combien faut-il modifier ces poids pour maintenir l'équilibre quand on établit la connexion entre le cadre et la pile ?

Intensité de la pesanteur : 980.

1. On peut calculer l'action en assimilant le courant à un feuillet magnétique. On sait que l'action se réduit à un couple qui, si on évalue l'intensité I du courant en ampères, a pour moment

$$C = \frac{1}{10} SIH \sin \alpha,$$

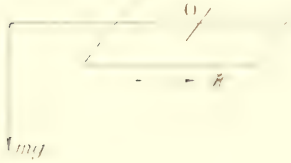
ce qui donne ici $C = \frac{1}{10} \times 500 \times 24 \times 1 \times 500$.

On peut aussi appliquer la loi élémentaire de Laplace. Chacun des côtés AB et CD, perpendiculaire au champ et de longueur l, est soumis à une force

$$\frac{1}{10} IH \times 500.$$

Ces deux forces constituent un couple dont le bras de levier est l' et le moment $\frac{1}{10} IH \times 500 \times l'$, résultat identique au précédent.

Reste à calculer I. Or $I = \frac{2}{R}$. Le fil a une longueur de $20 \times 500 = 10000$ centimètres ou $0^{km},1$. S'il avait un diamètre de 1^{mm}, sa résistance serait 2^{ω} ; son diamètre étant $0^{mm},1$ sa résistance est 100 fois plus grande ou 200. Donc $I = \frac{1}{100}$. Remplaçons :



$$C = \frac{1}{10} \times 500 \times 24 \times \frac{1}{100} \times 500 = 6000 \text{ dyne} \times \text{centimètre}.$$

2. Le couple, identique à celui qu'on vient de calculer, doit être équilibré par un poids mg dont le moment, par rapport à l'axe de suspension du fléau, est $mg \times 10$ donc

$$mg \times 10 = 6000.$$

D'où

$$m = \frac{600}{980} = 0^{g},612.$$

Groupes I et II

1964. — *On considère un point matériel* M, *de masse* m, *sur lequel un centre fixe* S *exerce une attraction* F *inversement proportionnelle au carré de la distance* $r = SM$ $\left(F = -\frac{km}{r^2}\right)$.

1° *Indiquer à quelles conditions doit satisfaire la vitesse initiale pour que la trajectoire de* M *soit une circonférence* C, *on calculera la durée* T *d'une révolution complète en fonction de la constante* k *et du rayon* R *de la circonférence* C.

2° *Un autre point matériel* M', *de masse* m', *décrit sous l'action du même centre de forces* S $\left(\text{la force étant } F = -\frac{km}{r^2} \text{ avec } r = SM'\right)$ *une parabole* P *de paramètre* p. *Calculer le temps employé par* M' *pour décrire un arc* AB *de la parabole ; on se donnera les angles* α *et* β *de* SA *et* SB *avec l'axe* Sx *de la parabole.*

3° *La parabole* P *et la circonférence* C *étant supposées dans un même plan, à quelle condition se coupent-elles en deux points* A *et* B *? Cette condition étant remplie, calculer le temps* T′ *pendant lequel le point* M′ *reste à l'intérieur de* C, *et étudier la variation du rapport* $\frac{T'}{T}$ *quand le paramètre* p *varie.*

4° *L'orbite de la terre étant supposée circulaire, calculer le nombre maximum de jours durant lesquels une comète, décrivant une orbite parabolique dans le plan de l'orbite terrestre, peut rester à l'intérieur de l'orbite terrestre.*

Le théorème de la force vive donne

$$\frac{dmv^2}{2} = -\frac{mk}{r^2}\,dr, \qquad dv^2 = -\frac{2k}{r^2}\,dr,$$

et, en intégrant, on a

$$v^2 = \frac{2k}{r} + h, \qquad \left(h = v_0^2 - \frac{2k}{r_0}\right).$$

D'autre part, on sait que $v^2 = C^2\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right]$, C désignant la constante des aires : il en résulte que l'équation différentielle de la trajectoire est

$$C^2\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] = \frac{2k}{r} + h,$$

ou

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = -\frac{1}{r^2} + \frac{2k}{C^2 r} + \frac{h}{C^2} = -\left(\frac{1}{r} - \frac{k}{C^2}\right)^2 + \frac{k^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}.$$

On en déduit

$$d\theta = \pm\frac{d\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{k^2}{C^4} + \frac{h}{C^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{k}{C^2}\right)^2}}.$$

et

$$\theta - \theta_0 = \pm \arccos\frac{\frac{1}{r} - \frac{k}{C^2}}{\sqrt{\frac{k^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}}$$

ou

$$\frac{1}{r} - \frac{k}{C^2} = \cos(\theta - \theta_0)\sqrt{\frac{k^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}.$$

ou encore, en prenant pour axe polaire la droite $\theta = \theta_0$,

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{C^2} + \cos\theta\sqrt{\frac{k^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}.$$

On reconnaît l'équation d'une conique ayant pour foyer le pôle et pour axe focal l'axe polaire.

Si on désigne par p et e le paramètre et l'excentricité de cette conique, on a

$$\frac{1}{p} = \frac{k}{C^2}, \qquad \frac{e}{p} = \sqrt{\frac{k^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}$$

d'où

$$p = \frac{C^2}{k}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{hC^2}{k^2}}.$$

La nature de cette conique dépend du signe de h, ou de $v^2 - \frac{2k}{r}$.

1° Si $v_0^2 - \frac{2k}{r_0} < 0$, e est plus petit que 1 : la trajectoire est une ellipse.

2° Si $v_0^2 - \frac{2k}{r_0} > 0$, c'est une hyperbole.

3° Si $v_0^2 - \frac{2k}{r_0} = 0$, c'est une parabole.

4. Pour que la trajectoire soit une circonférence, il faut que l'excentricité soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait $1 + \frac{hC^2}{k^2} = 0$, ou $h = -\frac{k^2}{C^2}$, ou encore

$$v_0^2 - \frac{2k}{r_0} = -\frac{k^2}{C^2}.$$

Or on sait que la constante des aires, C, est égale à $r_0 v_0 \sin\alpha$, α désignant l'angle du rayon vecteur initial et de la vitesse initiale.

On doit donc avoir
$$v_0^2 - \frac{2k}{r_0} = -\frac{k^2}{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha},$$
ou
$$v_0^2 - \frac{2kv_0}{r_0} + \frac{k^2}{v_0^2 \sin^2\alpha} = 0,$$
ou
$$\left(v_0 - \frac{k}{r_0}\right)^2 + \frac{k^2 \cos^2\alpha}{v_0^2 \sin^2\alpha} = 0.$$

Pour que cette égalité soit vérifiée, il faut qu'on ait
$$v_0 = \frac{k}{r_0}, \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

On en conclut que pour que la trajectoire soit un cercle, il faut et il suffit que la vitesse initiale v_0 soit perpendiculaire au rayon vecteur initial, et que l'on ait $v_0^2 = \frac{k}{r_0}$.

Si on désigne par R le rayon du cercle, on a $v_0 = \sqrt{\frac{k}{R}}$, et la constante des aires C est égale à $R\sqrt{\frac{k}{R}} = \sqrt{kR}$.

La vitesse angulaire est constante et égale à $\frac{v_0}{R} = \sqrt{\frac{k}{R^3}}$. Comme dans le temps T le rayon vecteur balaie une aire égale à πR^2, on a
$$\frac{C}{2} \cdot \frac{2\pi R^2}{T} = \pi R^2, \quad \text{ou} \quad T = \frac{2\pi R^2}{C},$$
et en remplaçant C par sa valeur $\sqrt{kR}$,
$$T = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{k}}.$$

2. Le mouvement est parabolique si $v_0^2 - \frac{2k}{r_0} = 0$. L'équation de la parabole est alors
$$r = \frac{p}{1 - \cos\theta}, \qquad \text{et l'on a} \qquad p = \frac{C^2}{k}, \qquad \text{ou} \qquad C = \sqrt{pk}.$$

On en déduit
$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C = \sqrt{pk},$$
et en remplaçant r par sa valeur en fonction de θ,
$$\frac{p^2}{(1 + \cos\theta)^2} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{pk},$$
$$dt = p\sqrt{\frac{p}{k}} \cdot \frac{d\theta}{(1 + \cos\theta)^2}.$$

Le temps demandé est alors

$$t_1 = p\sqrt{\frac{p}{k}}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2}.$$

On peut écrire

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{1}{4}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{d\theta}{\cos^4\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)d\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

et

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}\right).$$

L'intégrale définie est alors

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\right].$$

et l'on a

$$(1)\qquad t_1 = \frac{1}{2}p\sqrt{\frac{p}{k}}\left[\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\right].$$

3. Pour que la parabole rencontre le cercle, il faut qu'il existe des valeurs de θ telles que l'on ait $\frac{p}{1+\cos\theta} = R$, ou $\cos\theta = \frac{p-R}{R}$. Pour que cette équation ait des racines, il faut que $\left(\frac{p-R}{R}\right)^2$ soit inférieur à 1, c'est-à-dire que p soit plus petit que $2R$.

On aura alors deux points d'intersection symétriques par rapport à l'axe de la parabole. Comme $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$, on a ici $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{2R-p}{p}}$.

Remplaçons dans la formule (1) $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ par $+\sqrt{\frac{2R-p}{p}}$ et $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ par $-\sqrt{\frac{2R-p}{p}}$, t_1 prend la valeur T'. Nous trouvons ainsi

$$T' = \frac{2}{3\sqrt{k}}(p+R)\sqrt{2R-p}.$$

Nous en déduisons

$$\frac{T'}{T} = \frac{(p-R)\sqrt{2R-p}}{3\pi R\sqrt{R}}.$$

On voit aisément que la dérivée de $\frac{T'}{T}$ par rapport à p s'annule pour $p = R$, qu'elle est positive pour $p < R$ et négative pour $p > R$.

Par suite quand p croît de 0 à R, $\frac{T'}{T}$ croît de $\frac{\sqrt{2}}{3\pi}$ à $\frac{2}{3\pi}$, et quand p croît de R à 2R, $\frac{T'}{T}$ décroît de $\frac{2}{3\pi}$ à zéro; $\frac{T'}{T}$ a donc la valeur maximum, $\frac{2}{3\pi}$ pour $p = R$.

4. Le nombre maximum de jours est $\frac{24}{3\pi}$, où T a la valeur 365,25. On trouve ainsi 77 jours $\frac{1}{2}$.

J. SOUBADZNE à Saint-de-Marsan.

Bonnes solutions par MM. André Courtier, à Sedan; G. Lazar, à Bordeaux; A. Bourgeat, à Fourmies (Nord).

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Concours de 1911.

Mathématiques spéciales.

1968. — *On considère dans un plan la parabole* (P) *et la droite* (D) *dont les équations sont, en coordonnées rectangulaires* $y^2 - 2px = 0$, $y - a = 0$.

1° *Une droite variable* (Δ), *issue de l'origine* O, *rencontre* (P) *en un point* A *et* (D) *en un point* B; *trouver le lieu* (C) *des points* M *et* M′ *symétriques par rapport à l'origine et conjugués harmoniques par rapport à* A *et* B, M *étant supposé constamment entre* A *et* B.

Les tangentes en M *et* M′ *à* (C) *rencontrent respectivement en* I *et* I′ *la tangente en* A *à* (P); *construire le lieu* (Γ) *des points* I *et* I′ *et distinguer sur ce lieu les arcs qui correspondent à* I *des arcs qui correspondent à* I′.

Construire les tangentes en M *à* (C) *et en* I *à* (Γ).

2° *D'un point* I *de* (Γ) *on peut mener à* (C) *trois tangentes, chacune d'elles rencontrant* (C) *en un point autre que le point de contact; montrer que les tangentes à* (C) *aux trois points ainsi définis concourent en un point* J *dont on exprimera les coordonnées en fonctions de celles de* I; *reconnaître si les tangentes menées de* I *ou de* J *à* (C) *sont réelles.*

Du point I *on mène à* (P) *une tangente autre que* IA; *soit* T *son point de contact; du point* I *on mène à* (C) *deux tangentes autres que* IM; *soient* T_1 *et* T_2 *les points, autres que les points de contact, où elles rencontrent* (C); *trouver le lieu du centre de gravité du triangle* TT_1T_2.

3° *Par l'origine, on mène deux droites également inclinées sur les axes et rencontrant une tangente en un point* M *de* (C) *en des points* Q *et* Q′; *l'axe* Oy *rencontre cette même tangente en* R; *trouver le lieu des points* Q *et* Q′ *tels que la somme des inverses des longueurs* OQ, OQ′ *soit égale à l'inverse de la longueur* OR.

Ce lieu comprend une partie d'une branche d'une courbe algébrique; trouver l'aire comprise entre cette branche et son asymptote.

Nous prenons sur les axes des sens tels que p et a soient positifs.

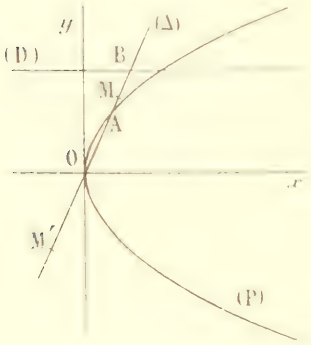


Fig. 1.

1. En coordonnées polaires, les équations de (P) et de (D) sont respectivement $\rho = \frac{2p\cos\omega}{\sin^2\omega}$ et $\rho = \frac{a}{\sin\omega}$. Par suite, comme $\overline{OM} = -\overline{OM'} = -\sqrt{\overline{OA}.\overline{OB}}$, l'équation polaire du lieu de M, M′ est

$$\rho = \frac{2ap\cos\omega}{\sin^2\omega}.$$

Cette équation s'écrit encore $\rho^2\sin^2\omega = 2ap\operatorname{cotg}\omega$; l'équation cartésienne de la courbe (C) est par suite $y^2 = 2ap\frac{x}{y}$ ou $y^3 - 2apx = 0$.

La courbe (C) est une cubique symétrique par rapport à l'origine: elle affecte la forme ci-après; elle est parabolique dans la direction Ox: l'origine est un point d'inflexion dont la tangente est Oy. Le point M décrit la branche OL et M′ la branche OL′.

On peut exprimer les coordonnées des points A, M et M′ en fonction rationnelle d'un même paramètre; il suffit de poser $\operatorname{tg}(Ox, O\Delta) = \frac{1}{t^2}$ ou $x = t^2y$. Les coordonnées de ces points sont

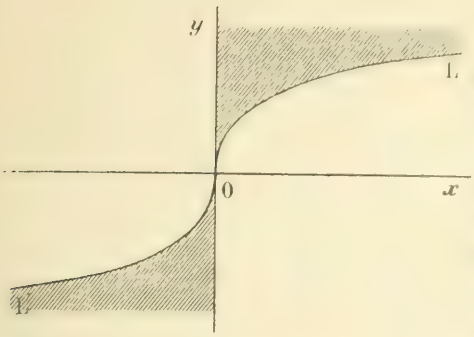


Fig. 2.

$$A \begin{cases} x = 2pt^2, \\ y = 2pt^2; \end{cases} \qquad M \begin{cases} x = bt, \\ y = bt; \end{cases} \qquad M' \begin{cases} x = -bt, \\ y = -bt; \end{cases}$$

avec $b = +\sqrt{2ap}$. On voit que les points M et M' correspondent à des valeurs opposées de t.

Il est très facile maintenant d'écrire les équations des tangentes à (P) et (C) en A, M et M'. Les deux premières sont respectivement

$$(1) \qquad x - 2t^2y + 2pt^4 = 0, \qquad \text{et} \qquad x - 3ty + 2bt^3 = 0.$$

On voit que la cubique (C) est de troisième classe. Résolvons les équations précédentes ; il vient pour les coordonnées du point I

$$(2) \qquad x = -2t^3(3pt - 2b), \qquad y = -2t(pt - b).$$

Les coordonnées du point I' s'en déduiraient évidemment en changeant t en $-t$; par suite, les équations précédentes constituent une représentation paramétrique de la quartique (I), lieu de I et I'. On reconnaît sans peine que cette courbe est parabolique dans la direction Ox.

D'ailleurs $\dfrac{dx}{dt} = -12t^2(2pt - b)$, $\qquad \dfrac{dy}{dt} = -2(2pt - b)$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{6t^2}$.

On voit que le point $t = \dfrac{b}{2p}$ est un rebroussement de première espèce. Faisons varier t de $-\infty$ à $+\infty$; nous aurons le tableau et la courbe suivants :

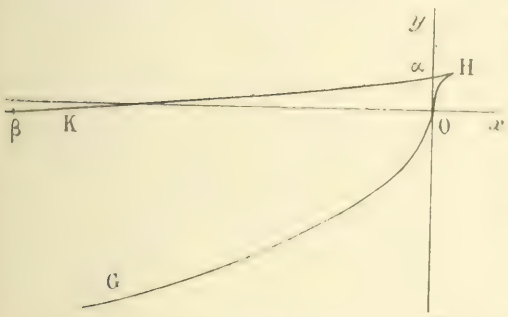


Fig. 3.

t	$-\infty$		0		$\frac{b}{2p}$		$\frac{2b}{3p}$		$\frac{b}{p}$		$+\infty$
$\frac{dx}{dt}$			0	$+$	0			$-$			
x	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{b^3}{8p^2}$	↘	0	↘	$\frac{-2b}{p^2}$	↘	$-\infty$
$\frac{dy}{dt}$					0			$-$			
y	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{bt}{2p}$	↘	$\frac{4b}{9p}$	↘	0	↘	$-\infty$
$\frac{dy}{dx}$	0	↗	∞	↘		↘		↘		↘	0

Ceci nous permet de tracer la quartique GOHK. L'origine est un point d'inflexion dont la tangente est Oy. Enfin, le point I décrit la branche $(0, \infty)$ c'est-à-dire l'arc OHK ; le point I' décrit l'arc OG.

On remarquera que le rebroussement $H\left(\dfrac{a^2}{2p}, a\right)$ n'est autre que le point commun aux courbes (P), (D) et (C).

On pourrait obtenir l'équation cartésienne de (I) en éliminant t entre les équations (1). En éliminant ces équations membre à membre, il vient, après division par t^2, $2pt^2 - 2bt + y = 0$, ou $t^2 = \dfrac{2bt - y}{2p}$. La seconde équation s'écrit alors

$$x - 3y\frac{2bt - y}{2p} + 2bt\frac{2bt - y}{2p} = 0, \qquad \text{ou} \qquad 4bt^2 - 8byt + 2px - 3y^2 = 0.$$

On obtient ainsi deux équations du second degré en t. L'élimination est immédiate :

$$9p^2y^2 - 4py^2(3px - 6b^2) - 4p^2x(p^2x - 6b^2y) + 8b^2px = 0.$$

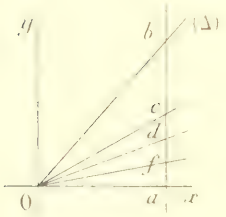


Fig.

Enfin, en appelant m la pente de (Δ), celle de (P) en A est $\frac{m}{2}$, celle de (C) en M est $\frac{m}{3}$ et celle de (Γ) en I est $\frac{m}{6}$. Soit une parallèle à Oy coupant Ox en a, (Δ) en b; prenons les points c, d, f, tels que $\frac{\overline{ac}}{\overline{ab}} = \frac{1}{2}$, $\frac{\overline{ad}}{\overline{ab}} = \frac{1}{3}$, $\frac{\overline{af}}{\overline{ab}} = \frac{1}{6}$. Les tangentes en A, M et I sont respectivement parallèles à Oc, Od et Of.

2. Une droite quelconque $lx + my + n = 0$ coupe la cubique (C) en trois points dont les t sont racines de l'équation $lbt^3 + mbt + n = 0$. Il existe entre eux la relation

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0.$$

En particulier, la tangente à (C) au point t coupe la courbe en un second point τ tel que

$$2t + \tau = 0.$$

Enfin, cherchons la relation qui existe entre les paramètres des trois points de contact des tangentes à (C) issues d'un point quelconque $I(x_0, y_0)$ du plan. En écrivant que la tangente en t passe par I, on a l'équation aux t des points de contact, $x_0 - 3t^2y_0 + 2bt^3 = 0$. Donc

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = 0.$$

Chacune des trois tangentes coupe la courbe en un point τ tel que, d'après ce qui précède, $t_i = \frac{\tau_i}{2}$. En portant ces valeurs dans la relation précédente, il vient

$$\tau_1\tau_2 + \tau_2\tau_3 + \tau_3\tau_1 = 0$$

ce qui prouve que les tangentes en ces points τ concourent en un point J. Pour calculer les coordonnées x_1, y_1 de ce point, nous chercherons l'équation en τ; il suffit de faire $t = \frac{\tau}{2}$ dans l'équation aux t, ce qui donne $-4\tau_1 x_0 - 3\tau_1^2 y_0 + 16b\tau_1^3 = 0$. Cette équation doit être identique à

$$\tau_1 - 3y_0\tau_1^2 + 2b\tau_1^3 = 0$$

par suite $\frac{1}{-4x_0} = \frac{-3y_0}{-y_0} = \frac{2b}{b}$ d'où $x_0 = 8x_1$, $y_0 = 2y_1$.

On peut ajouter qu'à chaque tangente réelle issue de I correspond une tangente réelle issue de J, cela d'après la relation $t = \frac{-\tau}{2}$ il y a d'autres réciproques.

Il est bon de remarquer que nous avons supposé le point I absolument quelconque et non situé sur la courbe (Γ) comme l'indique l'énoncé : la méthode employée généralise donc la question et cela presque sans calcul.

Si nous supposons I sur la courbe (Γ), par exemple que I soit le point θ de cette courbe, l'équation aux t des points de contact s'écrit

$$bt^3 + 3(pb - 6\theta^2)t - 6\theta(3p\theta - 2b) = 0.$$

Elle doit admettre la racine $t = \theta$ qui donne le point M correspondant à I; après division par $t - \theta$, il reste l'équation

$$bt^2 + \theta(3p\theta - 2b)t + \theta(3p\theta - 2b) = 0.$$

dont le discriminant est $\theta^2(3p\theta - 2b)(p\theta - 2b)$. Si θ est extérieur à l'intervalle $\left(\frac{2b}{3p}, \frac{2b}{p}\right)$ l'équation précédente a ses racines réelles ; elles sont imaginaires dans le cas contraire. Prenons sur (Γ) les points α et β qui correspondent à $\theta = \frac{2b}{3p}$ et $\theta = \frac{2b}{p}$; le premier est sur Oy, le second est

sur l'arc HK, au-dessous de Ox. On peut dire que si I est sur l'arc $\alpha\beta$, une seule des tangentes issues de I (ou de J) est réelle ; au contraire si I n'est pas sur cet arc, les trois tangentes sont réelles.

On peut constater que le point β est sur la cubique (C), ce qu'il est aisé d'expliquer.

Recherchons en effet dans quels cas les trois tangentes à (C) issues du point quelconque $I(x_0, y_0)$ sont réelles. L'équation en t, ou l'équation aux inverses $x_0t^3 - 3y_0t + 2b = 0$, doit avoir toutes ses racines réelles : ceci exige que $x_0(y_0^3 - b^2x_0) > 0$. La courbe séparatrice se compose de l'axe Oy (qui passe par α) et de la courbe (C) (qui passe par β) ; nous avons recouvert de hachures (fig. 2) la région qui doit contenir le point I.

Ecrivons que la tangente en t à (P) passe par le point I de paramètre θ de la courbe (Γ) ; il vient l'équation

$$pt^3 + 2\theta(p\theta - b)t^2 - \theta(3p\theta - 2b) = 0,$$

qui admet la racine $t^2 = \theta^2$, correspondant au point M ; on en déduit le paramètre du point T, $t^2 = \dfrac{-\theta(3p\theta - 2b)}{p}$ et par suite les coordonnées de ce point, $x = \dfrac{2\theta^2(3p\theta - 2b)}{p}$, $y = -2\theta(3p\theta - 2b)$.

Nous avons vu que les paramètres des points de contact autres que M des tangentes à (C) issues de I sont donnés par l'équation (3) ; en remplaçant dans cette équation t par $\dfrac{-\tau}{2}$, on obtient l'équation qui donne les paramètres des points T_1 et T_2,

$$(4) \qquad b\tau^2 - 2\theta(3p\theta - 2b)\tau + 4\theta^2(3p\theta - 2b) = 0.$$

Appelons (X, Y) les coordonnées du centre de gravité G du triangle TT_1T_2 ; on a

$$3X = x + x_1 + x_2, \qquad 3Y = y + y_1 + y_2.$$

Mais $$x_1 + x_2 = b(\tau_1^2 + \tau_2^2) = b(\tau_1 + \tau_2)^2 - 3\tau_1\tau_2(\tau_1 + \tau_2) = \frac{8\theta^2(3p\theta - 2b)(3p\theta - 5b)}{b^2},$$

et aussi $$y_1 + y_2 = b(\tau_1 + \tau_2) = 2\theta(3p\theta - 2b).$$

Finalement, on trouve

$$X = \frac{2\theta^2(3p\theta - 2b)(12p^2\theta^2 - 20pb\theta + b^2)}{3pb^2}, \qquad Y = 0.$$

Le lieu du point G est l'axe Ox. Ce point est d'ailleurs en O pour les quatre valeurs de θ : 0, $\dfrac{2b}{3p}$ et $\dfrac{(5 \pm \sqrt{22})b}{6p}$.

3. En coordonnées polaires, la tangente à (C) en M a pour équation

$$\frac{1}{r} = \frac{3t^2 \sin\theta - \cos\theta}{2bt^2}.$$

Posons $(Ox, OQ) = -(Ox, OQ') = \varphi$, $\overline{OQ} = r$, $\overline{OQ'} = r'$, on a

$$\frac{1}{r} = \frac{3t^2 \sin\theta - \cos\theta}{2bt^2}, \qquad \frac{1}{r'} = \frac{-3t^2 \sin\theta - \cos\theta}{2bt^2}, \qquad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{-\cos\theta}{bt^2}.$$

D'ailleurs, $\dfrac{1}{\overline{OR}} = \dfrac{3}{2bt}$, donc $\dfrac{3}{2bt} = \dfrac{-\cos\theta}{bt^2}$, puis $\cos\theta = -\dfrac{3t}{2}$, $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{4 - 9t^2}}{3t}$.

L'ensemble des droites OQ, OQ' a donc pour équation

$$y^2 - \frac{4 - 9t^2}{9t^2}x^2 = 0, \quad \text{ou} \quad 9(x^2 + y^2) - 4x^2 = 0.$$

Il serait facile d'éliminer t entre cette équation et celle de la tangente en M. Nous ne ferons pas ce calcul, qui conduit à une équation du sixième degré en x et y ; nous préférons donner l'équation en coordonnées polaires, qui est plus facile à discuter, et qui permet en outre de traiter très facilement la dernière partie.

Entre les coordonnées polaires du point Q, nous avons les relations

$$\frac{1}{\rho} = \frac{3t^2 \sin\omega - \cos\omega}{2bt^3}, \qquad \cos\omega = \frac{-3t^2}{2}.$$

En éliminant t entre ces deux équations, nous obtenons successivement

$$\frac{1}{\rho} = \frac{6t^2 \sin\omega + 3t^2}{4bt^3} = 3\,\frac{1 + 2\sin\omega}{4bt}, \qquad t = \sqrt{\frac{-2\cos\omega}{3}};$$

puis

$$\rho = \frac{4b}{3}\,\frac{\sqrt{\dfrac{-2\cos\omega}{3}}}{1 + 2\sin\omega}.$$

Faisons tourner les axes de deux angles droits autour du point O, c'est-à-dire changeons ω en $\omega + \pi$, et posons $k = \frac{4b}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$, nous aurons finalement

$$(5) \qquad \rho = \frac{-k\sqrt{\cos\omega}}{1 - 2\sin\omega}.$$

Cette équation nous montre que la courbe est symétrique par rapport au pôle et qu'elle s'obtient tout entière en faisant varier ω de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$. Nous ne prendrons que la détermination de ρ qui correspond au signe $+$ et nous construirons ainsi une moitié de la courbe.

Pour $\omega = -\frac{\pi}{2}$, ρ est nul; la courbe part du point O tangentiellement à Oy, et, comme ρ est positif pour $\omega = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$, l'arc ainsi obtenu est dans le quatrième quadrant. Pour $\omega = 0$, $\rho = k$. Enfin, pour $\omega = \frac{\pi}{6} - \varepsilon$, ρ est égal à $+\infty$. Après, ρ devient égal à $-\infty$ et il reste négatif, puis redevient nul pour $\omega = \frac{\pi}{2}$. La dérivée de ρ, $\frac{d\rho}{d\omega}$ est

$$\frac{d\rho}{d\omega} = k\,\frac{1 - \sin\omega - 2\sin^2\omega}{2\sqrt{\cos\omega}\,(1 - 2\sin\omega)^2};$$

elle est toujours positive et ρ croît constamment.

Il nous reste à trouver l'asymptote. La distance à l'origine, comptée sur l'axe orienté dans le sens $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$, est donnée par la limite de

Fig. 3

$$\delta = \rho \sin\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{k}{2}\sqrt{\cos\omega}\,\frac{\sin\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\omega - \sin\frac{\pi}{6}},$$

$$\delta = -\frac{k}{2}\sqrt{\cos\omega}\,\frac{\cos\frac{1}{2}\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\frac{1}{2}\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right)};$$

pour $\omega = \frac{\pi}{6}$, cette quantité devient

$$d = -\frac{k}{2}\sqrt{\cos\frac{\pi}{6}}\,\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = -\frac{k}{2\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = -\frac{k}{\sqrt[4]{12}}.$$

L'équation de l'asymptote est donc

$$\rho \sin\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{k}{\sqrt[4]{12}} = 0.$$

Cherchons maintenant comment la courbe est placée par rapport à cette droite, c'est-à-dire étudions le signe de $\delta - d$ pour les valeurs de ω voisines de $\frac{\pi}{6}$. Nous avons

$$\delta - d = \frac{k}{\sqrt[4]{12}} - \frac{k}{2}\sqrt{\cos\omega}\,\frac{\cos\frac{1}{2}\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\frac{1}{2}\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right)},$$

ou

$$\delta - d = k\,\frac{2\cos\frac{1}{2}\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt[4]{12}\sqrt{\cos\omega}\cos\frac{1}{2}\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right)}{2\sqrt[4]{12}\cos\frac{1}{2}\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Cette quantité est du signe de son numérateur et il suffit de trouver la partie principale de ce numérateur pour $\omega = \frac{\pi}{6} + \alpha$. Nous avons ainsi

$$N = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right) - \sqrt[4]{12}\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$N = \sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} - \sqrt[4]{12}\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha},$$

$$N = \sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}.$$

Développons en série et prenons les premiers termes ; nous trouvons

$$N = \sqrt{3}\left(1 - \frac{\alpha^2}{8}\right) - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{48} - \left(1 - \frac{\alpha^2}{8}\right)\sqrt{3\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) - \alpha\sqrt{3}}$$

le radical s'écrit $\sqrt{3 - \alpha\sqrt{3} - \frac{3\alpha^2}{2}}$ ou $\sqrt{3}\left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{3}} - \frac{\alpha^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$;

il donne donc $\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}} + \frac{\alpha^2}{2}\right) \ldots$

et nous avons

$$N = \sqrt{3}\left(1 - \frac{\alpha^2}{8}\right) - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{48} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{8}\right)\left(2 - \frac{\alpha}{\sqrt{3}} - \frac{\alpha^2}{2} \ldots\right).$$

Le terme constant est nul, le terme en α est nul et le terme en α^2 est

$$-\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} + \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} + \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.$$

N est positif quand α est petit, la courbe est tout entière du même côté de l'asymptote et au-dessus. Elle est aisée maintenant à figurer.

La différentielle de l'aire balayée par le rayon vecteur et comprise entre la courbe et l'asymptote est

$$dA = \frac{k^2}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{d\omega}{\sin^2\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right)} - \frac{2\cos\omega\,d\omega}{1 - 2\sin\omega}\right]$$

L'intégration est immédiate et donne

$$A = \frac{k^2}{4}\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\cot\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{1 - 2\sin\omega}\right] + C.$$

Cette fonction présente les apparences de la discontinuité pour $\omega = \frac{\pi}{6}$: il faut donc intégrer de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{6} - \varepsilon$ et de $\frac{\pi}{6} + \varepsilon$ à $\frac{\pi}{2}$, puis prendre la limite de cette somme, si elle existe.

Or nous constatons en posant $\omega = \frac{\pi}{6} + \alpha$ et développant en série que cette fonction A reste continue pour $\alpha = 0$: par conséquent $\lim A\left(\frac{\pi}{6} - \varepsilon\right) = \lim A\left(\frac{\pi}{6} + \varepsilon\right)$ et l'aire demandée est

$$A\left(\frac{\pi}{2}\right) - A\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \frac{64\pi a}{81}.$$

J. SOUBAIGNE, à Mont-de-Marsan.

Très bonnes solutions analogues de MM. G. Leau à Rodez, P. A. Bousquet, à Tournon-en-Weppes.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1975. — *On considère une conique* T *tangente aux côtés d'un quadrilatère et un point* P.

Trouver le lieu des centres des coniques qui passent par le point P, *par deux des sommets opposés du quadrilatère et par les points de contact des tangentes issues du point* P *à* T, *lorsque la conique* T *varie.*

Il serait facile de traiter ce problème directement ; mais il me semble plus commode et plus élégant de lui faire subir d'abord une transformation homographique qui rejette les deux sommets opposés du quadrilatère aux deux points cycliques.

Les coniques T deviennent alors les coniques homofocales à une conique donnée. Les coniques passant par le point P, par les deux sommets du quadrilatère et par les points de rencontre de la polaire de P avec la conique T deviennent des cercles, et le problème se réduit à la recherche du lieu des pôles d'une droite donnée par rapport à ces cercles.

L'équation de l'une quelconque des coniques T est $\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} - 1 = 0$. La polaire du point P, de coordonnées α et β, est

$$\frac{\alpha x}{a^2+\lambda} + \frac{\beta y}{b^2+\lambda} - 1 = 0,$$

et le cercle envisagé a une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} - 1 - \mu\left(\frac{\alpha x}{a^2+\lambda} + \frac{\beta y}{b^2+\lambda} - 1\right)\left(\frac{\alpha x}{a^2+\lambda} - \frac{\beta y}{b^2+\lambda} + k\right) = 0,$$

où il faut déterminer μ et k de façon que cette équation représente un cercle qui passe au point (α, β).

La condition pour que l'équation représente un cercle est

$$\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{\alpha^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{\beta^2}{(b^2+\lambda)^2} = 0;$$

elle donne

$$\mu = \frac{\dfrac{\alpha^2}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}}{\dfrac{\alpha^2}{(a^2+\lambda)^2} - \dfrac{\beta^2}{(b^2+\lambda)^2}}.$$

La condition pour que le cercle passe au point (α, β) est

$$\mu\left(\frac{\alpha^2}{a^2+\lambda}+\frac{\beta^2}{b^2+\lambda}-1\right)=-1;$$

elle devient

$$\left(\frac{1}{b^2+\lambda}-\frac{1}{a^2+\lambda}\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2+\lambda}+\frac{\beta^2}{b^2+\lambda}-1\right)+\frac{\alpha^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{\beta^2}{(b^2+\lambda)^2}$$
$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}+\frac{k\,c^2}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}=0,$$

et donne

$$k=-\frac{\alpha^2+\beta^2}{c^2}.$$

Le cercle cherché a donc pour équation

$$\left[\frac{\alpha^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{\beta^2}{(b^2+\lambda)^2}\right]\left[\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}-1\right]$$
$$+\frac{c^2}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}\left(\frac{\alpha x}{a^2+\lambda}+\frac{\beta y}{b^2+\lambda}-1\right)\left(\frac{\alpha x}{a^2+\lambda}+\frac{\beta y}{b^2+\lambda}-\frac{\alpha^2+\beta^2}{c^2}\right)=0.$$

Cette équation s'écrit $A(x^2+y^2)-Bx-Cy+D=0$, avec

$$A=\frac{\alpha^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{\beta^2}{(b^2+\lambda)^2},$$

$$B=\frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2+c^2)}{a^2+\lambda},$$

$$C=\frac{\beta(\alpha^2+\beta^2-c^2)}{b^2+\lambda},$$

$$D=c^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2+\lambda}+\frac{\beta^2}{b^2+\lambda}\right).$$

La polaire d'un point (x, y) a pour équation

$$X(2Ax-B)+Y(2Ay-C)-Bx-Cy+2D=0,$$

et, en l'identifiant avec une droite fixe, $lx+my+n=0$, on a

$$2Ax-B=\theta l,\qquad 2Ay-C=\theta m,\qquad Bx+Cy-2D=-\theta n.$$

et il n'y a plus qu'à éliminer λ et θ entre ces trois équations ; ceci se fait facilement en remarquant qu'elles sont linéaires et homogènes par rapport aux inconnues $\frac{1}{a^2+\lambda}$, $\frac{1}{b^2+\lambda}$ et λ. On trouve ainsi

$$\begin{vmatrix} 2\alpha^2x-\alpha(\alpha^2+\beta^2+c^2) & 2\beta^2x & l \\ 2\alpha^2y & 2\beta^2y-\beta(\alpha^2+\beta^2-c^2) & m \\ \alpha(\alpha^2+\beta^2-c^2)-2\alpha^2x & \beta(\alpha^2+\beta^2-c^2)-2\beta^2y & -n \end{vmatrix}=0$$

Le lieu demandé est une conique.

Mais le calcul dont nous venons de reconnaître la simplicité se présente d'une manière plus aisée encore, si on remarque que l'équation du cercle est linéaire et homogène par rapport à $\frac{\alpha}{a^2+\lambda}$ et à $\frac{\beta}{b^2+\lambda}$: ce cercle décrit donc un faisceau linéaire, quand α varie, et, si nous posons $\alpha=\frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2-c^2)}{\alpha^2+\beta^2+c^2}$, l'équation du cercle se simplifie et devient

$$(\alpha-\mu\beta)(x^2+y^2)-(\alpha^2-\beta^2-c^2)x-\mu(\alpha^2-\beta^2-c^2)y+\alpha^2\alpha-\beta^2\mu=0.$$

Le lieu s'obtient facilement alors en éliminant μ entre les équations

$$\frac{2\alpha + \mu\beta x - \alpha^2 - \beta^2 - c^2}{l} = \frac{2\beta + \mu\beta y - (\mu\alpha^2 + \beta^2 - c^2)}{m}$$
$$= \frac{-\alpha^2 + \beta^2 - c^2 x - \mu\alpha^2 + \beta^2 - c^2 y + 2c^2\alpha - \mu\beta}{n}.$$

On retombe ainsi sur le déterminant précédent dont la première ligne a été divisée par α et la deuxième par β.

On peut aussi procéder de la façon suivante : on pose $\alpha - \mu\beta = \frac{u}{w}$, $\beta = \frac{v}{w}$, et on a facilement, en appelant $\frac{r}{w}$ la valeur commune des rapports,

$$2\alpha - \mu(\alpha^2 + \beta^2 - c^2) = rl,$$
$$2\beta - \mu(\alpha^2 + \beta^2 - c^2) = rm,$$
$$-2c^2 u - \mu\alpha^2 + \beta^2 - c^2 y - \mu\alpha^2 + \beta^2 - 3c^2 wx = rn,$$
$$u - vx - wy = 0.$$

Le lieu a donc pour équation

$$\begin{vmatrix} 2\alpha & 0 & \alpha^2 + \beta^2 - c^2 & l \\ 2\beta & -(\alpha^2 + \beta^2 - c^2) & 0 & m \\ 2c^2 & \alpha^2 + \beta^2 - c^2 y & -(\alpha^2 + \beta^2 - 3c^2 x) & n \\ 1 & -x & y & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Il est visible encore que le lieu est une conique et nous savons, d'après la théorie des faisceaux linéaires, que cette conique est circonscrite au triangle autopolaire commun à toutes les coniques du faisceau.

Bonnes solutions : MM. E. Dontot, élève à l'École normale supérieure ; G. Lach, à Rodez.

QUESTIONS PROPOSÉES

2026. — Un cube dont les arêtes aa_1, bb_1, cc_1, dd_1 sont verticales et ont pour longueur 6^{cm} a pour base inférieure le carré $abcd$ situé dans le plan H de cote 6 ; les points a et b sont dans le plan de profil situé à 3^{cm} à droite du centre de la feuille ; les points c et d sont à gauche de ce plan de profil, a a pour éloignement 6 et b pour éloignement 12.

La diagonale db_1 tourne autour de l'arête aa_1, puis autour de l'arête c_1d_1 ; elle engendre ainsi deux hyperboloïdes. Représenter le solide commun à ces deux hyperboloïdes, limité aux deux plans de projection, aux plans de profil situés à 9^{cm} du centre de la feuille, au plan de front d'éloignement 18 et au plan horizontal tangent au second hyperboloïde et situé au-dessus du centre de cet hyperboloïde.

(*Agrégation des Sciences mathématiques, Épreuves finales ; Concours de 1911.*)

2027. — Déterminer les coordonnées d'un point quelconque M du cercle qui passe par les trois points $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, en fonction du rapport anharmonique des quatre points, $d = (MA_0A_1A_2)$.

A. Durand.

2028. — Un cercle C tourne autour d'une droite D, située dans son plan. Sa projection sur un plan P, qui n'est ni parallèle ni perpendiculaire à D, est une ellipse variable E.

On demande le lieu des foyers de l'ellipse E.

A. Durand.

2029. — On donne un cercle tangent à deux droites rectangulaires. Trouver le lieu des foyers des paraboles tangentes au cercle et aux deux droites données.

Démontrer que les tangentes au sommet de ces paraboles enveloppent une courbe de 3e classe et trouver le point de contact de la droite avec son enveloppe.

Etude géométrique de la question.

E. Rémé, Conducteur des Ponts et Chaussées, à Bernolle. Ve[illegible].

2030. — On donne un système d'axes rectangulaires Ox, Oy et Oz, et on considère le cercle

$$(C) \qquad x^2 + y^2 - 2ax = 0,$$

du plan des xy, et les quadriques Q qui contiennent le cercle (C) et l'axe des z.

1° Le lieu des pôles d'un plan fixe P par rapport aux quadriques Q est un cône Γ du second ordre. Trouver le lieu de la courbe d'intersection du cône Γ et du plan P, quand ce dernier passe par un point fixe de Oz. Etudier la nature de la section du cône Γ par le plan des xy, quand le plan P varie.

2° Montrer que les plans polaires d'un point fixe A par rapport aux quadriques Q passent par un point fixe B. Calculer les coordonnées de B en fonction de celles de A et réciproquement. Etudier le déplacement de la droite AB quand le point A varie et trouver le lieu du point B quand le point A décrit un plan P.

3° Le lieu des centres des quadriques Q est un cylindre γ tangent au cône Γ le long de Oz. Trouver l'enveloppe du plan de la courbe plane commune au cône et au cylindre, quand le plan P tourne autour d'une droite ou enveloppe une surface développable Σ. Donner l'équation de l'enveloppe quand l'arête de rebroussement E de la surface Σ a pour équation

$$x = \frac{a}{t^3 + t^2 - t + 1}, \qquad y = \frac{-at}{t^3 + t^2 - t + 1}, \qquad z = \frac{-at^2}{t^3 + t^2 - t + 1}.$$

et montrer qu'elle peut être considérée comme l'enveloppe d'une famille de cônes à un paramètre.

4° Trouver les équations ponctuelle et tangentielle de la trace de la surface Σ sur le plan des xy. Construire cette courbe et trouver les régions du plan d'où l'on peut mener trois tangentes réelles à la courbe.

Bros.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1972. — *On considère le cercle* C *tangent en un point* M *d'une ellipse et qui passe par le centre* O *de cette ellipse. Trouver les lieux suivants avec leurs aires :*

1° *Lieu du centre* C *de ce cercle ;*

2° *Lieu du point de rencontre* P *de* MC *avec le cercle* C *;*

3° *Enveloppe de la corde d'intersection* QS *du cercle* C *et de l'ellipse ;*

4° *Lieu du milieu de* QS *;*

5° *Lieu de la projection de* O *sur* QS *;*

6° *Lieu du pôle de* QS *par rapport à l'ellipse ;*

7° *Lieu du point de rencontre de* QS *avec* OM *;*

8° *Du point* C *on abaisse les trois autres normales à l'ellipse dont les pieds forment un triangle* Δ. *Lieux du centre de gravité, du centre du cercle circonscrit, de l'orthocentre et du centre du cercle des neuf points de* Δ *;*

9° *De* P *on abaisse les trois autres normales à l'ellipse dont les pieds forment le triangle* Δ'. *Trouver les mêmes lieux que ceux du triangle* Δ.

Considérons l'ellipse $E = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$; la tangente au point M $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ a pour équation $T = bx\cos\varphi + ay\sin\varphi - ab = 0$. D'autre part, la corde QS, commune à l'ellipse et au cercle C, est, en direction, symétrique de T par rapport aux axes ; son équation est donc de la forme $D = bx\cos\varphi - ay\sin\varphi + \mu = 0$. On en conclut que l'équation du cercle C peut s'écrire $E + \lambda D = 0$.

On détermine les paramètres λ et μ en écrivant que cette équation représente un cercle passant

par l'origine ; nous obtenons ainsi

$$-ab - \lambda ab = 0, \qquad b^2 - \lambda b^2 \cos^2\varphi = a^2 - \lambda a^2 \sin^2\varphi,$$

et

$$\lambda = \frac{c^2}{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}, \qquad \mu = \frac{-ab(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)}{c^2}.$$

Les équations du cercle C et de la droite QS sont alors

$$C \equiv ab(x^2 + y^2) - b\cos\varphi(a^2 - c^2 \sin^2\varphi)x - a\sin\varphi(b^2 - c^2\cos^2\varphi)y = 0,$$

$$D \equiv c^2 bx\cos\varphi - ay\sin\varphi - ab(a^2 \sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) = 0.$$

Dès maintenant, il est à prévoir que tous les lieux demandés sont des courbes unicursales, symétriques par rapport aux axes. Nous en construirons le quart en faisant varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

1. Le centre C du cercle a pour coordonnées

$$x = \frac{(a^2 - c^2 \sin^2\varphi)\cos\varphi}{2a}, \qquad y = \frac{(b^2 - c^2\cos^2\varphi)\sin\varphi}{2b}.$$

Nous en tirons

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{a^2 - 2b^2 - 3c^2 \sin^2\varphi}{2a}\sin\varphi, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{-(a^2 - 2b^2 - 3c^2 \sin^2\varphi)\cos\varphi}{2b}, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}\cot\varphi.$$

Si $a > b\sqrt{2}$, $\frac{dx}{d\varphi}$ et $\frac{dy}{d\varphi}$ s'annulent pour une valeur de φ, $\varphi = \alpha$, comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et définie par $\sin^2\alpha = \frac{a^2 - 2b^2}{3c^2}$. Le point correspondant est un rebroussement de première espèce; dans la même hypothèse, y s'annule pour la valeur $\varphi = \beta$, $\cos^2\beta = \frac{b^2}{c^2}$, et l'on voit aisément que $\alpha < \beta$.

On a donc les variations et les formes de courbes suivantes :

$a > b\sqrt{2}$

φ	0	croît	α	croît	β	croît	$\frac{\pi}{2}$
x	$\frac{a}{2}$	croît	$\max.$	décroît		décroît	0
y	0	décroît	$\min.$	croît	0	croît	$\frac{b}{2}$
$\frac{dy}{dx}$	$-\infty$		croît				0

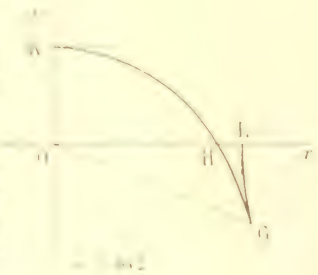


Fig. 1.

$a < b\sqrt{2}$

φ	0	croît	$\frac{\pi}{2}$
x	$\frac{a}{2}$	décroît	0
y	0	croît	$\frac{b}{2}$
$\frac{dy}{dx}$	$-\infty$	croît	0

Pour évaluer les aires de ces courbes, calculons l'intégrale $I = \int \frac{x\,dy - y\,dx}{2}$. Nous avons

$$x\,dy - y\,dx = -\frac{a^2 - 2b^2 - 3c^2 \sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}{4ab}\,d\varphi,$$

ou, en remplaçant $\cos^2\varphi$ par $\dfrac{1+\cos 2\varphi}{2}$ et $\sin^2\varphi$ par $\dfrac{1-\cos 2\varphi}{2}$,

$$xdy - ydx = \frac{(a^2+b^2)^2 - 2c^2(a^2+b^2)\cos 2\varphi - 3c^4\cos^2 2\varphi}{16ab}\,d\varphi,$$

ou enfin, en remplaçant $\cos^2 2\varphi$ par $\dfrac{1+\cos 4\varphi}{2}$,

$$I = \frac{1}{2}\int xdy - ydx = \frac{1}{64ab}\int \left[2(a^2+b^2)^2 - 3c^4 - 4c^2(a^2+b^2)\cos 2\varphi - 3c^4\cos 4\varphi\right]d\varphi,$$

et, en intégrant, $I = \dfrac{1}{64ab}\left[\left[2(a^2+b^2)^2 - 3c^4\right]\varphi - 2c^2(a^2+b^2)\sin 2\varphi - \dfrac{3c^4}{2}\sin 4\varphi\right]$.

Dans le cas où $a < b\sqrt{2}$ (fig. 2) l'aire OLK est égale à $I\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$, c'est-à-dire à $\dfrac{2(a^2+b^2)^2 - 3c^4}{64ab}\cdot\dfrac{\pi}{2}$.

Dans le cas de la figure 1 $(a > b\sqrt{2})$, si nous menons la droite OG, nous avons

$$\text{aire OLG} = -I_0^\alpha, \qquad \text{aire OGH} = I_\alpha^\beta, \qquad \text{aire OHK} = I\left[\frac{\pi}{2}\right],$$

α et β ayant les valeurs données plus haut.

2. Le point P est le symétrique de M par rapport à C ; ses coordonnées sont donc $x_P = 2x_C - x_M$, $y_P = 2y_C - y_M$. On a donc pour les équations paramétriques du lieu du point P

$$x = \frac{c^2}{a}\sin^2\varphi\cos\varphi, \qquad y = -\frac{c^2}{b}\cos^2\varphi\sin\varphi,$$

et

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{c^2}{a}\sin\varphi(2 - 3\sin^2\varphi), \qquad \frac{dy}{d\varphi} = -\frac{c^2}{b}\cos\varphi(1 - 3\sin^2\varphi).$$

Posons $\alpha = \arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $\beta = \arcsin\sqrt{\dfrac{1}{3}}$, les déterminations étant comprises entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$. On en déduit les variations suivantes :

φ	0	croît	β	croît	α	croît	$\frac{\pi}{2}$
x	0	croît		croît	*max.*	décroît	0
y	0	décroît	*min.*	croît		croît	0
$\frac{dy}{dx}$	∞		0		∞		0

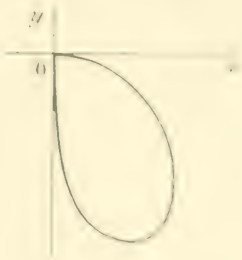


Fig. 2

On obtient aisément

$$xdy - ydx = \frac{c^4}{ab}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{c^4}{4ab}\sin^2 2\varphi\,d\varphi = \frac{c^4}{8ab}(1 - \cos 4\varphi)\,d\varphi,$$

et

$$I = \frac{1}{2}\int xdy - ydx = \frac{c^4}{16ab}\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right).$$

L'aire de la courbe est donc $I\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$ ou $\dfrac{c^4}{16ab}\cdot\dfrac{\pi}{2}$.

3. L'équation de QS est

$$c^2 - bx\cos\varphi - ay\sin\varphi - ab(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) = 0.$$

Dérivons par rapport à φ, nous avons

$$c^2(-bx\sin\varphi - ay\cos\varphi) - ab(2a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

puis résolvons ces deux équations par rapport à x et y, nous obtenons

$$x = \frac{a\cos\varphi(b^2 - c^2\sin^2\varphi)}{c^2}, \qquad y = \frac{-b\sin\varphi(a^2 + c^2\cos^2\varphi)}{c^2};$$

ce sont les équations paramétriques de l'enveloppe.

Posons $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$, les coordonnées du point limite deviennent

$$x = \frac{a\sin\psi(b^2 - c^2\cos^2\psi)}{c^2}, \qquad y = \frac{b\cos\psi(a^2 + c^2\sin^2\psi)}{c^2}.$$

En comparant avec les coordonnées du point C, on voit que cette nouvelle courbe se déduit du lieu du point C par la rotation $-\frac{\pi}{2}$ autour du point O, suivie de l'homothétie dans le rapport $\frac{2ab}{c^2}$, par rapport au point O.

4. Le milieu de QS est déterminé par l'intersection de cette droite

$$c^2(bx\cos\varphi - ay\sin\varphi) - ab(a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi) = 0,$$

et de son diamètre conjugué, qui a pour équation

$$y + \frac{b\cos\varphi}{a\sin\varphi}x = 0, \qquad \text{ou} \qquad bx\sin\varphi + ay\cos\varphi = 0.$$

En résolvant ces deux équations on obtient

$$x = \frac{a}{c^2}(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)\cos\varphi, \qquad y = \frac{b}{c^2}(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)\sin\varphi,$$

et

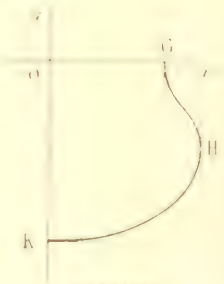
$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{a}{c^2}(3c^2\cos^2\varphi - a^2)\sin\varphi, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = -\frac{b}{c^2}(3c^2\sin^2\varphi - b^2)\cos\varphi.$$

Si $2a^2 > 3b^2$, $\frac{dx}{d\varphi}$ s'annule pour une valeur α, définie par $\cos^2\alpha = \frac{a^2}{3c^2}$.

On a donc les deux hypothèses suivantes :

$2a^2 > 3b^2$

φ	0	croît	α	croît	$\frac{\pi}{2}$
x	$\frac{ab^2}{c^2}$	croît	max.	décroît	0
y	0	décroît		décroît	$-\frac{a^2b}{c^2}$
$\frac{dy}{dx}$	∞		∞		0



$2a^2 > 3b^2$
Fig. 4.

$2a^2 < 3b^2$

φ	0	croît	$\frac{\pi}{2}$
x	$\frac{ab^2}{c^2}$	décroît	0
y	0	décroît	$-\frac{a^2b}{c^2}$
$\frac{dy}{dx}$	∞		0

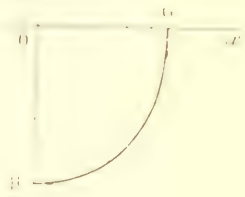


Fig. 5.

On trouve aisément

$$xdy - ydx = -\frac{ab}{c^4}(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^2 d\varphi = -\frac{ab}{4c^4}(a^2 + b^2 - c^2\cos 2\varphi)^2 d\varphi,$$

puis, en effectuant et en remplaçant $\cos^2 2\varphi$ par $\frac{1 + \cos 4\varphi}{2}$,

$$I = \frac{1}{2}\int xdy - ydx = -\frac{ab}{8c^4}\int\left[(a^2 + b^2)^2 + \frac{c^4}{2} - 2c^2(a^2 - b^2)\cos 2\varphi + \frac{c^4}{4}\cos 4\varphi\right]d\varphi$$

et

$$I = -\frac{ab}{8c^4}\left[\left[(a^2 + b^2)^2 + \frac{c^4}{2}\right]\varphi - 2c^2(a^2 - b^2)\frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{c^4}{16}\sin 4\varphi\right].$$

L'aire OGH est égale à $-I_0^{\frac{\pi}{2}}$ ou à

$$\frac{ab}{16c^4}\left[2(a^2 + b^2)^2 + c^4\right]\frac{\pi}{2}.$$

5. La perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipse sur la corde QS a pour équation $\frac{x}{b\cos\varphi} = \frac{y}{-a\sin\varphi}$. On en déduit aisément les coordonnées du pied de cette perpendiculaire ; on trouve

$$x = \frac{ab^2}{c^2}\cos\varphi, \qquad y = -\frac{a^2b}{c^2}\sin\varphi.$$

Ce point décrit l'ellipse

$$\frac{x^2}{\left(\frac{ab^2}{c^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a^2b}{c^2}\right)^2} = 1,$$

dont l'aire est $\frac{\pi a^2b^3}{c^4}$.

6. Les coordonnées x et y du pôle de la droite QS par rapport à l'ellipse sont définies par les équations

$$\frac{\frac{x}{a^2}}{c^2b\cos\varphi} = \frac{\frac{y}{b^2}}{-c^2a\sin\varphi} = \frac{-1}{-ab(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)},$$

on en tire

$$x = \frac{ac^2\cos\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}, \qquad y = \frac{-bc^2\sin\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}.$$

et

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{-ac^2(a^2 - c^2\cos^2\varphi)\sin\varphi}{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^2}, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{-bc^2(b^2 - c^2\sin^2\varphi)\cos\varphi}{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^2}.$$

Lorsque $a > b\sqrt{2}$, $\frac{dy}{d\varphi}$ s'annule pour la valeur $\varphi = \alpha$, définie par $\sin^2\alpha = \frac{b^2}{c^2}$

$a > b\sqrt{2}$

φ	0	croît	α	croît	$\frac{\pi}{2}$
x	$\frac{ac^2}{b^2}$	décroît		décroît	0
y	0	décroît	*min.*	croît	$-\frac{bc^2}{a^2}$
$\frac{dy}{dx}$	∞		0		0

$a > b\sqrt{2}$

Fig. 4.

$a < b\sqrt{2}$

φ	0	croît	$\frac{\pi}{2}$
x	$\frac{ac^2}{b^2}$	décroît	0
y	0	décroît	$-\frac{bc^2}{a^2}$
$\frac{dy}{dx}$	∞		0

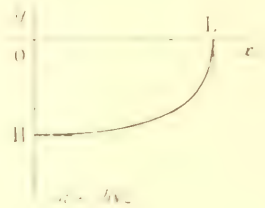


Fig. 7.

Nous en tirons $$xdy - ydx = -\frac{abc^2}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\,d\varphi,$$

et nous avons à calculer l'intégrale

$$I = \frac{1}{2}\int xdy - ydx = -\frac{abc^2}{2}\int \frac{d\varphi}{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^2}.$$

L'aire limitée par la portion de courbe construite et par les axes de coordonnées sera alors égale à $-I\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire à $$\frac{abc^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^2}.$$

On calculera aisément cette intégrale en faisant le changement de variable $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}z$; elle se transforme en $$\frac{c^2}{2a^2b^2}\int_0^{+\infty} \frac{(1+z^2)^2}{(1+z^2)^2}\,dz.$$

On peut écrire $$\frac{a^2 + b^2z^2}{(1+z^2)^2} = \frac{a^2 + b^2 - b^2(1-z^2)}{(1+z^2)^2} = \frac{c^2}{(1+z^2)^2} + \frac{b^2}{1+z^2}.$$

et $$\int_0^{+\infty} \frac{a^2 + b^2z^2}{(1+z^2)^2}\,dz = c^2\int_0^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^2} + b^2\int_0^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2} = c^2\frac{\pi}{4} + b^2\frac{\pi}{2} = \frac{(a^2+b^2)\pi}{4}.$$

L'aire demandée est donc $\frac{(a^2+b^2)c^4\pi}{8a^2b^2}$.

7. L'équation de OM, $\frac{x}{a\cos\varphi} = \frac{y}{b\sin\varphi}$, jointe à celle de QS, donne les coordonnées du point de rencontre de ces deux droites :

$$x = \frac{a}{c^2}\cdot\frac{\cos\varphi(a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi)}{\cos 2\varphi}, \qquad y = \frac{b}{c^2}\cdot\frac{\sin\varphi(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}{\cos 2\varphi},$$

qui peuvent encore s'écrire

$$x = \frac{a}{2c^2}\left[\frac{(a^2-b^2)}{\cos 2\varphi} - c^2\right]\cos\varphi, \qquad y = \frac{b}{2c^2}\left[\frac{(a^2-b^2)}{\cos 2\varphi} - c^2\right]\sin\varphi;$$

et on en déduit

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{a\sin\varphi}{2c^2}\cdot\frac{c^2\cos^2 2\varphi + (a^2-b^2)\cos 2\varphi + 2(a^2-b^2)}{\cos^2 2\varphi},$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = -\frac{b\cos\varphi}{2c^2}\cdot\frac{c^2\cos^2 2\varphi + (a^2-b^2)\cos 2\varphi - 2(a^2+b^2)}{\cos^2 2\varphi}.$$

On reconnaît sans peine que le trinome en $\cos 2\varphi$ qui figure dans $\frac{dx}{d\varphi}$ a, ou bien ses racines

φ	0			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
x	$\frac{ab^2}{c^2}$	croît	$+\infty$	$+\infty$	croît	0
y	0	croît	$+\infty$	$+\infty$	croît	$-\frac{ab}{c^2}$
$\frac{dy}{dx}$	∞					0

imaginaires, ou bien ses racines réelles et inférieures à -1; dans tous les cas, il reste positif quand φ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Le trinome en $\cos 2\varphi$ qui figure dans $\frac{dy}{d\varphi}$ a ses racines réelles et extérieures à l'intervalle $(-1, +1)$; il reste négatif quand φ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$. On en déduit les variations ci-contre.

Cherchons si les branches infinies admettent une asymptote. Nous avons $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi$, et pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$, limite $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$.

Ensuite

$$y - \frac{b}{a}x = \frac{b(a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi)(\sin\varphi - \cos\varphi)}{c^2\cos 2\varphi} = -\frac{b(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}{c^2(\cos\varphi + \sin\varphi)}.$$

On en déduit
$$\lim.\left(y - \frac{b}{a}x\right) = \frac{-b(a^2 - b^2)}{2c^2\sqrt{2}}.$$

L'asymptote a donc pour équation

$$Y - \frac{b}{a}x = -\frac{b(a^2 - b^2)}{2c^2\sqrt{2}}.$$

Pour avoir la position de la courbe par rapport à l'asymptote, nous cherchons le signe de la différence

$$y - Y = -\frac{b(a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi)}{c^2\cos\varphi + \sin\varphi} + \frac{b(a^2 - b^2)}{2c^2\sqrt{2}},$$

pour les valeurs de φ voisines de $\frac{\pi}{4}$. Nous pouvons écrire

$$y - Y = \frac{b}{2c^2\sqrt{2}(\cos\varphi + \sin\varphi)}\left[a^2 + b^2 + (\cos\varphi + \sin\varphi) - 2\sqrt{2}(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)\right].$$

La quantité entre crochets s'annule pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$; sa dérivée est négative pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Donc cette fonction est décroissante pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$; elle est positive pour $\varphi < \frac{\pi}{4}$ et négative pour $\varphi > \frac{\pi}{4}$. Il en est de même pour $y - Y$.

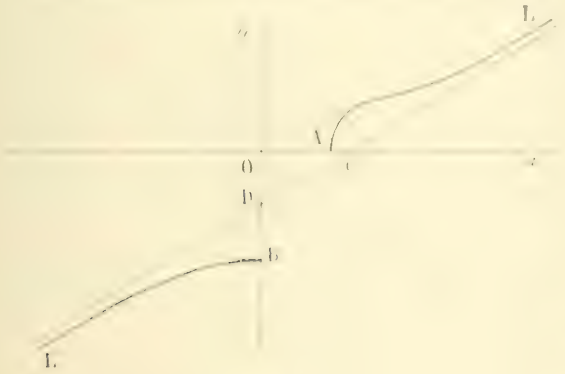


Fig. 8.

La branche de courbe AL est au-dessus de l'asymptote, la branche BL' au-dessous.

Il est facile de vérifier que le point B est toujours au-dessous du point B'; le point C est à droite de A si $a^2 > b^2(2\sqrt{2} - 1)$, et à gauche si $a^2 < b^2(2\sqrt{2} - 1)$.

8. Pour abréger un peu cette solution déjà bien longue, nous nous contenterons d'établir les équations paramétriques des lieux demandés.

Les pieds des normales issues du point C à l'ellipse sont à l'intersection de l'ellipse

$$E \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

et de l'hyperbole d'Apollonius relative au point C,

$$F \equiv 2c^2xy + b\sin\varphi(b^2 - c^2\cos^2\varphi)x - a\cos\varphi(a^2 - c^2\sin^2\varphi)y = 0.$$

Ces courbes se rencontrent au point M et en trois autres points M_1, M_2, M_3. Formons l'équation d'une conique G passant par ces trois points. Il suffit de mettre les équations précédentes sous la forme

$$E \equiv A(x - a\cos\varphi) + B(y - b\sin\varphi) = 0, \qquad F \equiv A'(x - a\cos\varphi) + B'(y - b\sin\varphi) = 0.$$

A, B, A′, B′ étant des fonctions linéaires, puis d'éliminer $x - a\cos\varphi$, $y - b\sin\varphi$ entre ces deux équations, ce qui donne $G \equiv AB' - BA' = 0$. Cette équation représente une conique passant par les points M_1, M_2, M_3 sans passer par le point M.

Nous avons ainsi trois coniques $E = 0$, $F = 0$, $G = 0$ passant par ces trois points. L'équation générale des coniques passant par ces trois points est alors

$$\lambda E + \mu F + \nu G = 0.$$

En développant les calculs on a

$$E \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 - 2ab\cos\varphi(x - a\cos\varphi) + 2a^2(y + b\sin\varphi)y - b\sin\varphi) = 0,$$

$$F \equiv 2c^2xy + b\sin\varphi(a^2 - c^2\cos^2\varphi)x - a\cos\varphi(a^2 - c^2\sin^2\varphi)y - b\sin\varphi(b^2 - c^2\sin^2\varphi) = 0,$$

$$G \equiv b^2c^2x^2 - a^2c^2y^2 + ab^2\cos\varphi(c^2\cos^2\varphi - b^2)x - a^2b\sin\varphi(c^2\sin^2\varphi + a^2)y - a^2b^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) = 0.$$

Écrivons que la conique $\lambda E + \mu F + \nu G = 0$ représente un cercle. On a évidemment $\mu = 0$, puisque F seul contient un terme en xy ; puis $\lambda b^2 + \nu b^2c^2 = \lambda a^2 - \nu a^2c^2$, ou $\lambda = \nu(a^2 + b^2)$. On peut donc prendre $\nu = 1$, $\lambda = a^2 + b^2$; de sorte que le cercle circonscrit au triangle Δ a pour équation

$$(a^2 + b^2)(E + G) = 0.$$

Les coordonnées de son centre Ω sont

$$(\Omega) \qquad x = \frac{(b - c^2\cos^2\varphi)\cos\varphi}{4a}, \qquad y = \frac{(a - c^2\sin^2\varphi)\sin\varphi}{4b}.$$

Le centre de gravité G du triangle a pour coordonnées $x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.

Formons les équations aux x, puis aux y des pieds des quatre normales issues de C ; il suffit d'éliminer y, puis x entre les équations $E = 0$, $F = 0$. On obtient

$$4c^2x^3 - 4ac^2\cos\varphi(a^2 + c^2\sin^2\varphi)x^2 + \ldots = 0,$$

$$4c^2y^3 + 4bc^2\sin\varphi(b^2 - c^2\cos^2\varphi)y^2 + \ldots = 0,$$

les relations entre les coefficients et les racines donnent

$$a\cos\varphi + x_1 + x_2 + x_3 = \frac{a\cos\varphi(a^2 + c^2\sin^2\varphi)}{c^2}, \qquad b\sin\varphi + y_1 + y_2 + y_3 = \frac{-b\sin\varphi(b^2 - c^2\cos^2\varphi)}{c^2}.$$

Les coordonnées du point G sont alors

$$(G) \qquad x = \frac{a\cos\varphi(a^2 - c^2\cos^2\varphi)}{3c^2}, \qquad y = \frac{-b\sin\varphi(b^2 + c^2\sin^2\varphi)}{3c^2}.$$

L'orthocentre H divise le segment $G\Omega$ dans le rapport $\dfrac{\overline{HG}}{\overline{H\Omega}} = \dfrac{2}{3}$; ses coordonnées sont donc

$$x = \frac{x_G - \frac{2}{3}x_\Omega}{1 - \frac{2}{3}}, \qquad y = \frac{y_G - \frac{2}{3}y_\Omega}{1 - \frac{2}{3}}.$$

ou

$$\text{(H)} \qquad x = \frac{[2a^4 - b^2c^2 - c^2(a^2 + b^2)\cos^2\varphi]\cos\varphi}{2ac^2}, \qquad y = \frac{-[2b^4 + a^2c^2 + (a^2 - b^2)c^2\sin^2\varphi]\sin\varphi}{2bc^2}$$

Enfin le centre ω du cercle des neuf points est le milieu de $H\Omega$; ses coordonnées se calculent facilement.

9. En suivant la même méthode qu'au numéro précédent, on trouve, pour les coordonnées du centre Ω' du cercle circonscrit au triangle Δ',

$$x = -\frac{c^2}{2a}\cos^3\varphi, \qquad y = \frac{c^2}{2b}\sin^3\varphi ;$$

pour celles du centre de gravité G',

$$x = -\frac{a}{3}\cos\varphi\cos 2\varphi, \qquad y = \frac{b}{3}\sin\varphi\cos 2\varphi ;$$

pour celles de l'orthocentre H',

$$x = \frac{(a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi)\cos\varphi}{a}, \qquad y = \frac{-(a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi)\sin\varphi}{b},$$

et enfin, pour celles du centre ω' du cercle des neuf points

$$x = \frac{[2a^2\sin^2\varphi - (a^2 + b^2)\cos^2\varphi]\cos\varphi}{4a}, \qquad y = \frac{[2b^2\cos^2\varphi - (a^2 + b^2)\sin^2\varphi]\sin\varphi}{4b}.$$

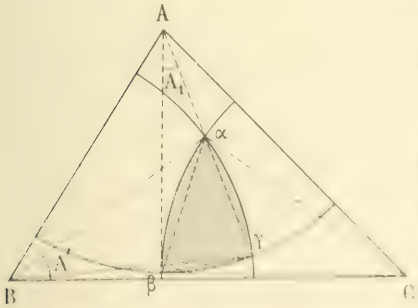
Jean SOUBAIGNÉ, à Mont-de-Marsan.

TRIGONOMÉTRIE

1986. — *On considère trois cercles de rayon* 5^{cm}, *dont les centres sont les sommets d'un triangle de côtés :* 6^{cm}, 7^{cm} *et* 8^{cm}. *Quelle est l'aire du triangle curviligne commun à ces trois cercles ?*

Méthode employée.

Nous considérerons l'aire S du triangle curviligne $\alpha\beta\gamma$ comme la somme de l'aire Σ du triangle de sommets α, β, γ et des aires des segments de cercle sous-tendus respectivement par les cordes $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, aires désignées par Σ_A, Σ_B, Σ_C.



Désignons par a, b, c les longueurs des côtés BC, CA, AB du triangle ABC ayant pour sommets les centres des trois cercles de même rayon, par A, B, C ses angles, par A', B', C' les angles $A' = \widehat{\alpha BC} = \widehat{\alpha CB}$, $B' = \widehat{\beta AC} = \widehat{\beta CA}$, $C' = \widehat{\gamma AB} = \widehat{\gamma BA}$, par A_1, B_1, C_1 les angles $\widehat{\beta A_1\gamma}$, $\widehat{\gamma B_1\alpha}$, $\widehat{\alpha C_1\beta}$ et enfin par α, β, γ les côtés du triangle de sommets α, β, γ.

Nous calculerons A, B, C en résolvant le triangle ABC dont les côtés sont connus. Les angles A', B', C' sont donnés par les triangles isocèles αBC, βCA, γAB, dont les trois côtés sont connus ; A_1, B_1, C_1 s'en déduisent par les formules $A_1 = B + C - A'$, $B_1 = C' + A' - B$; $C_1 = A' + B - C$. Il est alors facile de calculer les longueurs des cordes $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ dans des cercles de rayon connu et les aires des segments qu'elles sous-tendent.

Pour abréger les calculs nous supposerons que le rayon commun aux trois cercles soit égal pour unité ; il nous suffira de multiplier l'aire obtenue par 25 pour avoir en centimètres carrés le résultat demandé.

Calcul numérique.

Données	*Formules*	*Résultat*
$a = 1{,}6$ $b = 1{,}4$ $c = 1{,}2$ $R = 1$	$a + b + c = 2p$ $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$ $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$ $\cos A = 0{,}8$ $\cos B = 0{,}7$ $\cos C = 0{,}6$ $A_1 = B + C - A$ $B_1 = C + A - B$ $C_1 = A + B - C$ $\alpha = 2\sin\frac{A}{2}$ $\beta = 2\sin\frac{B}{2}$ $\gamma = 2\sin\frac{C}{2}$ $2l = \alpha + \beta + \gamma$ $\Sigma = \sqrt{l(l-\alpha)(l-\beta)(l-\gamma)}$ $\Sigma_A = \frac{A_1 - \sin A_1}{2}$ $\Sigma_B = \frac{B_1 - \sin B_1}{2}$ $\Sigma_C = \frac{C_1 - \sin C_1}{2}$	$S = \Sigma + \Sigma_A + \Sigma_B + \Sigma_C$ $= 0{,}14872$ $258 = 3^{m}{,}718$

CALCUL DE A, B, C.

Calculs auxiliaires.

$2p = 4{,}2$

$p = 2{,}1 \qquad \log p = 0{,}32222$

$p - a = 0{,}5 \qquad \log(p-a) = \bar{1}{,}69897$

$p - b = 0{,}7 \qquad \log(p-b) = \bar{1}{,}84510$

$p - c = 0{,}9 \qquad \log(p-c) = \bar{1}{,}95424$

$\log(p-b) = \bar{1}{,}84510$
$\log(p-c) = \bar{1}{,}95424$
$\operatorname{colog} p = \bar{1}{,}67778$
$\operatorname{colog}(p-a) = 0{,}30103$

$2\log\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \bar{1}{,}77815$

$\log(p-a) = \bar{1}{,}69897$
$\log(p-c) = \bar{1}{,}95424$
$\operatorname{colog} p = \bar{1}{,}67778$
$\operatorname{colog}(p-b) = 0{,}15490$

$2\log\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \bar{1}{,}38589$

$\log(p-a) = \bar{1}{,}69897$
$\log(p-b) = \bar{1}{,}84510$
$\operatorname{colog} p = \bar{1}{,}67778$
$\operatorname{colog}(p-c) = 0{,}04576$

$2\log\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \bar{1}{,}26761$

Calculs définitifs.

$\log\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \bar{1}{,}88902$

$\bar{1}{,}88808 \qquad \log\operatorname{tg} 41^{\circ}{,}95 \qquad D = 14$

$28 \qquad 2$

$1{,}20 \qquad 9$

$\frac{A}{2} = 41^{\circ}{,}953$

$A = 83^{\circ}{,}906$

$\log\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \bar{1}{,}74294$

$\bar{1}{,}74294 \qquad \log\operatorname{tg} 32^{\circ}{,}47 \qquad D = 16$

$3{,}2 \qquad 2$

$\frac{B}{2} = 32^{\circ}{,}472$

$B = 64^{\circ}{,}944$

$\log\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \bar{1}{,}63380$

$\bar{1}{,}63379 \qquad \log\operatorname{tg} 25^{\circ}{,}87 \qquad D = 19$

$0{,}95 \qquad 65$

$\frac{C}{2} = 25^{\circ}{,}8705$

$C = 51^{\circ}{,}741$

Vérification :

$A = 83^{\circ}{,}906$
$B = 64^{\circ}{,}944$
$C = 51^{\circ}{,}741$
$A + B + C = 199^{\circ}{,}991$

Calcul de A_1, B_1, C_1.

Calculs auxiliaires.

$\cos A' = 0{,}8$

$\log \cos A' = \bar{1}{,}90309$

$\bar{1}{,}90312 = \log \cos 40^g{,}96 \qquad D = 5$

$-2{,}7 \qquad 3$

$-0{,}27 \qquad 3$

$A' = 40^g{,}963$

$\cos B' = 0{,}7$

$\log \cos B' = \bar{1}{,}84510$

$\bar{1}{,}84514 = \log \cos 50^g{,}63 \qquad D = 7$

$-3{,}5 \qquad 5$

$-0{,}49 \qquad 7$

$B' = 50^g{,}636$

$\cos C' = 0{,}6$

$\log \cos C' = \bar{1}{,}77815$

$\bar{1}{,}77818 = \log \cos 59^g{,}03 \qquad D = 9$

$-2{,}7 \qquad 3$

$-0{,}27 \qquad 3$

$C' = 59^g{,}033$

Calculs définitifs.

$B = 50^g{,}636$

$C' = 59^g{,}033$

$B' + C' = 109^g{,}669$

$A = 83^g{,}906$

$A_1 = 25^g{,}763 = \frac{25{,}763\pi}{200}$ radians

$20\frac{\pi}{200} = 0{,}31416$

$5 \qquad 0{,}07854$

$0{,}7 \qquad 0{,}01100$

$0{,}06 \qquad 0{,}00094$

$0{,}003 \qquad 0{,}00005$

$A_1 = 0{,}40469$ radians

$C' = 59^g{,}033$

$A' = 40^g{,}963$

$C' + A' = 99^g{,}996$

$B = 64^g{,}344$

$B_1 = 35^g{,}652 = \frac{35{,}652\pi}{200}$ radians

$30\frac{\pi}{200} = 0{,}47124$

$5 \qquad 0{,}07854$

$0{,}6 \qquad 0{,}00942$

$0{,}05 \qquad 0{,}00079$

$0{,}002 \qquad 0{,}00003$

$B_1 = 0{,}56002$ radians

$A' = 40^g{,}963$

$B = 50^g{,}636$

$A' + B = 91^g{,}599$

$C = 54^g{,}741$

$C_1 = 36^g{,}858 = \frac{36{,}858\pi}{200}$ radians

$30\frac{\pi}{200} = 0{,}47124$

$9 \qquad 0{,}14137$

$0{,}8 \qquad 0{,}01257$

$0{,}05 \qquad 0{,}00079$

$0{,}008 \qquad 0{,}00013$

$C_1 = 0{,}62610$ radians

Calcul de Σ, Σ_A, Σ_B, Σ_C.

Calculs auxiliaires.

$A_1 = 25^\circ,763$

$\frac{A_1}{2} = 12^\circ,881$

$\log \sin 25^\circ,76 = \bar{1},59515$ D = 16

3 4,8

$\log \sin A_1 = \bar{1},59520$

$\bar{1},59517 = \log 0,3937$ D = 11

2,2 2

$\sin A_1 = 0,39372$

$\log \sin 12^\circ,88 = \bar{1},30307$ D = 33

1 3,3

$\log \sin \frac{A}{2} = \bar{1},30310$

$\bar{1},30298 = \log 0,2009$ D = 22

11 5

$\sin \frac{A}{2} = 0,20095$

$B_1 = 35^\circ,652$

$\frac{B_1}{2} = 17^\circ,826$

$\log \sin 35^\circ,65 = \bar{1},72524$ D = 11

2 2,2

$\log \sin B = \bar{1},72526$

$\bar{1},72526 = \log 0,53120$

$\sin B = 0,53120$

$\log \sin 17^\circ,82 = \bar{1},44134$ D = 24

6 14,4

$\log \sin \frac{B_1}{2} = \bar{1},44148$

$\bar{1},44138 = \log 0,2763$ D = 16

9,6 6

$\sin \frac{B_1}{2} = 0,27636$

Calculs définitifs.

$\alpha = 0,40190$

$\beta = 0,55272$

$\gamma = 0,61592$

$2l = 1,57054$

$l = 0,78527$

$l - \alpha = 0,38337$

$l - \beta = 0,23255$

$l - \gamma = 0,16935$

$\log 0,7852 = \bar{1},89498$ D = 6

7 4,2

$\log l = 1,89502$

$\log 0,3833 = \bar{1},58354$ D = 11

7 7,7

$\log (l - \alpha) = 1,58362$

$\log 0,2325 = \bar{1},36642$ D = 19

5 9,5

$\log (l - \beta) = \bar{1},36652$

$\log 0,1693 = \bar{1},22866$ D = 25

5 12,5

$\log (l - \gamma) = \bar{1},22879$

$\log l = \bar{1},89502$

$\log (l - \alpha) = \bar{1},58362$

$\log (l - \beta) = \bar{1},36652$

$\log (l - \gamma) = \bar{1},22879$

$2 \log \Sigma = \bar{2},07395$

$\log \Sigma = \bar{1},03647$

$\bar{1},03623 = \log 0,1087$ D = 40

24 6

$\Sigma = 0,10876$

$A_1 = 0,40469$ radians

$\sin A_1 = 0,39372$

$2\Sigma_1 = 0,01097$

CALCUL DE Σ, Σ_A, Σ_B, Σ_C (*suite*).

Calculs auxiliaires.

$C_1 = 39^\circ,858$

$\frac{C_1}{2} = 19^\circ,929$

$\log \sin 39^\circ,85 = 1,76781$ D = 9

$8 \qquad 7,2$

$\log \sin C_1 = \bar{1},76788$

$\bar{1},76782 = \log 0,5859$ D = 8

$5,6 \qquad 7$

$\sin C_1 = 0,58597$

$\log \sin 19^\circ,92 = \bar{1},48830$ D = 21

$9 \qquad 18,9$

$\log \sin \frac{C_1}{2} = \bar{1},48849$

$\bar{1},48841 = \log 0,3079$ D = 14

$8,4 \qquad 6$

$\sin \frac{C_1}{2} = 0,30796$

Calculs définitifs.

$B_1 = 0,56002$ radians

$\sin B_1 = 0,53120$

$2\Sigma_B = 0,02882$

$C_1 = 0,62610$ radians

$\sin C_1 = 0,58597$

$2\Sigma_C = 0,04013$

$2\Sigma_A = 0,01097$

$2\Sigma_B = 0,02882$

$2\Sigma_C = 0,04013$

$2\,\Sigma_A + \Sigma_B + \Sigma_C = 0,07992$

$\Sigma_A + \Sigma_B + \Sigma_C = 0,03996$

A. S. L.

Très bonnes solutions de MM. A. COURTOIS, à Sedan ; G. LACH, à Rodez ; L. N. BARRAT.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

1997. — INTERSECTION D'UN TORE ET D'UN CYLINDRE DE RÉVOLUTION. — *Données :* $oo' = 18^{mm}$, [illegible]

Un arc de circonférence situé dans le plan de front [illegible] *est pris successivement suivant b'm'c' de centre a'.*

Le tore est engendré par cet arc de circonférence tournant autour de la verticale du point o.

Le cylindre de révolution a pour axe la droite [illegible] *et pour contour apparent vertical les deux tangentes à l'axe* [illegible] *parallèlement à* [illegible].

Représenter, en faisant la distinction des parties vues et cachées :

1° En projection horizontale, la partie du cylindre [illegible]

2° En projection verticale, la partie du tore [illegible] *cylindre.*

Le cylindre est limité par deux plans de profil situés à 8 centimètres de distance du point [illegible]

On représentera en traits pointillés [illegible] *la construction d'un point quelconque et de sa tangente.*

Titre et cadre inutiles.

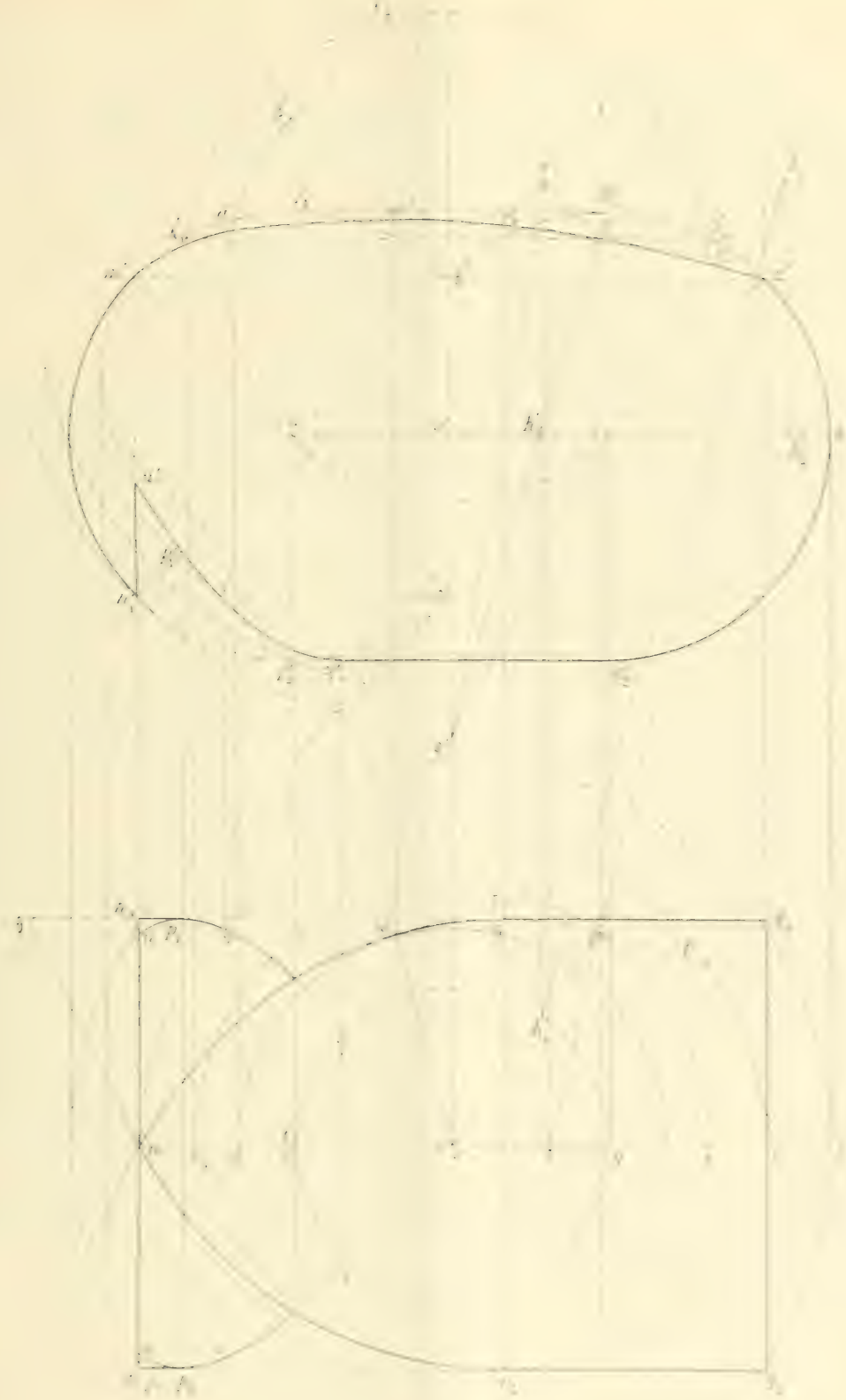
(*Ecole des Mines de Saint-Etienne*, [illegible] 1911.)

Le tore a pour contour apparent vertical les deux portions $f'g'$ de la tangente commune aux deux positions du cercle mobile situées dans le plan de front de l'axe $oo'b'$ et les deux demi-circonférences telles que $f'l'$ et [illegible] qui raccordent ces deux tangentes l'une à l'autre. Il faudrait y joindre les deux arcs de méridien $f'h'g'$ et [illegible] qui se trouvent cachés par la surface extérieure du tore. En projection horizontale le contour apparent se

[illegible]

[illegible]

[illegible]



La tangente en w à la projection horizontale est la même qu'au point w du parallèle du tore, et par suite est perpendiculaire sur ow, soit wz.

Ponctuation. — En projection horizontale, puisqu'on enlève le tore, il faut supprimer les portions de génératrices p_1v_1 et p_2v_2 intérieures au tore et la courbe de section devient visible jusqu'au point double, à partir duquel elle est cachée jusqu'au point de rebroussement.

En projection verticale, le cylindre étant enlevé, il faut supprimer la portion de contour apparent vertical du tore qui est intérieure au cylindre, c'est-à-dire la ligne $m'f'_1g'_1z'$ et la ligne $n'_1f'_2c'$ ainsi que $f'_2\gamma'$, mais conserver en trait ponctué l'arc $c'g'_2$.

On doit aussi tracer en trait ponctué la portion $m'u'$ de section cylindrique qui est intérieure au tore.

Bonne solution : A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes.

Note sur la solution de l'erreur n° 1962 parue dans le n° d'Avril. — Il y a lieu d'observer que la section du paraboloïde par le plan du parallèle qui limite supérieurement le solide est un arc d'hyperbole, puisque ce plan n'est pas parallèle à l'axe de la surface. La courbe a d'ailleurs le point k pour sommet, est tangente en l_1 et l_2 aux deux génératrices communes, et ses directions asymptotiques sont les horizontales des deux plans directeurs. Le cylindre qui donne l'ombre portée par cet arc de courbe est donc un cylindre hyperbolique.

Le lecteur aura rectifié le premier terme de la formule qui donne S et qui est $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$ en sorte que $S = \frac{R^2}{6}(2\pi+3\sqrt{3})$, ce qui conduit bien au chiffre donné dans la solution.

QUESTIONS PROPOSÉES

2031. — D'un point M, variable, d'une parabole on abaisse les normales MP, MQ, autres que la normale en M.

1° Le lieu du point de rencontre de PQ avec la tangente en M est une cubique.

2° Le lieu du point de rencontre de PQ avec la normale en M est une quartique.

Construire ces deux courbes.

L. N. Barisien.

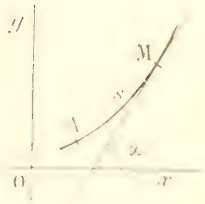
2032. — On considère les cordes MM′ d'une ellipse qui joignent les extrémités de deux demi-diamètres conjugués, et l'un des sommets A du grand axe. Construire les courbes lieux de l'orthocentre et du centre du cercle circonscrit au triangle AMM′, et calculer leurs aires.

L. N. Barisien.

2033. — Étudier la série de terme général $u_n = \log\left(\alpha + \frac{x}{n}\right)^n$

α étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et x étant un nombre quelconque.

G. Lyon, à Rodez.



2034. — Déterminer les courbes planes (C) telles que le rayon de courbure ρ en un point M et l'arc $\overline{AM} = s$ comptés à partir d'un point fixe A de la courbe soient liés par la relation $\rho^2 = k^2 - s^2$, k étant une constante.

On déterminera de préférence les coordonnées x et y de M en fonction d'un paramètre qui pourra être s.

(*Certificat de Mathématiques générales, Toulouse, juillet 1910.*)

(G. L).

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

22e Année. Juillet 1912. N° 10.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

CORRESPONDANCE

Voici une petite addition à ma solution de la question 1879 (1).

I. — La cubique envisagée est une *conchoïde de René de Sluze*, qui est définie par la relation

$$OB.BM = \text{constante} = l^2.$$

II. — L'aire comprise entre la courbe et son asymptote est finie et égale à $\frac{5\pi l^2}{4}$, c'est-à-dire cinq fois l'aire du cercle de diamètre OL.

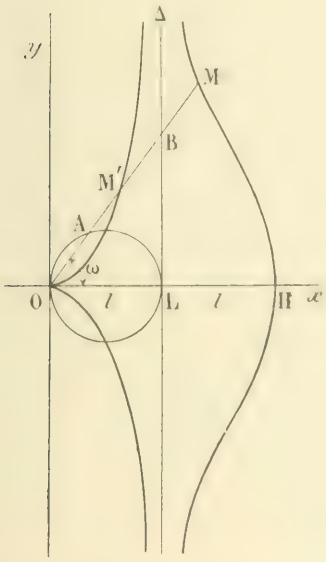
III. — Si l'on prend le point M′ symétrique de M par rapport à B, on voit que le lieu de M′ est la cissoïde droite

$$x(x^2 + y^2) - ly^2 = 0,$$

qui est encore une conchoïde de Sluze, car on a aussi $OB.BM' = l^2$.

Or, l'on sait que l'aire comprise entre la cissoïde et son asymptote Δ est $\frac{3\pi l^2}{4}$.

Il en résulte que cette cissoïde et la cubique de la question 1879 sont des courbes de Sluze *jumelles*, de même asymptote Δ.



L'aire comprise entre ces deux courbes est donc $2\pi l^2$, c'est-à-dire huit fois l'aire du cercle de diamètre OL (lequel est le cercle générateur de la cissoïde), ou deux fois l'aire du cercle de diamètre OH.

IV. — *Généralisation de la question.* — Si la corde interceptée sur la droite $x = l$ a une longueur constante $2a$, au lieu de $2l$, on voit que l'enveloppe des cercles de l'énoncé est la cubique

$$l(x^2 + y^2) = (a^2 - l^2)x^2 - l^2y^2,$$

dont l'équation polaire est

$$(1) \qquad \rho = \frac{a^2}{l}\cos\omega - \frac{l}{\cos\omega}.$$

C'est encore une conchoïde de Sluze, le produit OB.BM étant alors a^2. Pour $a = l$, on retrouve la conchoïde correspondante de l'énoncé. Pour le point M′ symétrique de M par rapport à B, avec

$$OB = \frac{l}{\cos\omega}, \qquad BM' = BM = \frac{a^2}{l}\cos\omega,$$

on a la conchoïde de Sluze *jumelle* de la conchoïde (1)

$$(2) \qquad \rho = \frac{l}{\cos\omega} - \frac{a^2}{l}\cos\omega.$$

(1) Voir *Revue*, n° de mai 1912, page 197. (École des Ponts et Chaussées, concours de 1911.)

Ces deux cubiques ont pour asymptote commune la droite $x = l$.

Les aires comprises entre chacune de ces cubiques et leur asymptote sont

$$U_1 = \frac{\pi a^2(a^2 - 4l^2)}{4l^2}, \qquad U_2 = \frac{\pi a^2(4l^2 - a^2)}{4l^2}.$$

De sorte que l'aire comprise entre les conchoïdes jumelles (1) et (2) est

$$U = U_1 - U_2 = 2\pi a^2.$$

On a donc ce résultat remarquable que *cette aire est indépendante de la longueur* l (lorsque $a < 2l$).

Si $a > 2l$, on a pour $U_1 - U_2$, $\quad \frac{\pi a^2}{2l^2}$.

Pour $a = l$, on retrouve bien les résultats précédents.

Les points d'inflexion de la cubique (1) ont pour coordonnées

$$x = \frac{4l(l^2 - a^2)}{4l^2 + a^2}, \qquad y = \frac{(4l^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}(4l^2 + a^2)}.$$

Ceux de la cubique (2) ont pour coordonnées

$$x = \frac{4l(l^2 - a^2)}{4l^2 - a^2}, \qquad y = \frac{(4l^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}(4l^2 - a^2)}.$$

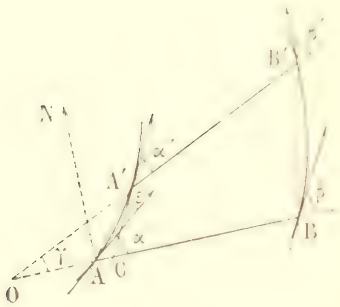
Ces résultats, et en particulier la généralisation de la question 1879, m'ont été suggérés par M. le Lt-Colonel Welsch.

E. N. BARISIEN.

SUR LE MOUVEMENT DANS UN PLAN D'UNE DROITE DE LONGUEUR CONSTANTE ET SUR LA THÉORIE DU CENTRE INSTANTANÉ

par M. **Raymond Beer**.

Soient AB la position au temps t de la droite de longueur l, A'B' sa position au temps $t + dt$. Soient α, β les angles avec AB des demi-tangentes aux trajectoires des points A et B, dans le sens du mouvement, α', β' les angles analogues aux points A', B', ε l'angle de contingence à la trajectoire du point A et γ l'angle de A'B' avec AB, qu'on supposera positif pour fixer les idées.



Relation entre les vitesses des points A *et* B. — On considère le contour AA'B'BA et on le projette sur la demi-droite AB et sur la demi-droite AN faisant avec la première l'angle $+\frac{\pi}{2}$.

En se bornant au 1er ordre, il vient

$$\begin{cases} l + v_A dt \cos\alpha + l\gamma = l + v_B dt \cos\beta, \\ 0 + v_A dt \sin\alpha + l\gamma = v_B dt \sin\beta, \end{cases}$$

v_A et v_B désignant les vitesses des points A et B.

En divisant par dt et appelant ω le quotient $\frac{\gamma}{dt}$, il vient

$$\begin{cases} v_A \cos\alpha - v_B \cos\beta = 0, & (1) \\ v_B \sin\beta - v_A \sin\alpha = l\omega, & (2) \end{cases}$$

relations bien connues entre les projections des vitesses des points A et B sur AB et sur AN.

Relation entre les accélérations des points A *et* B. — Cherchons d'abord des expressions simples de $\frac{d\alpha}{dt}$ et $\frac{d\beta}{dt}$.

On a immédiatement
$$\alpha + \varepsilon = \alpha' + \gamma,$$
d'où
$$\alpha' - \alpha = \varepsilon - \gamma;$$
et
$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\varepsilon}{dt} - \frac{\gamma}{dt},$$
$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{v_A}{\rho_A} - \omega, \qquad \frac{d\beta}{dt} = \frac{v_B}{\rho_B} - \omega,$$

ρ_A, ρ_B étant les rayons de courbure des trajectoires aux points A et B.

Cela posé, dérivons (1) et (2) en tenant compte de ces expressions.

Il vient

$$\begin{cases} \left[\frac{dv_A}{dt}\cos\alpha - v_A \sin\alpha\left(\frac{v_A}{\rho_A} - \omega\right)\right] - \left[\frac{dv_B}{dt}\cos\beta - v_B\sin\beta\left(\frac{v_B}{\rho_B} - \omega\right)\right] = 0, \\ \left[\frac{dv_B}{dt}\sin\beta + v_B\cos\beta\left(\frac{v_B}{\rho_B} - \omega\right)\right] - \left[\frac{dv_A}{dt}\sin\alpha + v_A\cos\alpha\left(\frac{v_A}{\rho_A} - \omega\right)\right] = l\,\frac{d\omega}{dt}, \end{cases}$$

et en simplifiant en tenant compte de (1) et (2),

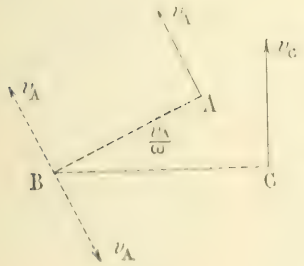
$$\begin{cases} \left(\frac{dv_A}{dt}\cos\alpha - \frac{v_A^2}{\rho_A}\sin\alpha\right) - \left(\frac{dv_B}{dt}\cos\beta - \frac{v_B^2}{\rho_B}\sin\beta\right) = +l\omega^2, \\ \left(\frac{dv_B}{dt}\sin\beta + \frac{v_B^2}{\rho_B}\cos\beta\right) - \left(\frac{dv_A}{dt}\sin\alpha + \frac{v_A^2}{\rho_A}\cos\alpha\right) = l\,\frac{d\omega}{dt}. \end{cases}$$

Si l'on remarque que $\frac{dv_A}{dt}$ et $\frac{v_A^2}{\rho_A}$ sont les composantes suivant la tangente et la normale de l'accélération de A, on voit que les parenthèses ne sont autre chose que les projections sur AB et AN des accélérations de A et B.

D'où
$$\begin{cases} \text{proj}_{AB}\ (\text{accélér. de A}) - \text{proj}_{AB}\ (\text{accélér. de B}) = l\omega^2, & (3) \\ \text{proj}_{AN}\ (\text{accélér. B}) - \text{proj}_{AN}\ (\text{accélér. A}) = l\,\frac{d\omega}{dt}. & (4) \end{cases}$$

Application à la notion de centre instantané de rotation et de centre des accélérations dans le mouvement plan d'une figure plane invariable.

L'existence de ces points remarquables est évidente si l'on traduit par un énoncé les formules (1), (2), (3), (4).



I. — Etant donnés deux points A et B d'une figure plane invariable, la vitesse du point B est la somme géométrique de la vitesse de A et de la vitesse que prendrait B par l'effet d'une rotation ω autour de A.

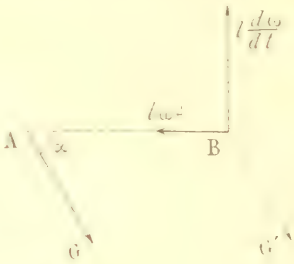
II. — L'accélération de B est la somme géométrique de l'accélération de A et de l'accélération que prendrait B par l'effet d'une rotation ω autour de A.

Centre instantané. — Si l'on porte sur la normale à la trajectoire d'un point A quelconque une longueur $\frac{v_A}{\omega}$ dans le sens convenable, on obtient d'après I, un point B de vitesse nulle. La vitesse d'un point C quelconque est normale à BC et égale à $BC \times \omega$.

Le point B est évidemment unique.

Centre des accélérations. — Je dis qu'il existe de même un point dont l'accélération est nulle.

En effet, d'après II, étant donné un point A d'accélération G, un point B situé à une distance l sur une droite inclinée de l'angle aigu α sur AG aura une accélération nulle si l'on a



$$G\cos\alpha = l\omega^2,$$

$$G\sin\alpha = l\frac{d\omega}{dt},$$

qui déterminent uniquement α et l :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{d\omega}{dt}}{\omega^2}, \qquad l = \sqrt{\frac{G^2}{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}}.$$

Alors l'accélération d'un point C quelconque de la figure est la même que l'accélération due à une rotation ω autour de B.

Application. — Formule de Savary. — Ayant établi l'existence du centre instantané, on en déduit, par une démonstration classique, que le mouvement d'une figure plane dans son plan peut s'obtenir par le roulement de la courbe C, lieu des centres instantanés dans le plan mobile, sur la courbe C_1, lieu des mêmes centres dans le plan fixe.

Calculons l'accélération du centre instantané I au temps t.

Soient I_1 sa position au temps $t + dt$, I_2 le nouveau centre à la même époque. Menons les normales aux points I, I', I_1. Nous formons le triangle OO_1O_2. La vitesse de I au temps t étant nulle, et sa vitesse au temps $t + dt$ étant $\frac{II_1}{dt}$, son accélération est $\frac{II_1}{dt^2}$. C'est donc un vecteur normal à C et égal à $\frac{II_1}{dt^2}$.

Or dans le triangle $II'I_1$ on a, en se bornant au 2e ordre,

$$II_1 = II' + I_1I'$$
$$= II' \times \ldots$$

et

$$I_1I' = \overline{OI'} - \overline{OI_1}$$
$$= II'\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right). \qquad (3)$$

R, R' étant les rayons de courbure en I' des courbes C et C_1.

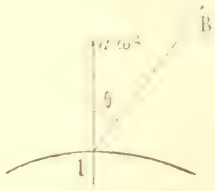
D'ailleurs $II' = \omega dt$. (4)

Égalant les deux valeurs de $\ldots$ et posant $\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{1}{a}$, il vient $II' = a\omega dt$.

Alors $II_1 = a\omega^2(dt)^2$

et l'accélération de I a pour expression $a\omega^2$.

Cela posé si on considère un point quelconque B de la figure, à une distance $IB = l$ sur une droite inclinée de θ sur la normale en I à la base, la projection de son accélération sur IB est $-\frac{v_B^2}{\rho_B}$ ou $-\frac{l^2\omega^2}{\rho_B}$.



La formule (3) appliquée au segment IB donne alors

$$\omega^2 a\cos\theta + \frac{l^2\omega^2}{\rho_B} = l\omega^2,$$

$$a\cos\theta = l\left(1 - \frac{l}{\rho_B}\right), \qquad \frac{1}{a\cos\theta} = \frac{\rho_B}{l\rho_B - l^2},$$

$$\frac{1}{\rho_B - l} + \frac{1}{l} = \frac{1}{a\cos\theta},$$

ce qui est la formule même de Savary.

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Concours de 1911.*)

(Cours spéciaux et places réservées aux sous-ingénieurs et conducteurs.)

1974. — 1° *Comment faut-il choisir les nombres réels a et b pour que l'équation*

$$(1) \qquad x^3 - 3a^2x + b = 0$$

n'ait qu'une seule racine réelle et que cette racine soit comprise entre 0 *et* 1?

2° *Quelle relation doit-il exister entre a et b pour que l'équation* (1) *ait une racine double d'une autre?*

3° *Cette relation rentre-t-elle dans les conditions obtenues au* 1°? *Pouvait-on prévoir qu'elle y rentrerait ou qu'elle n'y rentrerait pas?*

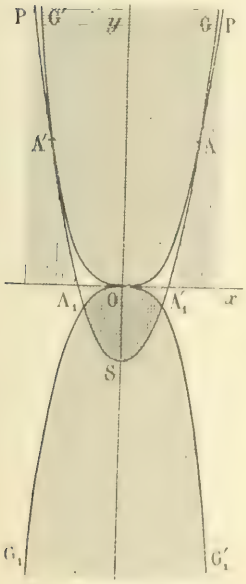
4° *Prenant* $b = 6$, *résoudre l'équation* (1) *lorsque l'une de ses racines est le double d'une autre.*

1. Pour que l'équation $f(x) = x^3 - 3a^2x + b = 0$ ait une seule racine réelle, il faut qu'on ait $4(-3a^2)^3 + 27b^2 > 0$, ou $b^2 - 4a^6 > 0$, ou encore $(b - 2a^3)(b + 2a^3) > 0$.

Cette condition exprime que le point qui a pour coordonnées a et b est situé dans la région positive de la courbe définie par l'équation

$$(y - 2x^3)(y + 2x^3) = 0.$$

Cette courbe se compose de deux cubiques symétriques par rapport à l'origine, tangentes à l'origine à l'axe des x et admettant des branches infinies paraboliques dans la direction Oy. Chacune d'elles est symétrique de l'autre par rapport à Ox et par rapport à Oy. La cubique $y - 2x^3 = 0$ est représentée par les deux arcs OG_1 et OG'_1 et l'autre $y + 2x^3 = 0$ par OG et OG'.



La région positive de l'ensemble de ces deux courbes est la région qui contient Oy. Donc le point (a, b) doit être dans cette région, que nous couvrons de hachures parallèles à Ox.

De plus, pour que l'unique racine réelle de l'équation soit comprise entre 0 et 1, on doit avoir

$$f(0)f(1) < 0, \qquad \text{ou} \qquad b(1 - 3a^2 + b) < 0;$$

et cette condition exprime que le point (a, b) doit être dans la région négative de la courbe

$$y(1 - 3x^2 + y) = 0.$$

Cette courbe se compose de l'axe des x et d'une parabole P, ayant pour axe Oy, pour sommet le point $S(x = 0,\ y = -1)$, et dont la concavité est dirigée vers les y positifs.

Cette parabole rencontre la cubique $y = 2x^3$ en des points dont les abscisses sont racines de l'équation $2x^3 = 3x^2 - 1$, ou $2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$, ou encore $(x - 1)^2(2x + 1) = 0$. On voit aussi que cette parabole touche la branche OG au point $A(x = 1,\ y = 2)$, et rencontre la branche OG_1 au point $A_1\left(x = -\frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{4}\right)$.

De même, cette parabole P touche la branche OG' au point A', symétrique de A par rapport à Oy, et rencontre la branche OG'_1 au point A'_1, symétrique de A_1 par rapport au même axe.

La région négative de la courbe $y(1 - 3x^2 + y) = 0$ se détermine aisément ; elle est recouverte de hachures parallèles à Oy.

Il en résulte que pour que l'équation $f(x) = 0$ n'ait qu'une racine réelle et que cette racine soit comprise entre 0 et 1, il faut que le point (a, b) soit dans la région du plan recouverte à la fois de hachures parallèles à Ox et à Oy, c'est-à-dire dans la région limitée par les arcs OA_1, OA'_1, SA_1, SA'_1.

2. Soient α, 2α et α' les trois racines de l'équation. Ecrivons les relations entre les coefficients et les racines, nous avons

$$(2) \qquad 3\alpha + \alpha' = 0, \qquad 2\alpha^2 + 3\alpha\alpha' = -3a^2, \qquad 2\alpha^2\alpha' = -b.$$

Pour que l'équation $f(x) = 0$ ait une racine double d'une autre, il faut que les équations (2) aient un ensemble de solutions en α et α'. De la première nous tirons $\alpha' = -3\alpha$, et en remplaçant α' par cette valeur dans les deux autres, nous obtenons le système équivalent

$$(3) \qquad \alpha' = -3\alpha, \qquad \alpha^2 = \frac{3a^2}{7}, \qquad \alpha^3 = \frac{b}{6},$$

ou encore, en remplaçant la troisième par le quotient des deux dernières,

$$(4) \qquad \alpha' = -3\alpha, \qquad \alpha^2 = \frac{3a^2}{7}, \qquad \alpha = \frac{7b}{18a^2}.$$

Pour que le système ait des solutions il faut et il suffit que l'on ait $\frac{3a^2}{7} = \left(\frac{7b}{18a^2}\right)^2$, ou

$$(5) \qquad 343b^2 - 972a^6 = 0.$$

C'est la relation demandée.

Si cette condition est remplie, l'équation admet pour racines $\alpha = \frac{7b}{18a^2}$, 2α et $\alpha' = -3\alpha$. Elle a ses trois racines réelles.

3. Il en résulte que la condition (5) ne rentre pas dans les conditions trouvées dans la première partie : puisque ces dernières conditions expriment que l'équation n'a qu'une racine réelle.

D'ailleurs, lorsque l'équation (5) est vérifiée, le point (a, b) se déplace sur l'une des cubiques

$$(6) \qquad b = \pm a^3\sqrt{\frac{972}{343}};$$

ces courbes ont la même forme que les cubiques $y = \pm 2x^3$, construites précédemment. Mais comme $\sqrt{\frac{972}{343}}$ est plus petit que 2, les cubiques (6) ne peuvent pénétrer dans la région du plan où il y a des hachures parallèles à Ox.

4. Ecrivons les équations (4) en y faisant $b = 6$, nous obtenons

$$\alpha' = -3\alpha, \qquad \alpha^2 = \frac{3a^2}{7}, \qquad \alpha = \frac{7}{3a^2}.$$

Pour que ces équations aient des solutions en α et α', il faut qu'on ait $\frac{3a^2}{7} = \left(\frac{7}{3a^2}\right)^2$ ou $\left(\frac{3a^2}{7}\right)^3 = 1$. Comme a est réel par hypothèse, on en conclut

$$\frac{3a^2}{7} = 1, \qquad 3a^2 = 7, \qquad a^2 = 1, \qquad \alpha = -3.$$

L'équation est alors $x^3 - 7x + 6 = 0$, et elle admet comme racines 1, 2 et -3.

A. ROUSSEAU, à Fournes-en-Weppes.

Bonnes solutions par MM. R. Boyer ; Théodore Cazel, à Paris ; A. Gouraud, 117e d'infanterie à Selin ; C. Jacquet, conducteur des ponts et chaussées à Grenoble ; G. Lacu, à Rodez ; A. Le Maréchand, à Paris ; R. Manen, à Albi ; Paul Remondon, 153e d'infanterie à Lérouville (Meuse) ; M. Ruis, instituteur à Chalon-sur-Saône ; L. Simon, à Fourmies ; Petre Sergescu, lycée de Séverin (Roumanie) ; P. Vergnes, 23e d'artillerie.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1983. — *On considère toutes les coniques* Γ *passant par quatre points fixes* A, B, C, D *et une conique fixe* Σ. *Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle conjugué commun à la conique* Σ *et à une conique variable* Γ.

Soient $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$ deux coniques de base du faisceau formé par les coniques Γ, et $h(x, y, z) = 0$ l'équation de la conique fixe Σ. L'une des coniques Γ a pour équation

$$f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = 0,$$

où λ a une valeur donnée, et le faisceau formé par cette conique et la conique Σ a pour équation

$$f + \lambda g + \mu h = 0,$$

μ étant un paramètre variable. Le cercle cherché, C, est harmoniquement circonscrit à toutes les coniques de ce faisceau et déterminé ainsi. L'invariant θ, qui contient les coefficients ponctuels de C et les coefficients tangentiels de la conique du faisceau, est donc nul quel que soit μ. Or il est du second degré en μ; cela nous donne trois équations linéaires par rapport aux coefficients du cercle et du second degré en λ. En éliminant λ entre elles et le coefficient constant, c, du cercle, nous aurons le lieu du centre (a, b) de ce cercle.

Mais on peut éclairer la question par les considérations suivantes : le cercle C est orthogonal aux cercles orthoptiques de toutes les coniques du faisceau μ, en particulier aux deux directrices des paraboles de ce faisceau ; son centre est au point de croisement de ces deux droites ; de plus, il passe par le centre de l'hyperbole équilatère du faisceau ; il est donc ainsi déterminé.

Chacun des coefficients ponctuels de la conique $f + \lambda g + \mu h = 0$ est de la forme $\alpha + \lambda\beta + \mu\gamma$; les coefficients tangentiels sont donc de la forme $K_i = A_i\mu^2 + 2B_i\lambda\mu + C_i\lambda^2 + 2D_i\lambda + 2E_i\mu + F_i$.

Soient $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$, les coefficients de $u^2, v^2, w^2, 2vw, 2wu, 2uv$. La condition pour que cette conique soit une parabole est $K_3 = 0$, et la directrice correspondante

$$2K_5x + 2K_4y - K_1 - K_2 = 0.$$

Soit alors (x, y) le point de rencontre des deux directrices; en exprimant que l'équation précédente est vérifiée par ce point, nous avons une équation du second degré en μ qui doit avoir les mêmes racines que l'équation $K_3 = 0$. Développons l'équation de la directrice ; elle prend la forme

$$\mu^2 P(x) + \mu Q(x) + R(x) = 0,$$

$P(x)$, $Q(x)$ et $R(x)$ étant trois fonctions linéaires. La première est $2A_5x - 2A_4y - A_1 - A_2 = 0$;
la deuxième, $4(B_5\lambda + E_5)x + 4(B_4\lambda + E_4)y - 2B_1\lambda - 2E_1 - 2B_2\lambda - 2E_2$;
et enfin, la troisième est

$$2(C_5\lambda^2 + 2D_5\lambda + F_5)x + 2(C_4\lambda^2 + 2D_4\lambda + F_4)y - (C_1\lambda^2 + 2D_1\lambda + F_1) - (C_2\lambda^2 + 2D_2\lambda + F_2).$$

En identifiant avec l'équation $K_3 = 0$, nous avons

$$\frac{P(x)}{A_3} = \frac{\frac{1}{2}Q(x)}{B_3\lambda + E_3} = \frac{R(x)}{C_3\lambda^2 + 2D_3\lambda + F_3},$$

équations qui peuvent s'écrire

$$\frac{P(x)}{A_3} = \frac{\lambda Q_1(x) + Q_2(x)}{B_3\lambda + E_3} = \frac{\lambda^2 R_1(x) + 2\lambda R_2(x) + R_3(x)}{C_3\lambda^2 + 2D_3\lambda + F_3}.$$

L'élimination de λ entre ces deux équations est évidente ; nous avons d'abord

$$\lambda = \frac{A_3Q_2(x) - E_3P(x)}{E_3P(x) - A_3Q_1(x)};$$

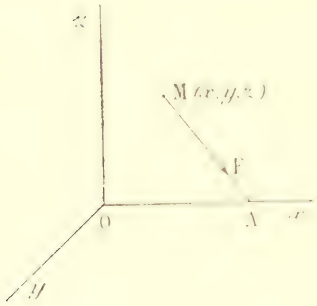
puis, en portant dans l'équation en λ^2, nous aurons une équation du troisième degré en x et y. Le lieu demandé est une cubique, en général.

R. DONTOT

MÉCANIQUE

1976. — *Étant donnés trois axes rectangulaires $Oxyz$, un point mobile $M(x, y, z)$ de masse 1 est sollicité par un point A, de masse 1, par une force attractive $F = -\mu^2 \times AM$, pendant que le point A décrit l'axe des x d'un mouvement uniforme de vitesse k; au temps $t = 0$, le point A est en O et le point M part du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ avec une vitesse initiale dont les composantes sont a, b, c. 1° Trouver les expressions de x, y, z en fonction du temps; 2° démontrer que l'hodographe du mouvement est une courbe plane, et trouver sur quelle ligne doit être le point M_0 pour que cet hodographe soit une circonférence; 3° trouver la condition que doivent remplir les conditions initiales pour que la trajectoire soit une courbe plane; dans le cas particulier où le plan de cette trajectoire est le plan des xz, et où on a en outre $\mu = 1$, $k = a$, $x_0 = 2a$, $z_0 = a$, et $c = 0$, construire la trajectoire.*

1. Les coordonnées du point A, à l'époque t, sont $x = kt$, $y = 0$, $z = 0$; celles du point M, x, y, z. Les composants de AM sont alors $x - kt$, y, z, et celles du vecteur $MF = -\mu^2 \times AM$, sont $X = -\mu^2(x - kt)$, $Y = -\mu^2 y$, $Z = -\mu^2 z$.



Les équations du mouvement du point mobile M sont donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu^2 x + \mu^2 kt,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\mu^2 y,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\mu^2 z.$$

Ce sont des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, et la solution de chacune des équations sans second membre est de la forme $A \cos \mu t + B \sin \mu t$. D'autre part, la première admet comme solution particulière $x = kt$; donc les solutions de ces équations sont de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} x = kt + A \cos \mu t + A' \sin \mu t, \\ y = B \cos \mu t + B' \sin \mu t, \\ z = C \cos \mu t + C' \sin \mu t. \end{cases}$$

Ce sont les expressions de x, y, z en fonction du temps.

2. Les coordonnées de l'hodographe sont

$$\frac{dx}{dt} = x_1 = k - A\mu \sin \mu t + A'\mu \cos \mu t,$$

$$\frac{dy}{dt} = y_1 = -B\mu \sin \mu t + B'\mu \cos \mu t,$$

$$\frac{dz}{dt} = z_1 = -C\mu \sin \mu t + C'\mu \cos \mu t.$$

Le point (x_1, y_1, z_1) se meut donc dans le plan

$$\begin{vmatrix} x_1 - k & A & A' \\ y_1 & B & B' \\ z_1 & C & C' \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation de ce plan résulte de l'élimination de $\sin \mu t$, $\cos \mu t$, considérés comme inconnues indépendantes, entre les équations qui définissent x_1, y_1, z_1. En outre, les équations paramétriques du lieu sont bien connues, et l'on sait qu'elles définissent une ellipse située dans le plan dont nous venons de donner l'équation, et qui a pour centre le point $(k, 0, 0)$.

Pour avoir maintenant les directions asymptotiques de cette ellipse, il est commode de prendre pour paramètre variable $\lambda = \operatorname{tg}\frac{\mu t}{2}$ et de remplacer $\sin \mu t$ par $\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$, et $\cos \mu t$ par $\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$.

Les paramètres directeurs du rayon OM sont alors

$$\begin{aligned} k(1+\lambda^2) &- 2A\mu\lambda + A'\mu(1-\lambda^2), \\ &- 2B\mu\lambda + B'\mu(1-\lambda^2), \\ &- 2C\mu\lambda + C'\mu(1-\lambda^2), \end{aligned}$$

et, pour $\lambda = i$, ce sont

$$A' - Ai, \qquad B' - Bi, \qquad C' - Ci.$$

Il n'y a plus qu'à exprimer que ces nombres sont les paramètres d'une direction isotrope, c'est-à-dire que

$$(A' - Ai)^2 + (B' - Bi)^2 + (C' - Ci)^2 = 0,$$

ce qui donne

$$A'^2 - A^2 + B'^2 - B^2 + C'^2 - C^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad AA' + BB' + CC' = 0.$$

Introduisons maintenant les circonstances initiales du mouvement : pour $t = 0$, x, y et z se réduisent à x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1, à a, b, c. Ceci nous donne

$$A = x_0, \qquad B = y_0, \qquad C = z_0, \qquad A' = \frac{a-k}{\mu}, \qquad B' = \frac{b}{\mu}, \qquad C' = \frac{c}{\mu}.$$

Les valeurs de x, y, z sont donc

$$\begin{aligned} x &= kt + x_0 \cos \mu t + \frac{a-k}{\mu} \sin \mu t, \\ y &= \qquad y_0 \cos \mu t + \frac{b}{\mu} \sin \mu t, \\ z &= \qquad z_0 \cos \mu t + \frac{c}{\mu} \sin \mu t, \end{aligned}$$

et celles de x_1, y_1, z_1,

$$\begin{aligned} x_1 &= k - \mu x_0 \sin \mu t + (a-k) \cos \mu t, \\ y_1 &= \quad - \mu y_0 \sin \mu t + b \cos \mu t, \\ z_1 &= \quad - \mu z_0 \sin \mu t + c \cos \mu t. \end{aligned}$$

Les relations qui expriment que ce point (x_1, y_1, z_1) décrit un cercle deviennent

$$\mu^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = (a-k)^2 + b^2 + c^2, \qquad (a-k)x_0 + by_0 + cz_0 = 0,$$

elles montrent que le point M_0 doit être sur un cercle.

3. Pour que la trajectoire soit une courbe plane, il faut qu'il existe des nombres u, v, w, r tels que $ux + vy + wz + r$ soit identiquement nul, ce qui donne

$$(ux_0 + vy_0 + wz_0)\cos \mu t + [u(a-k) + vb + wc]\frac{\sin \mu t}{\mu} + kut + r = 0.$$

Ceci exige $u = 0$, $r = 0$, $ux_0 + vy_0 + wz_0 = 0$ et $u(a-k) + vb + wc = 0$; on le voit facilement en donnant à t diverses valeurs particulières : $t = \infty$, $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, etc.

Ces relations se réduisent à $u = 0$, $r = 0$ et $vy_0 + wz_0 = 0$, $vb + wc = 0$; les deux dernières donnent $\frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c}$: elles expriment que la vitesse initiale est située dans le plan OzM_0, et l'on conçoit facilement alors que le point M reste dans ce plan.

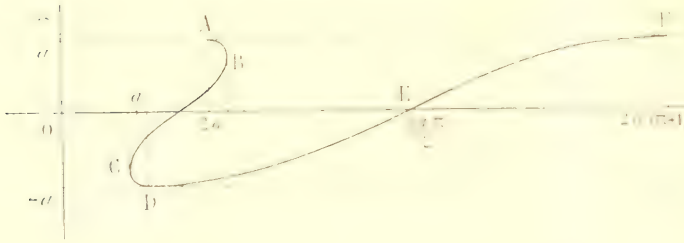
Pour que le plan de cette trajectoire soit le plan des zx, il faut en outre que y soit nul. Alors les relations donnent $y_0 = 0$, $b = 0$: si on y ajoute $\mu = 1$, $k = a$, $z_0 = 2a$, $z_0 = a$ et $c = 0$, on trouve, pour valeurs de x, y, z,

$$\begin{aligned} x &= at - 2a \cos t, \\ z &= a \cos t, \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations mettent bien en évidence ce fait que la trajectoire est une courbe plane du plan des zx.

Si on change t en $t+2\pi$, x se change en $x+2a\pi$ et z en z. Donc la branche décrite par le point M, quand t varie de 0 à 2π, se répète un nombre indéfini de fois à l'aide de translations parallèles à Ox et d'amplitudes toutes égales à $2a\pi$. Il suffit donc de construire celle-ci. Or les variations de z sont évidentes ; celles de x découlent de l'étude de la dérivée, $\frac{dx}{dt} = a(1-2\sin t)$, qui s'annule pour $\sin t = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire pour $t = \frac{\pi}{6}$ et $t = \pi - \frac{\pi}{6}$.

Alors, de 0 à $\frac{\pi}{6}$, x croît depuis $2a$ jusqu'à $a\sqrt{3} + \frac{a\pi}{6}$ et z décroît depuis a jusqu'à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; le point M décrit l'arc AB. De $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{5\pi}{6}$, x décroît depuis $a\sqrt{3} + \frac{a\pi}{6}$ jusqu'à $\frac{5a\pi}{6} - a\sqrt{3}$, et z décroît depuis $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ jusqu'à $-\frac{a\sqrt{3}}{2}$, en passant par 0, pour $t = \frac{\pi}{2}$ $\left(x = \frac{a\pi}{2}\right)$; le point M décrit l'arc BC. Ensuite, de $\frac{5\pi}{6}$ à π, x croît depuis $\frac{5a\pi}{6} - a\sqrt{3}$ jusqu'à $a\pi - 2a$ et z décroît de $-\frac{a\sqrt{3}}{2}$ à $-a$; le point M parcourt l'arc CD. Puis, de π à 2π, x croît depuis $a\pi - 2a$ jusqu'à $2a\pi + 2a$ et z croît de $-a$ à $+a$, en passant par 0 pour $t = \frac{3\pi}{2}$ $\left(x = \frac{3a\pi}{2}\right)$; le point M parcourt l'arc DEF. Il n'y a plus qu'à répéter un nombre indéfini de fois cette branche de courbe.



Bonnes solutions : MM. A. Cerreros ; R. Bouze, lycée de Nice ; J. Davaux, lycée de Toulouse ; A. Bouze, lycée de Nancy ; L. Maire, école des Anglais, à Lyon ; Raymond Chinot, à Moulins ; G. Lyon, à Rodez ; J. Dessaux, à Dijon ; A. Parmentier, à Dijon.

CONCOURS DE 1912

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

(Algèbre et Trigonométrie.)

I. — **2035.** On donne l'équation différentielle

$$\sin 2x \frac{dy}{dx} = (3 + 2\cos x - 2\sin x + \cos 2x)y + a\sin x + b\cos x + 6.$$

1° Procéder à la recherche des intégrales de cette équation.

Déterminer les valeurs que doivent prendre les constantes a et b pour que toutes les fonctions y de la variable x qui vérifient cette équation soient des fonctions rationnelles de $\sin x$ et de $\cos x$.

Dans ce cas seulement, achever la recherche de l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée.

2° Les fonctions y comprises dans la formule trouvée peuvent être représentées par des courbes K. Combien passe-t-il de ces courbes par un point quelconque du plan ?

Points exceptionnels. Montrer que certains de ces points jouissent de la propriété suivante : Les courbes K qui passent en un tel point ont, pour ce point, le même centre de courbure.

II. — **2036**. Etudier la variation de la fonction $y = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{1 + \sin x}$ et la représenter par une courbe.

On déterminera les constantes A, B, C de manière que $y - \frac{A}{\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^2} - \frac{B}{x - \frac{3\pi}{2}} - C$ tende vers zéro lorsque x tend vers $\frac{3\pi}{2}$.

On calculera, avec des erreurs inférieures à 0,1 le maximum de y et la valeur correspondante de x comprise entre 0 et 2π.

N.-B. Les candidats sont autorisés à se servir de la règle à calcul dans toutes les compositions.

(7 aux. de 7 h. à 11 h.)

Géométrie analytique et Mécanique.

I. — **2037**. 1° Trouver l'équation de la surface réglée S qui admet les trois directrices :

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = x\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y^2 + z^2 + y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0, \\ x^2 - y^2 - x = 0. \end{cases}$$

2° Montrer que S est coupée par la surface S′ qui a pour équation

$$z^2 - x^2 + y = 0$$

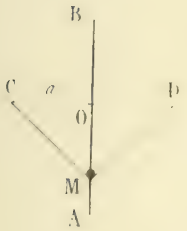
suivant la même courbe C que la surface qui a pour équation

$$x^2 + y^2 - z^2 - zx - y = 0.$$

Exprimer en fonction du paramètre $t = \frac{x}{y}$ les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe C.

3° Trouver toutes les quadriques Q ne passant pas par l'origine, ayant leurs axes parallèles aux axes de coordonnées et tangentes à la courbe C en quatre points.

II. — **2038**. Une sorte d'arbalète est formée d'un tube rectiligne et d'un fil élastique. Le fil CMD est fixé par ses extrémités à deux points C et D de l'arbalète. Il sert, par son élasticité, à lancer un projectile M guidé par le tube dont l'axe AOB est perpendiculaire au milieu O de CD.



Ouvert en B, fermé en A, le tube est évidé latéralement de A en O, de façon à laisser libre passage au fil.

Pour lancer le projectile, on l'amène à l'extrémité A de sa course, de façon à tendre le fil élastique ; puis on l'abandonne à la réaction du fil.

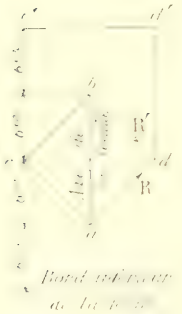
On donne $OB = OC = OD = a$; $OA = \frac{a}{3}$. Le fil a une section et une masse négligeables. Non tendu, il a pour longueur naturelle CD. Tendu suivant la ligne brisée CMD, il agit sur M, pendant le mouvement, comme la corde agit sur la poulie dans l'étude statique de la poulie mobile. Sa tension, proportionnelle à l'allongement, a pour expression $k\frac{CM + MD}{CD}$.

Le projectile est assimilé à un point matériel de masse m. L'action du tube sur lui est assimilée à celle d'un plan incliné qui aurait pour ligne de plus grande pente l'axe du tube, le coefficient de frottement f ayant la même valeur au départ et pendant le mouvement.

1° Déterminer k et f par les conditions suivantes : l'arme étant verticale, la masse m doit être portée à 112g pour que son poids suffise à faire descendre le fil élastique jusqu'au point A. Cette masse demeure en A pour toutes les positions de BA faisant avec la verticale ascendante un angle θ inférieur à $\frac{\pi}{2}$; mais elle part dès que θ dépasse $\frac{\pi}{2}$.

2° Avec les valeurs trouvées pour k et f, mais pour les différentes valeurs imaginables de m, établir en fonction de θ la portée de l'arbalète, c'est-à-dire la distance du point B de l'arbalète au point de chute du projectile sur le plan horizontal du point B.

(8 aux. de 7 h. à 11 h.)



Épure de géométrie descriptive.

2039. — Le carré *abcd* représente la projection horizontale d'un tétraèdre régulier ABCD dont les arêtes ont 12cm de longueur, l'arête de bout AB étant au-dessus de l'arête horizontale CD, projetée verticalement en *c'd'*.

Dans le plan horizontal de l'arête CD, on considère les deux droites qui ont pour projections horizontales *ad* et *bc*. Par ces droites, on fait passer deux paraboloïdes ayant pour génératrice commune AB et pour plan directeur commun un plan perpendiculaire à AB.

1° Représenter par ses deux projections le solide compris dans la sphère circonscrite au tétraèdre, au-dessus du plan horizontal de l'arête CD et au-dessous des deux paraboloïdes ;

2° Figurer les ombres déterminées sur ce solide par des rayons lumineux dont la direction a pour projections R et R'.

(10 min. de 7 h. à 11 h.)

Calcul.

2040. — La corde AB et la flèche CM d'un arc de cercle AMB ont pour longueurs : AB = 31m,30 et CM = 1m,15.

1° Calculer la longueur l de l'arc AMB par les tables de logarithmes à cinq décimales, avec l'approximation que ces tables comportent.

2° Calculer l avec la même approximation, sans faire usage des tables.

(10 min. de 5 h. à 6 h.)

Physique.

I. — Le conducteur creux. Ses propriétés et ses applications électriques.

II. — **2041.** Soit un crown et deux flints c, F' et F''. Leurs indices de réfraction pour la raie D sont respectivement $n = 1{,}510\,07$, $n' = 1{,}575\,24$ et $n'' = 1{,}649\,85$. La dispersion de chacun de ces trois verres, dans le spectre visible, est définie par le tableau suivant qui fait connaître les valeurs de l'accroissement δn de l'indice quand on passe de la raie D respectivement aux raies C, Tl, F, H_γ.

	δn	$\delta n'$	$\delta n''$
C	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Tl	+ 0,00280	+ 0,00449	+ 0,00616
F	+ 0,00603	+ 0,00991	+ 0,01382
H	+ 0,01085	+ 0,01831	+ 0,02576

On forme avec le crown c une lentille mince biconvexe L dont les rayons de courbure antérieur R_1 et postérieur R_2 ont pour valeurs absolues respectivement 0m,50 et 1m.

1. Calculer la convergence $\frac{1}{f}$ et la distance focale f de la lentille L pour la raie D.

2. Dans le but d'achromatiser la lentille L pour les raies D et F, on veut construire, au moyen du flint F', une lentille L' destinée à être collée sur la face de 1m de rayon. Calculer :

1° Le deuxième rayon de courbure R'_2 de la lentille L' ;

2° La convergence $\frac{1}{\varphi}$ et la distance focale φ de la lentille composée LL'.

3. Résoudre le même problème en remplaçant le flint F' par le flint F''.

4. Examiner les aberrations chromatiques de L, de LL' et de LL'' pour les raies C, Tl et H_γ, par rapport à la raie D, de façon à classer les trois lentilles par ordre de préférence à ce point de vue.

5. Une lentille composée LL' étant achromatisée pour deux raies D et F, trouver une expression qui caractérise son aberration chromatique pour une troisième raie H et qui soit seulement fonction des six nombres suivants : n et n', indices de la raie D ; f, f', h et h', accroissements de ces indices quand on passe de la raie D respectivement à la raie F et à la raie H.

On indiquera, dès le début, avec précision les conventions de signes.

Les calculs seront faits avec l'approximation de la règle à calcul.

(7 quart. de 2 h. à 5 h.)

Chimie.

I. — Les acides phosphoriques ; préparation, caractères.

II. — **2042.** On traite de l'acide azotique par un excès d'un mélange de sulfate ferreux et d'acide sulfurique, puis on soumet le gaz provenant de cette réaction à la température du rouge vif.

Le gaz qui a ainsi subi l'action de la chaleur et qui provenait de la décomposition d'un poids d'acide azotique correspondant à $6^g,30$ de AzO^3H, est mélangé au gaz résultant de l'attaque de $5^g,85$ de chlorure de sodium par un excès d'acide sulfurique concentré ; puis on fait passer ce mélange sur des boules d'argile imprégnées de chlorure de cuivre et maintenues à une température de 450° environ. Il se produit une réaction qui donne naissance à un gaz A.

Ce gaz A, après avoir été desséché, est dirigé sur un poids de 6^g de sodium légèrement chauffé ; on observe que le métal subit, dans ces conditions, une augmentation de poids de $4^g,616$.

Déduire de ces données la composition qualitative et quantitative du gaz A, après dessiccation.

D'autre part, le produit de l'attaque du sodium par le gaz A est traité par l'eau et le liquide qui en résulte est additionné d'une solution d'azotate d'argent ; il se forme un précipité. En indiquer la composition ; dire s'il se modifie sous l'action de la chaleur et en donner le poids après calcination à la température de 500°.

N. B. — On admettra qu'à la température à laquelle le sodium a été chauffé au contact du gaz A, il ne peut pas se combiner à l'hydrogène.

Poids atomiques : $Cl = 35,5$; $O = 16$; $Na = 23$; $Az = 14$; $Ag = 108$.

(Sciences, 2 h. ; 1 h.)

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Groupe I.

Mathématiques.

2043. — On considère trois axes Ox, Oy, Oz, les axes Ox et Oy étant rectangulaires.

On donne trois circonférences réelles (C_1), (C_2), (C_3) rencontrant l'axe Oz et situées dans des plans distincts, parallèles au plan xOy ; on désigne par O_1, O_2, O_3 les centres de ces circonférences et par $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ leurs coordonnées.

1° Former l'équation des quadriques passant par deux des courbes (C_1), (C_2), (C_3).

Toute conique rencontrant chacune des courbes (C_1), (C_2) en deux points à distance finie est située avec (C_1) et (C_2) sur une même quadrique.

A quelles conditions doivent satisfaire les données pour que (C_1), (C_2), (C_3) soient situées sur une même quadrique ?

On supposera dans la suite que ces conditions ne sont pas vérifiées.

2° Déterminer les plans P coupant chacune des trois courbes (C_1), (C_2), (C_3) en deux points à distance finie, les six points obtenus étant situés sur une même conique, soit (Σ).

Montrer que les plans P sont parallèles à une direction fixe.

Lorsqu'on assujettit les plans P à passer par un point donné R, la conique Σ engendre une surface cubique (S).

Pour quels points R la surface (S) est-elle décomposée, c'est-à-dire formée d'un plan et d'une quadrique ?

Comment se coupent deux surfaces (S) ?

3° Toute surface cubique passant par (C_1), (C_2), (C_3) peut-elle être obtenue d'après la génération précédente ?

On formera l'équation de la surface et on cherchera à décrire à l'aide de surfaces cubiques décomposées vérifiant les conditions imposées.

4° On choisit les circonférences (C_1) et (C_2) de rayon nul (O_1 et O_2 étant alors sur Oz), les plans des circonférences étant symétriques par rapport au plan xOy et le centre de la circonférence (C_3) dans le plan xOz.

On désigne par (S_1) la surface (S) correspondant à ces données et passant par les axes Ox et Oy.

Les sections de la surface (S_1) par les plans parallèles à xOy et par les plans passant par Oz comprennent des circonférences (C) et des hyperboles (H).

Indiquer la forme de la surface (S_1) en traçant ces sections.

5° Exprimer les coordonnées d'un point quelconque de la surface (S_1) à l'aide de deux paramètres fixant la position des plans des courbes (C) et (H) passant par ce point.

Les tangentes aux courbes de l'une des familles (C) ou (H) aux points de rencontre avec une courbe déte-

trairement choisie dans l'autre famille engendrent une surface réglée. De quelle nature sont les surfaces réglées ainsi obtenues ?

Comment sont constitués les cônes circonscrits à la surface (S_1) et dont les sommets sont situés sur Oz ? les cylindres circonscrits dont les génératrices sont parallèles au plan xOy ?

(Durée : 6 heures.)

2044. — Un point matériel M, de masse égale à un gramme, est attiré par un point fixe O avec une force mesurée en unités C. G. S. par $\frac{1}{r^3}$, r désignant la distance OM. (Force inverse du cube de la distance.)

1° Discuter la forme de la trajectoire T du point M d'après la position et la vitesse de ce point en un instant particulier t_0, et caractériser sur cette courbe les deux arcs correspondant respectivement aux instants postérieurs et aux instants antérieurs à t_0.

2° Calculer les coordonnées de M en fonction du temps. Indiquer les circonstances essentielles du mouvement.

3° La valeur arithmétique de la vitesse à l'instant t_0 étant donnée et supposée égale à v_0, déterminer le domaine où doit se trouver M à ce même instant pour que M décrive une spirale, quelle que soit la direction initiale du mouvement. M n'appartenant pas à ce domaine à l'instant t_0, dans quel angle doit être dirigée la vitesse v_0 pour que l'arc suivi par M appartienne à une spirale ?

4° Déterminer, quand elles existent, les asymptotes de T. Pour une des branches τ de T et son asymptote A, calculer l'aire comprise entre τ, A et deux rayons vecteurs issus de O.

5° Etant donnés deux points M_0 et M, déterminer les valeurs de v_0 telles que le mobile partant de M_0 avec une vitesse initiale égale à v_0 et perpendiculaire au rayon vecteur OM_0 passe en M dans le cours ultérieur de son mouvement. *(Durée : 4 heures.)*

Physique.

I. — Comment trouve-t-on expérimentalement les positions des foyers et des plans principaux d'un système optique centré dont l'épaisseur n'est pas négligeable ? (Les milieux extrêmes sont identiques.)

Si l'on désire seulement la valeur de la *distance focale principale*, quels procédés pourra-t-on employer pour la mesurer ? On prendra comme exemple un objectif photographique.

Montrer qu'on peut trouver la distance focale d'un objectif en faisant l'expérience suivante : un objet plan, normal à l'axe de l'objectif, donne une image réelle que l'on reçoit sur un écran E ; on mesure le rapport g_1 des dimensions de l'image et de l'objet. Ceci fait, on déplace l'objet suivant l'axe optique de façon que l'image reste réelle, mais se forme à une distance de l'objectif nettement différente. On cherche de quelle longueur l il faut déplacer (parallèlement à l'axe) l'écran E, à partir de sa position primitive, pour que l'image soit à nouveau exactement au point sur cet écran. Enfin on détermine la nouvelle valeur g_2 du rapport des dimensions linéaires. — Cette méthode est employée pour des objectifs de microscope. Indiquez brièvement comment vous disposeriez pratiquement l'expérience dans ce cas particulier.

II. — **2045**. Une bouteille de verre est munie d'un système de fermeture qui permet de la fermer hermétiquement et d'isoler à l'intérieur un volume exactement défini. Toutefois la dilatation de l'enveloppe (coefficient de dilatation cubique $k = 0{,}000025$) peut faire varier légèrement le volume ainsi emprisonné. On emporte cette bouteille au sommet du mont Blanc. Là, on la remplit d'air *sec* à la pression atmosphérique et à la température ambiante $(t_1 = -5°{,}0)$ et on la ferme. Soit m la masse de l'air sec contenu dans la bouteille, V_1 son volume actuel.

La bouteille fermée est emportée dans un laboratoire, à Paris, où on fait les opérations suivantes :

A. On mesure avec un baromètre normal la pression atmosphérique et on fait la correction de température. Soit $H = 764{,}9$ millimètres cette pression corrigée qui est ainsi évaluée en millimètres de mercure à 0 degré.

B. On place sur un des plateaux d'une balance une tare de 2000 grammes, à laquelle on ne touchera pas par la suite, sur l'autre plateau la bouteille et une masse $P_1 = 1684{,}9$ grammes nécessaire pour établir l'équilibre.

C. On plonge alors le col de la bouteille dans un large cristallisoir renfermant de l'eau distillée. Cette eau est à la température ambiante $t_2 = +17°{,}0$, sa densité est $d = 0{,}999$. On ouvre la bouteille : au bout d'un certain temps, pendant lequel l'air qui y est contenu prend la température de l'eau et se sature de vapeur, le niveau de l'eau à l'intérieur se fixe à une hauteur $h = 81{,}5$ millimètres au-dessus du niveau extérieur. On ferme alors la bouteille, on s'assure que le niveau de l'eau à l'intérieur n'a pas changé : l'air humide contenu dans la bouteille a ainsi gardé le même volume v. La bouteille, essuyée extérieurement avec soin, est placée sur le même plateau de la balance. Il faut maintenant, pour rétablir l'équilibre, placer à côté d'elle une masse $P_2 = 1326{,}4$ grammes.

D. Enfin on remplit, complètement cette fois, la bouteille d'eau à la même température [illegible] au cristallisoir, et on la pèse encore comme précédemment. Il faut cette fois, pour l'équilibre, une masse $P_3 = 704,4$ grammes.

Pendant ces diverses opérations, ni la température ambiante, ni la pression atmosphérique n'ont varié de quantités appréciables.

On demande :

1° De calculer le volume v occupé par l'air dans la bouteille au moment où on l'a fermée, dans l'expérience C, et le volume intérieur V_2 de la bouteille à ce moment ;

2° D'évaluer avec la même unité que H, c'est-à-dire en millimètres de mercure du baromètre du laboratoire, supposé à 0 degré, la pression atmosphérique x qui existait au sommet du mont Blanc au moment où la bouteille y avait été fermée ;

3° Quelle serait la marche à suivre si l'on voulait, connaissant cette valeur de x, calculer la quantité de chaleur qui était nécessaire ce jour-là au sommet du mont Blanc pour porter 1 kilogramme d'eau à sa température d'ébullition et pour la transformer en outre complètement en vapeur ?

4° Si on avait consulté au sommet du mont Blanc un baromètre à mercure normal, à l'instant où on a fermé la bouteille, et qu'on ait ramené le résultat à ce qu'il aurait été à 0 degré, aurait-on trouvé exactement la valeur de x calculée précédemment ? Ne peut-on pas prévoir théoriquement une différence systématique dont on peut estimer l'ordre de grandeur ?

Montrer que la mesure, faite avec un manomètre à liquide, de la pression d'un gaz, ou de la tension maxima d'une vapeur, ou encore d'une tension de dissociation, permettrait, si elle était faite avec une précision suffisante, de comparer les valeurs de l'accélération de la pesanteur aux différents points du globe. Indiquer brièvement les avantages et les inconvénients de cette méthode, comparée à celle habituellement employée.

Données numériques :

Tension maxima de la vapeur d'eau à 17° : $f = 14,4$ millimètres de mercure (Regnault).
Densité du mercure à 0° : $D = 13,60$.
Altitude du mont Blanc : 4810 mètres.
Altitude du Laboratoire à Paris : 60 mètres.
Latitude du mont Blanc : 46°.
Latitude de Paris : 49°.
Valeur de g pour un point au niveau de la mer et de latitude L :

$$g = 980,61(1 - 0,00255 \cos 2L).$$

(Durée : 5 heures.)

Groupe II.

Physique.

I. — Lois de l'électrolyse.

II. — **2046**. 1° Quel est le diamètre de l'image réelle du soleil donnée par une lentille convergente de 50 centimètres de distance focale et dont l'axe optique est dirigé vers le centre du soleil ? Le soleil est vu de la terre sous le même angle qu'un disque de 1 centimètre de diamètre placé normalement à la ligne de vue à 108 centimètres de l'œil.

2° Soit k le rapport entre les dimensions linéaires de l'image réelle d'un objet, donnée par une lentille convergente, et celles de l'objet. L'objet est plan et son plan est normal à l'axe optique, la lentille a une distance focale f. Quelle est la distance D, comptée sur l'axe, entre l'objet et son image ? Discuter l'expression trouvée en prenant comme variable le rapport k.

3° Un objet lumineux a la forme d'un disque circulaire plan placé verticalement ; on ne peut déplacer cet objet. A une distance $D = 250$ centimètres se trouve un mur parallèle au plan de l'objet et sur lequel est fixé un grand écran blanc. Quelle lentille convergente faudrait-il avoir pour qu'on puisse former sur cet écran une image dont les dimensions soient deux fois plus grandes que celles de l'objet ?

4° Si l'on ne dispose pas de la lentille nécessaire, mais d'une lentille ayant une distance focale plus grande, montrer qu'on peut encore avoir sur l'écran une image ayant les dimensions exigées, mais dans laquelle on verra plus sur la perpendiculaire à l'écran passant par le centre de l'objet, en faisant réfléchir les rayons successivement sur deux miroirs plans, parallèles, faisant tous deux un angle dièdre de 45 degrés avec le plan de l'écran et placés à une distance convenable.

5° Si enfin on ne possède que des lentilles dont la distance focale est trop courte pour obtenir directement

sur l'écran l'image voulue, montrer qu'on peut encore arriver au résultat cherché en employant deux lentilles traversées successivement par les rayons lumineux et dont les axes optiques se confondent avec la perpendiculaire abaissée du centre de l'objet sur l'écran, pourvu que l'une de ces lentilles soit convergente et ait une distance focale exactement double de celle de l'autre.

(*Durée : 6 heures.*)

Chimie.

I. — *Hydrogène.* — Procédés pratiques de préparation et applications ; propriétés physiques et chimiques ; méthodes générales d'hydrogénation en chimie minérale et en chimie organique.

II. — **2047**. *Application.* — Analyse d'une dolomie (carbonate double de calcium et de magnésium).

a On attaque 0,469 gramme de la matière à analyser par de l'acide chlorhydrique étendu. Il se dégage un gaz (*b*) dont on mesure le volume, et on obtient une dissolution. Celle-ci est rendue franchement ammoniacale, puis additionnée d'oxalate d'ammoniaque en excès. Il se forme un précipité que l'on sépare et une dissolution (*c*) que l'on met à part.

Le précipité est redissous dans une petite quantité d'acide chlorhydrique. A la solution ainsi obtenue on ajoute de l'acide sulfurique étendu et l'on y verse peu à peu, en chauffant légèrement, une liqueur titrée de permanganate de potassium renfermant 15,8 grammes de ce sel par litre.

Il faut verser exactement 12 cm³ de liqueur titrée pour obtenir une coloration persistante.

On calculera la composition de la dolomie et l'on verra si cette composition ne peut pas être représentée par une formule relativement simple.

On ne se préoccupera pas de l'action possible de l'acide chlorhydrique sur le permanganate et l'on prendra :

$$O = 16, \quad C = 12, \quad Mg = 24,35, \quad Mn = 55,1, \quad K = 39,1, \quad Ca = 40,1.$$

b. Quel est approximativement le volume du gaz dégagé (*b*) à 0°, sous la pression normale de 760 millimètres de mercure ?

c. Dans la liqueur (*c*) on verse une quantité suffisante de sel ammoniac et un léger excès de phosphate de soude. Quel est le poids du précipité formé après que celui-ci aura été lavé, séché et calciné au rouge ?

On prendra $P = 31,04$.

(*Durée : 4 heures.*)

Sciences naturelles.

Adaptation aux divers régimes et genres de vie, chez les Vertébrés, des appareils servant aux fonctions de relation et de nutrition.

On développera plus spécialement ce qui a trait aux appareils locomoteur, digestif et respiratoire, en insistant sur la corrélation qui peut exister entre les modifications de ces divers appareils.

(*Durée : 4 heures.*)

Mathématiques.

I. — **2048**. Intégrer l'équation différentielle

$$y' - 2y + 4\cos x\sin x = e + \sin^2 x,$$

dans laquelle y désigne une constante réelle donnée. Discuter suivant les valeurs de y.

II. — **2049**. Une courbe plane (C) est rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy ; la normale au point M à la courbe (C) rencontre Ox en N et la parallèle à Oy menée par N rencontre au point T la tangente en M à la courbe (C).

1° Déterminer la courbe (C) de manière que la longueur NT soit égale à une longueur donnée $2a$;

2° Soit (C_0) celle des courbes C qui passe par O ; désignons par O′ celui des points de rencontre de cette courbe (C_0) avec Ox qui est le plus rapproché du point O. Démontrer que l'aire S comprise entre l'arc OM de la courbe (C_0) et les segments rectilignes MN et NO est proportionnelle à l'abscisse du pied M de la normale ; calculer l'aire S_0 comprise entre l'arc OO′ et la corde OO′.

3° Déterminer la position du point M de manière que

$$S = \frac{1}{4} S_0,$$

et calculer ses coordonnées avec deux décimales exactes en supposant, pour ce calcul, $a = 1$.

(*Durée : 4 heures.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

2050. — On donne une ellipse (E) et un point P dans son plan.

1° Montrer qu'il existe une infinité de triangles circonscrits à (E) et conjugués à l'hyperbole d'Apollonius relative au point P.

2° Trouver le lieu des sommets de ces triangles, le lieu des centres des cercles inscrit et exinscrits, du centre du cercle circonscrit et l'enveloppe de ce cercle.

A. Desboves.

2051. — On considère une conique (C) et les tangentes PA, PB issues du point P. Le cercle circonscrit au triangle PAB rencontre (C) en deux autres points, C et D.

1° Montrer que le pôle P′ de CD par rapport à la conique (C) est sur le cercle PAB.

2° P décrivant une courbe (Γ), P′ décrit une courbe (Γ′); relation entre (Γ) et (Γ′).

A. Desboves.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

2002. — *Démontrer la formule de sommation*

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\cdots+\frac{1}{n^2-1}=\frac{(n-1)(3n-2)}{4n(n+1)},$$

et en conclure la série

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\cdots=\frac{3}{4}.$$

Première solution. — On a identiquement

$$\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right].$$

Donnons à n successivement les valeurs $2, 3, \ldots, n-1, n$; nous obtenons

$$\frac{1}{2^2-1}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}\right],$$

$$\frac{1}{3^2-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right],$$

$$\frac{1}{4^2-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(n-1)^2-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right],$$

$$\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right].$$

Ajoutons membre à membre, nous avons

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\cdots+\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]$$

ou, en simplifiant,

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\cdots+\frac{1}{n^2-1}=\frac{(n-1)(3n-2)}{4n(n+1)}.$$

Le second membre est le quotient de deux polynomes du deuxième degré en n ; lorsque n augmente indéfiniment, ce quotient a pour limite le rapport des coefficients de n^2, c'est-à-dire $\frac{3}{4}$.

L. NAUCELLE.

Deuxième solution. — La formule est vraie pour $n = 2$: car pour cette valeur le premier membre se réduit à $\frac{1}{2^2 - 1}$ ou à $\frac{1}{3}$, et le second membre, $\frac{(n-1)(3n+2)}{4(n+1)}$, prend la valeur $\frac{1.8}{4.2.3}$, ou $\frac{1}{3}$.

Il suffit alors de démontrer que si la formule est vraie pour n, elle est encore vraie pour $n+1$; tout revient à établir que l'on a

$$\frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Le premier membre s'écrit successivement

$$\frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \quad \text{ou} \quad \frac{(n-1)(3n+2)(n+2) + 4n(n+1)}{4n(n+1)(n+2)},$$

ou encore $$\frac{n^2(3n+5)}{4n(n+1)(n+2)}, \quad \text{ou enfin} \quad \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}.$$

R. MANEN, à Albi.

Bonnes solutions par MM. A. Bias, à Versailles ; A. Boyer, lycée de Nancy ; R. Bouez, lycée de Nice ; Raymond Cartot, à Moulins ; André Cornetors, 147e d'Infanterie, à Sedan ; Pierre Dumas, à Nancy ; L. Dorter, élève à l'école normale supérieure ; R. Dufresne, lycée Charlemagne ; Maurice Fourniat, école des Anglais, à Lyon ; M. Gomiteau, école des Anglais ; Graire, lycée Saint-Louis ; G. Lacr, à Douai ; J. Le Bras ; B. Malvesi, à Dijon ; Louis Pessiot, 12e d'Infanterie, à la Fère ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; M. Roux, instituteur à Chelon-sur-S... ; N. S. Nasry, 91e d'artillerie ; E. Simon, à Courtrines ; M. Wilmet, lycée Saint-Louis.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1981. — *Soient S et S₁ les centres de similitude d'un cercle variable Γ avec deux cercles C et C′ qu'il coupe orthogonalement. Trouver l'enveloppe de la droite SS₁ et le lieu du milieu de SS₁.*

Prenons pour axe des x la ligne des centres de C et C′ et pour axe des y leur axe radical. Les équations de ces cercles sont

$$(x-a)^2 + y^2 = R^2,$$
$$x^2 + (y-a')^2 = R'^2,$$

avec la condition

$$(1) \qquad a^2 - R^2 = a'^2 - R'^2.$$

Le centre d'un cercle Γ orthogonal à C et à C′ est situé sur leur axe radical, c'est-à-dire sur Oy. L'équation générale de ces cercles est donc

$$x^2 + (y-\beta)^2 = \gamma^2,$$

avec la relation $$\alpha^2 - \beta^2 + R^2 = \gamma^2.$$

Par suite, en tenant compte de (1), on a

$$\gamma^2 = \beta^2 + a^2 - R^2 = a'^2 - R'^2 + \beta^2 = AX.$$

Soient S et S_1 les centres de similitude externe et interne de C et Γ, S′ et S'_1 les centres de similitude externe et interne de C′ et Γ.

Les coordonnées de ces quatre points sont

$$S \begin{cases} x = \dfrac{a\gamma}{\gamma - R}, & y = -\dfrac{\gamma R}{\gamma - R} \end{cases} \qquad S_1 \begin{cases} x = \dfrac{a\gamma}{\gamma + R}, & y = \dfrac{\gamma R}{\gamma + R}. \end{cases}$$

$$S' \begin{cases} x = \dfrac{a'\gamma}{\gamma - R'}, & y = -\dfrac{\gamma R'}{\gamma - R'} \end{cases} \qquad S'_1 \begin{cases} x = \dfrac{a'\gamma}{\gamma + R'}, & y = \dfrac{\gamma R'}{\gamma + R'}. \end{cases}$$

Outre la droite SS′ de l'énoncé, on a donc encore trois autres droites, $S_1S'_1$, SS'_1, S_1S'.

L'équation de SS′ est

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \dfrac{a\rho}{\rho - R} & -\dfrac{\beta R}{\rho - R} & 1 \\ \dfrac{a'\rho}{\rho - R'} & -\dfrac{\beta R}{\rho - R'} & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

et devient, après développement,

$$\beta(R' - R)x + y\rho(a' - a) - aR' + a'R) - \rho(aR - aR') = 0.$$

Or cette droite passe par le point fixe

$$x = \frac{aR' - a'R}{R' - R}, \qquad y = 0,$$

qui est le centre de similitude externe des cercles C et C′.

On trouverait de même que la droite S_1S_1' a pour équation

$$\beta(R' - R)x - y\rho(a' - a) + a'R - aR) + \rho(a'R - aR') = 0;$$

elle passe aussi par le centre de similitude externe de C et C′.

Enfin, les deux droites SS_1' et S_1S', qui ont pour équations

$$\beta(R + R')x - y\rho(a' - a) - a'R - aR) - \rho(aR + aR') = 0,$$
$$\beta(R + R')x + y\rho(a' - a) - a'R - aR) - \rho(aR + aR') = 0,$$

passent par le centre de similitude interne de C et C′.

Lieu du milieu des droites SS′, S_1S_1, SS_1, S_1S'. — Les coordonnées du milieu de SS′ sont

$$2x = \rho\left(\frac{a}{\rho - R} + \frac{a'}{\rho - R'}\right), \qquad 2y = -\beta\left(\frac{R}{\rho - R} + \frac{R'}{\rho - R'}\right).$$

Or, de ce que $\rho^2 - \beta^2 = k^2 = (a^2 - R^2) = (a'^2 - R'^2)$, on en déduit $\rho = k \operatorname{tg} \varphi$, $\beta = k \sec \varphi$.

Or, si l'on pose $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} = t$, il en résulte $\rho = \dfrac{2kt}{1 - t^2}$, $\beta = \dfrac{k(1 + t^2)}{1 - t^2}$.

Les coordonnées du point considéré sont donc, en fonction de t,

$$(2) \qquad \begin{cases} x = kt\left[\dfrac{a}{2kt - R(1 - t^2)} + \dfrac{a'}{2kt - R'(1 - t^2)}\right], \\ y = -\dfrac{k(1 + t^2)}{2}\left[\dfrac{R}{2kt - R(1 - t^2)} + \dfrac{R'}{2kt - R'(1 - t^2)}\right] \end{cases}$$

On voit que le lieu en question est une courbe unicursale du quatrième degré.

Remarque. — *Le lieu des points* S *et* S_1 *est la conique*

$$(a^2 - 2R^2)x^2 + a^2y^2 - 2a(a^2 - R^2)x + a^2(a^2 - R^2) = 0.$$

Le lieu des points S′ *et* S_1 *est la conique*

$$(a'^2 - 2R'^2)x^2 + a'^2y^2 - 2a'(a'^2 - R'^2)x + a'^2(a'^2 - R'^2) = 0.$$

Si $a = R\sqrt{2}$, la première conique devient la parabole

$$ay^2 - 2R^2x + aR^2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad y^2 = \frac{R^2}{a}(2x - a).$$

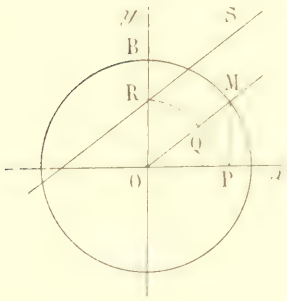
Suivant que $a \gtrless R\sqrt{2}$, cette conique est une ellipse ou une hyperbole. — Il résulte de là que le lieu des milieux des segments SS′ est un cas particulier du lieu bien plus général suivant

Étant données deux coniques C, C′ *et un point fixe* O, *une sécante variable passant par* O *rencontre* C *en* P *et* Q *et* C′ *en* P′ *et* Q′. *Le lieu du milieu des quatre segments* PP′, QQ′, PQ′, P′Q *est une quartique.*

Les points fixes étant ici les centres de similitude de C et C′, on voit que le lieu du milieu des segments SS′ et S_1S_1 sera la quartique (2). Le lieu du milieu des segments SS_1 et S_1S' sera une quartique analogue à (2).

E.-N. BARISIEN.

1987. — *On considère un cercle de centre* O, *deux diamètres rectangulaires* Ox, Oy *et un point* M *de ce cercle. Du point* M *on abaisse la perpendiculaire* MP *sur* Ox *et du point* P *on abaisse la perpendiculaire* PQ *sur* OM. *A partir du point* O, *on porte sur* Oy *et dans le sens* Oy *une longueur* $OR = OQ$; *par le point* R *on mène la parallèle* RS *à* OM. *Enveloppe de cette droite* RS *lorsque le point* M *décrit le cercle.*



Soit θ l'angle de OM avec Ox. On a successivement $OP = R\cos\theta$, $OQ = R\cos\theta$ et, par suite, l'équation de la droite RS est

$$y - R\cos^2\theta = \operatorname{tg}\theta\, x.$$

Posons $\operatorname{tg}\theta = m$, nous aurons, pour équation de la droite,

$$y = mx - \frac{R}{1+m^2}.$$

Sous cette forme, il est déjà visible que la droite enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements ; nous allons le vérifier en cherchant l'équation tangentielle. En identifiant l'équation précédente avec l'équation de la droite courante du plan

$$ux + vy + w = 0,$$

nous avons

$$m = -\frac{u}{v}, \quad \frac{R}{1+m^2} = -\frac{w}{v},$$

et, presque immédiatement

$$wu^2 + v^2 + Rv^3 = 0.$$

Ceci est bien l'équation tangentielle d'une hypocycloïde à trois rebroussements ayant un point de rebroussement à l'origine et pour tangente en ce point l'axe des y.

Pour traiter la question en coordonnées ponctuelles, nous prendrons la dérivée de l'équation par rapport à m, ce qui nous donnera

$$x = \frac{2Rm}{(1+m^2)^2},$$

et nous avons ensuite

$$y = \frac{R(1-3m^2)}{(1+m^2)^2};$$

ce sont les deux équations paramétriques de la courbe ; elles permettent de la construire facilement.

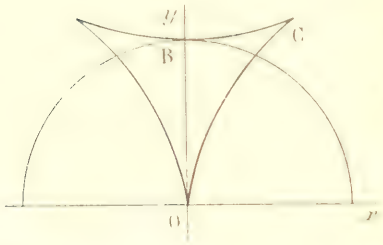
Nous remarquons d'abord qu'en changeant m en $-m$, x se change en $-x$ et y en y ; la courbe est symétrique par rapport à Oy et, en tenant compte de cette symétrie, il suffira de faire varier m de 0 à $+\infty$.

D'autre part,

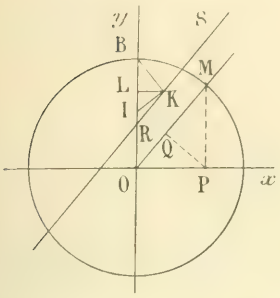
$$\frac{dx}{dm} = 2R\frac{1-3m^2}{(1+m^2)^3};$$

$$\frac{dy}{dm} = \frac{2Rm(1-3m^2)}{(1+m^2)^3}.$$

Ces deux dérivées s'annulent simultanément pour $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\theta = \frac{1}{2}$,



$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; pour cette valeur, θ est donc égal à 30°. Pour $m = 0$, $x = 0$, $y = R$; la courbe part du point le plus élevé du cercle, avec une tangente horizontale. De $m = 0$ à $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$, x et y croissent : x, depuis 0 jusqu'à $\frac{9R}{8\sqrt{3}}$, et y, depuis R jusqu'à $\frac{9R}{8}$. Ce dernier point est un point de rebroussement, où la tangente fait un angle de 30° avec Ox. nsuite x et y diminuent jusqu'à 0, la dernière tangente étant verticale. La courbe se construit et s'achève alors sans difficulté.



Solution géométrique. — Menons par le point B une droite BK qui fasse avec RS un triangle isocèle KBR et abaissons du point K une perpendiculaire KL sur Oy ; le triangle BKL est semblable au triangle MPQ, puisque l'angle LBK est égal à l'angle QMP ; d'autre part RB = QM = 2BL ; donc BK est aussi la moitié de MP et, si on élève au point K une perpendiculaire à BK, qui rencontre Oy en I, le triangle BKI est semblable au triangle OPM et IB est égal à $\frac{OM}{2}$ ou $\frac{R}{2}$. Le lieu du point K est donc le cercle décrit sur IB comme diamètre, et, comme BK et RS sont également inclinés sur le diamètre IB, la droite BK ou RS enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements. C'est une propriété classique de cette courbe.

A. ROUSSEAU, à Lorris-en-Weppes.

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Rodez ; A. Bouché, lycée de Nancy ; M. Fournier, école des Anglais, à Lyon ; J. Marcel, à Rouen ; Stévenot, élève d'artillerie à Douai ; V. Cantin, à Toulouse ; Rème, Conducteur des Ponts et Chaussées ; L. Naudelle ; A. Courtois ; L.-N. Barbier ; R. Aymé, à Moutiers ; L. Simon, à Fourmies ; L. Gobillot, école des Anglais à Lyon.

CHIMIE

1982. — *Dans une dissolution de permanganate de potassium on fait passer du gaz sulfureux jusqu'à décoloration. La liqueur, exactement neutralisée par la potasse, est évaporée à siccité. Le résidu est calciné au rouge au contact d'un excès de charbon. En lavant à l'eau, mais à l'abri de l'air, le produit de cette calcination, on obtient une dissolution dans laquelle on fait passer du gaz sulfureux à refus. La liqueur, bouillie quelques instants et filtrée, est additionnée d'iode jusqu'à persistance de ce dernier ; il faut, pour cela, en verser* **1143** *milligrammes. On fait enfin passer dans la liqueur un courant de chlore à refus et on élimine l'excès de ce gaz par une courte ébullition.*

Déterminer : 1° le poids initial de permanganate employé, 2° le nombre de molécules de potasse nécessaire pour neutraliser la liqueur finale.

Le gaz sulfureux réagit sur le permanganate de potassium d'après l'équation

$$x(2MnO^4K + 5SO^2 + 2H^2O = 2SO^4Mn + 2SO^4KH + SO^4H^2).$$

Il se forme du sulfate acide de potassium car la réaction a lieu à froid et en présence d'un excès d'acide.

En neutralisant par la potasse, on transforme tout l'acide sulfurique en sulfate neutre et on obtient une liqueur qui contient $x(3SO^4K^2 + 2SO^4Mn)$.

En calcinant avec un excès de charbon, on réduit les sulfates à l'état de sulfures avec dégagement d'oxyde de carbone et on obtient $x(3K^2S + 2MnS)$.

En lavant à l'eau, on dissout seulement le sulfure de potassium et, comme on opère à l'abri de l'air, il ne s'oxyde pas ; le sulfure de manganèse, insoluble, précipite avec l'excès de charbon non brûlé.

Le gaz sulfureux transforme le sulfure de potassium en hyposulfite et le poids de sulfure étant représenté par $3xK^2S$, la réaction doit s'écrire

$$\frac{3}{2}x(2K^2S + 3SO^2 = 2S^2O^3K^2 + S).$$

Par ébullition, l'excès de gaz sulfureux s'en va. En filtrant, on enlève le soufre. L'iode, en présence de l'eau, agit comme oxydant et donne un tétrathionate soluble :

$$\frac{3}{2}x(2S^2O^3K^2 + I^2 = 2KI + S^4O^6K^2).$$

Écrivons que le poids d'iode employé représente 1143 milligrammes :

$$\frac{3}{2}x \times 254 = 1143, \qquad \text{d'où} \qquad x = 3$$

Or le poids de permanganate est représenté par $2x\mathrm{MnO^4K}$; il est donc de 6 millimolécules ou $6 \times 158 = 948$ *milligrammes*.

Le courant de chlore oxyde l'iodure et le change en iodate :

$$\frac{3}{2}x\ 2\mathrm{KI} + 6\mathrm{Cl^2} + 6\mathrm{H^2O} = 2\mathrm{IO^3K} + 12\mathrm{HCl}.$$

Le courant de chlore oxyde également le tétrathionate et le change en sulfate et acide sulfurique :

$$\frac{3}{2}x\ \mathrm{S^4O^6K^2} + 7\mathrm{Cl^2} + 10\mathrm{H^2O} = 2\mathrm{SO^4K^2} + 2\mathrm{SO^4H^2} + 14\mathrm{HCl}.$$

Pour évaluer la quantité de potasse nécessaire pour neutraliser la liqueur finale, considérons le résultat de ces deux réactions ; chaque molécule d'acide chlorhydrique et chaque molécule de sulfate acide exige une molécule de potasse, et chaque molécule d'acide sulfurique en exige deux, ce qui fait en tout, en remplaçant x par 3,

$$\frac{3}{2}(3.26 + 2 \times 4) = 144.$$

Il faut donc employer *144 millimolécules de potasse*.

G. COUSIN, école des Anglais, Lyon.

Assez bonnes solutions de MM. [illegible] ; Paris. A. [illegible] ; Jeuxmaux, à Paris.
Solutions passables de MM. Dagnaux, à Dijon ; Mayer, à Lyon.

CONCOURS DE 1912

ÉCOLE NAVALE

Algèbre. — Analyse. — Trigonométrie.

I. — **2052.** 1° Étudier la variation de la fonction

$$y = \log \frac{1+x}{1-x},$$

où a est une constante positive inférieure à l'unité, log désigne le logarithme népérien.

2° Développer cette fonction en série entière en x. Dans quel intervalle la méthode suivie est-elle applicable?

3° Déterminer l'intervalle de convergence par l'application à la série des théorèmes classiques sur la convergence des séries à termes numériques, et étudier la série pour les limites de l'intervalle.

II. — **2053.** 1° Montrer que la fonction

$$u = \frac{1}{\cos 4\lambda - \cos 4\alpha},$$

où α désigne un arc donné, est une fraction rationnelle en $y = \cos\lambda$.

Décomposer cette fraction en éléments simples. Dans quels cas la formule de décomposition correspondant au cas général est-elle en défaut, et comment faut-il alors modifier les résultats obtenus?

(1er juin ; durée : 3 heures.)

Géométrie analytique.

2054. — Dans un plan, où l'on a choisi deux axes rectangulaires Ox, Oy, on considère un cercle variable C dont l'équation est :

$$x^2 + y^2 - [illegible]\,x + 1 = 0,$$

m désignant un paramètre variable.

1° Montrer que la polaire D, par rapport au cercle variable C, d'un point fixe A donné dans le plan, reste, en général, tangente à une conique S; discuter la nature de cette conique. Trouver le lieu des positions particulières de A pour chacune desquelles la polaire D tourne autour d'un point fixe. Trouver le lieu des positions de A pour lesquelles la conique S est une ellipse semblable à une ellipse donnée.

2° Par un point P donné dans le plan, il passe en général deux des circonférences C; soient C_1 et C_2 ces

deux circonférences. Discuter leur réalité. — Trouver le lieu des positions du point P pour lesquelles les cercles C_1 et C_2 sont orthogonaux. — Trouver le lieu que doit décrire le point P pour que la droite joignant les centres de C_1 et de C_2 tourne autour d'un point fixe donné.

(3 juin ; durée : 3 heures.)

Mécanique.

I. — **2055**. Une table de poids P repose sur un plan horizontal fixe (H). Cette table, dont la partie supérieure a la forme d'un cercle (Γ), est munie de trois pieds égaux dont les extrémités inférieures, réduites à des points, sont les projections sur le plan (H) des sommets d'un triangle ABC inscrit dans le cercle (Γ).

La table est reliée à un point fixe O par un fil flexible, inextensible et de poids négligeable, attaché au sommet A du triangle ABC. On suppose la table dans une position telle que le fil soit tendu.

Démontrer qu'on peut, sans détruire l'équilibre de la table, faire agir sur elle une force Q qui soit horizontale et dont le point d'application M, supposé différent de A, appartienne à la circonférence du cercle (Γ). Déterminer ce point M, la direction et le sens de la force Q.

Déterminer l'intensité de la force Q à partir de laquelle la table cesse d'être en équilibre.

N. B. — On désignera par α l'angle du fil AO avec la verticale : on supposera le point O plus élevé que le point A. On supposera de plus que le centre de gravité de la table, qui n'est pas homogène, est sur la verticale du centre de gravité du triangle ABC. Enfin on négligera les frottements.

II. — **2056**. Un point matériel M, de masse m, est soumis à l'action d'une force (F) dont les projections X, Y, Z sur trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz sont :

$$X = -\frac{mk^2x}{x^2+y^2+a^2}, \qquad Y = -\frac{mk^2y}{x^2+y^2+a^2}, \qquad Z = 0,$$

a désignant une longueur donnée et k une vitesse donnée.

1° Le point M étant supposé abandonné sans vitesse initiale en un point donné M_0 de Ox, démontrer que le point M reste constamment sur Ox et calculer la vitesse avec laquelle il arrive en O.

2° La position initiale du point M étant toujours supposée sur Ox, démontrer qu'on peut le lancer avec une vitesse initiale parallèle à Oy de manière à lui faire décrire une circonférence de centre O ; déterminer la grandeur de cette vitesse initiale.

3° Déterminer toutes les trajectoires du point M pour lesquelles le mouvement est uniforme et de vitesse k.

(4 juin ; durée : 3 heures.)

Calcul.

I. — **2057**. On donne les angles

$$a = 50^\circ 10' 30'',$$
$$b = 40^\circ\ 0' 40'',$$
$$c = 121^\circ 36' 20''.$$

Calculer les angles A, B, c par les formules

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\,\frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\,\frac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{a+b}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\,\frac{\sin\dfrac{A+B}{2}}{\sin\dfrac{A-B}{2}}.$$

N. B. — A, B, c sont compris entre 0 et 180°.

II. — **2058**. Calculer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4},$$

sachant que α est le plus petit angle positif dont la tangente est donnée par

$$\operatorname{tg}\alpha = 2{,}017$$

(4 juin ; durée : 2 heures.)

Épure.

Prendre comme ligne de terre le petit axe de la feuille.

On donne un point S dont les projections sont sur le grand axe de la feuille ; ce point est à trois centimètres en avant du plan vertical et à quatre centimètres au-dessus du plan horizontal.

Le point S est le sommet d'un cône de révolution dont le demi-angle au sommet est de 45° degrés et dont l'axe est horizontal. La projection horizontale de cet axe coupe la ligne de terre en un point situé à six centimètres à droite du milieu de la feuille.

On coupe le cône par deux plans perpendiculaires à son axe, menés à une même distance du sommet et de part et d'autre de ce sommet.

La distance du sommet à chacun de ces deux plans est de six centimètres. On obtient ainsi un tronc de cône de seconde espèce.

Représenter la portion solide de ce tronc de cône qui est située au-dessus du plan horizontal de projection et en avant du plan vertical de projection.

(*1re partie. Durée : 2 heures 1/2.*)

Physique.

I. **2059.** — On introduit un décigramme d'un mélange d'eau et d'alcool éthylique dans un baromètre à mercure maintenu à la température de 100° centigrades.

Après vaporisation complète du liquide, le mercure s'arrête dans le tube à 40 centimètres au-dessus de son niveau dans la cuvette. Le volume occupé par la vapeur est de 320$^{cm^3}$ dans les conditions de l'expérience.

1° Calculer la densité par rapport à l'air de la vapeur du mélange.

2° Sachant que les densités de vapeur de l'eau et de l'alcool par rapport à l'air sont respectivement 0,622 et 1,594, déduire de la mesure précédente la composition centésimale en poids du mélange.

3° Sachant que la présence dans 100 grammes d'eau d'une molécule-gramme de substance dissoute produit un abaissement de 18°,6 dans la température de congélation, on demande à quelle température commencera la solidification du mélange.

4° A quelle température faudra-t-il maintenir le mélange pour que sa solidification s'arrête au quart de son poids ?

La hauteur du baromètre normal au moment de la première expérience est de 75 centimètres à 0°. On donne la densité absolue de l'air normal, 0,001293, le coefficient de dilatation des gaz, 0,00367, et le coefficient de dilatation absolue du mercure : $\frac{1}{5550}$.

II. — Détermination du moment magnétique d'un aimant. Sa mesure en valeur absolue par la méthode de Gauss.

(*1re partie. Durée : 3 heures.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

2060. — Résoudre l'équation

$$27x^3 - 12x^2 + x - 1000x^3 - 2x = 0,$$

sachant qu'elle a une racine double, et que l'une des racines simples est le tiers de la racine double.

E. N. Barisien.

2061. — Soient dans un triangle ABC : AA′, BB′, CC′ les bissectrices intérieures et I leur point de concours. Soient aussi dans le triangle A′B′C′ : A′A″, B′B″, C′C″ les trois bissectrices intérieures et I′ leur point de concours.

Montrer que les droites AA″, BB″, CC″ sont concourantes en un point P. Le côté BC étant fixe et le triangle ABC rectangle en A, trouver le lieu des trois points I, I′ et P.

E. N. Barisien.

2062. — Soient, dans une ellipse, MN la corde normale en M, I le milieu de MN, P, Q, R les pieds des trois autres normales abaissées de I. Lorsque M parcourt l'ellipse, le centre de gravité du triangle PQR, le centre de son cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre du cercle des neuf points décrivent des courbes du sixième degré.

Discuter ces courbes et calculer leurs aires.

Dr Werner Gaedecke.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

22e Année. Août 1912. N° 11.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

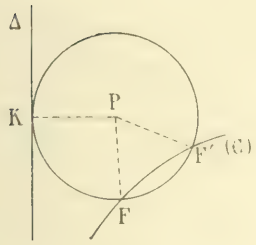
NOTE SUR L'ENVELOPPE DE PARABOLES DE DIRECTRICE DONNÉE

par M. **Carette**.

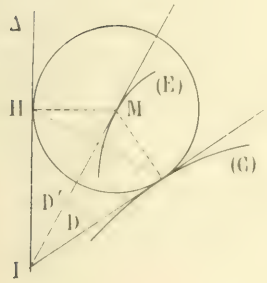
Le numéro de Novembre 1910 de la *Revue* contient l'énoncé de Problème suivant : *Trouver l'enveloppe des paraboles qui ont pour directrice une droite donnée Δ, et dont le foyer décrit une droite ou un cercle.*

Plus généralement, on peut chercher la correspondance qui existe entre le lieu (C) des foyers et l'enveloppe (E) des paraboles ayant pour directrice une droite donnée Δ.

Soit une parabole π de la famille déterminée par la directrice Δ et le lieu des foyers (C). Soit F son foyer. Pour avoir les points de contact de la parabole π et de son enveloppe, on doit chercher la limite des points communs à π et à la parabole voisine π′. Soit P un point commun à π et π′ ; il est clair que P est le centre d'un cercle S, tangent à Δ et passant par les foyers F et F′. Réciproquement, tout cercle S passant par les foyers F et F′ de π et π′ et tangent à Δ admet pour centre un point commun aux deux paraboles. Comme il y a deux cercles S et que chacun d'eux a pour limite, F′ tendant vers F, un cercle tangent à Δ et à (C) en F, chaque parabole touche son enveloppe en deux points à distance finie et ces points sont les centres des cercles tangents à la droite Δ et à la ligne (C) en F. Soit M l'un d'eux.



L'enveloppe (E) est le lieu de M. On sait qu'elle est tangente en M à la parabole π ; comme la parabole π admet pour tangente en M la perpendiculaire à HF en son milieu, on voit que, si l'on désigne par D la tangente en F et par D′ la tangente en M, D′ est l'une quelconque des bissectrices de D et Δ, et D est la symétrique de Δ par rapport à D′.



Réciproquement, étant données deux droites D et D′, telles que D soit la symétrique de D′ par rapport à une droite fixe Δ, M étant le point de contact de D′ avec son enveloppe, le point de contact de D avec son enveloppe est la projection, F, de M sur D, parce qu'un cercle touche son enveloppe en deux points symétriques par rapport à la tangente au lieu de son centre. Il y a bien une parabole de directrice Δ, tangente en M à l'enveloppe de D′ et de foyer F.

En résumé, pour que les lignes (C) et (E) soient, la première le lieu des foyers, la seconde l'enveloppe des mêmes paraboles de directrice Δ, il faut et il suffit que (E) soit le lieu des centres des cercles tangents à Δ et à (C), ou bien que les tangentes D et D′ à (C) et (E) se correspondent ainsi :

D et D′ se coupent sur la droite fixe Δ et D est symétrique de Δ par rapport à D′. On est ainsi conduit à une correspondance entre droites.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

par **M. A. Darmon**.

Le cercle de Monge d'une hyperbole équilatère se réduisant à son centre, le théorème de Faure donne comme cas particulier la propriété suivante :

Les cercles circonscrits aux triangles conjugués par rapport à une hyperbole équilatère passent par son centre,

d'où l'on déduit immédiatement :

Le lieu des centres des hyperboles équilatères conjuguées à un triangle, est le cercle circonscrit à ce triangle,

ou encore :

Les centres des hyperboles équilatères inscrites dans un triangle sont sur le cercle conjugué à ce triangle.

Considérons alors un faisceau linéaire tangentiel de coniques; les centres des deux hyperboles équilatères du faisceau sont sur les cercles conjugués aux quatre triangles formés par les quatre tangentes communes et sur le cercle circonscrit au triangle diagonal ; les centres des quatre premiers cercles sont d'ailleurs les orthocentres des triangles correspondants.

Par suite :

Les orthocentres des quatre triangles formés par quatre droites et le centre du cercle circonscrit au triangle des diagonales sont en ligne droite.

Cette droite est, comme on s'en assure aisément à l'aide du théorème de Steiner et de celui de Faure appliqué à la parabole, la directrice de la parabole du faisceau ; elle est donc perpendiculaire à la droite de Newton qui est la direction asymptotique de cette parabole.

Les cercles que nous venons de considérer formant un faisceau linéaire ponctuel, les cercles de Monge des coniques du faisceau en constituent, d'après le théorème de Faure, le faisceau conjugué. Ces cercles ont par suite deux points communs.

N. B. — La *Revue* a donné plusieurs démonstrations du théorème de Faure.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES (*Cours préparatoires.*)

Concours de 1911.

1988. — *On considère la courbe* (C), $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

1° *Construire cette courbe ;*

2° *Trouver l'équation du faisceau des droites issues de l'origine et passant par les points d'intersection de la courbe* (C) *et d'une droite* $y = ax + b$ *;*

3° *Discuter l'équation donnant les coefficients angulaires des droites de ce faisceau ;*

4° *On considère la surface* $y = xe^{\frac{1}{x}} + (x-1)z$, *qui est coupée par le plan des* xy *suivant la courbe* (C).

Transporter les axes parallèlement à eux-mêmes de manière à prendre comme nouvelle origine le point A *ayant pour coordonnées dans le premier système d'axes* $x = 1$, $y = e$, $z = 0$, *puis trouver le plan tangent, l'indicatrice de la surface et les rayons de courbure principaux en ce point* A.

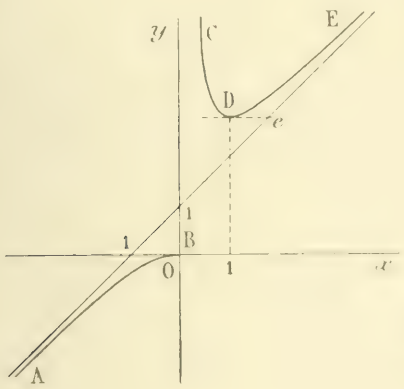
1. La fonction $y = xe^{\frac{1}{x}}$ est définie pour toute valeur de x autre que 0 ; elle est négative, quand x est négatif et positive, quand x est positif. Pour x infini, elle devient infinie comme la fonction $y = x$,

le rapport $\frac{y}{x}$ ayant pour limite 1. La courbe admet donc la première bissectrice comme direction asymptotique. Nous avons l'asymptote par le développement en série

$$y = x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + \ldots\right), \qquad y = x + 1 + \frac{1}{2x} + \ldots.$$

L'asymptote est la droite $\qquad y = x + 1,$
et l'ordonnée de la courbe diffère de celle de cette droite d'une quantité infiniment petite du premier ordre dont la partie principale est $\frac{1}{2x}$. A droite, pour x positif, la courbe est au-dessus de l'asymptote ; à gauche elle est au-dessous.

Voyons maintenant ce qui se passe à l'origine, pour x infiniment petit. A gauche de O pour $x = -\varepsilon$, y est infiniment petit et négatif ; la limite de $\frac{y}{x}$ est nulle ; donc la courbe arrive à l'origine tangentiellement à Ox et au-dessous. A droite de O, pour $x = +\varepsilon$, y peut s'écrire $y = \frac{e^{\frac{1}{\varepsilon}}}{\frac{1}{\varepsilon}}$. La limite est infinie ; la courbe est asymptote à Oy, à droite et en haut.



Complétons cette étude à l'aide de la dérivée. Nous avons

$$y' = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Tant que x est négatif, cette dérivée est positive et la fonction est croissante ; quand x est positif et plus petit que 1, la dérivée est négative et la fonction décroissante ; enfin, à partir de $x = 1$, la fonction redevient croissante. La courbe est dès lors facile à construire ; elle a l'aspect ci-contre. Le minimum, D, a pour coordonnées $x = 1$, $y = e$.

2. Si on rend l'équation de la courbe homogène ainsi que celle de la droite, on obtient les deux équations

$$y = xe^{\frac{z}{x}} \qquad \text{et} \qquad y = ax + bz.$$

Le faisceau des droites qui joignent l'origine aux points de rencontre des deux lignes s'obtient en éliminant la variable d'homogénéité z, entre les deux équations. Ce calcul nous donne

$$y = xe^{\frac{ax}{bx}}.$$

C'est une équation en $\frac{y}{x}$, qui détermine les coefficients angulaires des droites cherchées.

3. Posons $\frac{y}{x} = m$; l'équation précédente devient

$$m = e^{\frac{m}{b}}.$$

Il s'agit d'étudier cette équation. Pour cela, nous l'écrirons ainsi

$$me^{-\frac{m}{b}} = e^{\frac{1}{b}},$$

et nous poserons $\frac{m}{b} = \frac{1}{x}$; elle deviendra alors

$$\frac{b}{x}e^{-\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{b}}, \qquad \text{ou} \qquad xe^{\frac{1}{x}} = be^{\frac{1}{b}}.$$

Posons $be^{\frac{b}{a}} = c$, et coupons la courbe $y = xe^{\frac{1}{x}}$ par la droite $y = c$: les valeurs cherchées de x seront les abscisses des points de rencontre.

Si c est négatif, c'est-à-dire $b < 0$, il n'y a qu'une solution réelle.

Si c est positif et moindre que e, ce qui donne successivement

$$b > 0, \qquad e^{\frac{b}{a}} < \frac{e}{b}, \qquad \frac{b}{a} < 1 - \mathrm{L}b,$$

il n'y a aucune solution réelle.

Si c est plus grand que e, c'est-à-dire $\frac{b}{a} > 1 - \mathrm{L}b$, il y a deux solutions réelles, qui sont confondues dans le cas limite où $\frac{b}{a} = 1 - \mathrm{L}b$.

La relation $\frac{b}{a} \leqq 1 - \mathrm{L}b$ limite a en fonction de b, dans les trois derniers cas.

Supposons $b < e$; alors $\mathrm{L}b < 1$ et $1 - \mathrm{L}b$ est positif. Pour que l'inégalité $\frac{b}{a} > 1 - \mathrm{L}b$ soit satisfaite, il faut que a soit positif et plus petit que $\frac{b}{1 - \mathrm{L}b}$. L'autre inégalité, $\frac{b}{a} < 1 - \mathrm{L}b$, est satisfaite pour toutes les autres valeurs de a.

Quand $b > e$, $\mathrm{L}b > 1$ et $1 - \mathrm{L}b < 0$. L'inégalité $\frac{b}{a} > 1 - \mathrm{L}b$ n'est vérifiée que pour les valeurs positives de a et pour les valeurs négatives plus petites que $\frac{b}{1 - \mathrm{L}b}$. L'étude de la relation signalée s'achève sans difficulté.

4. La surface
$$y = (x + 1)e^{\frac{1}{x+1}} + (x - 1)z$$
contient la droite $x = 1$, $y = e$, qui est parallèle à Oz ; elle passe donc au point $x = 1$, $y = e$, $z = 0$. D'ailleurs, comme l'énoncé l'indique, elle est coupée par le plan $z = 0$ suivant la courbe (C), qui contient ce points

Cette surface est une surface réglée ; elle est coupée par le plan $x = \mathrm{C}$ suivant une droite, la droite qui a pour équations
$$x = \mathrm{C},$$
$$y = (\mathrm{C} + 1)z + \mathrm{C}e^{\frac{1}{\mathrm{C}+1}}.$$

Portons les axes parallèlement à eux-mêmes au point $1, e, 0$; nous aurons
$$y + e = (x + 1)e^{\frac{1}{x+1}} + xz,$$
et il est visible à nouveau que cette surface passe à l'origine et contient la droite $x = 0$, $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des z.

L'équation étant résolue par rapport à y,
$$y = (x + 1)e^{\frac{1}{x+1}} + xz - e,$$
posons $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, $q = \frac{\partial y}{\partial z}$, $r = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}$ et $t = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$; le plan tangent aura pour équation
$$\mathrm{Y} - y = p(\mathrm{X} - x) + q(\mathrm{Z} - z).$$

A l'origine, les valeurs de p et de q, $p = e^{\frac{1}{x+1}}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + z$, $q = x$, deviennent $p = 0$, $q = 0$, et le plan tangent est $\mathrm{Y} = 0$, la normale à ce plan est Oy.

Considérons alors une courbe de la surface passant au point O. Les cosinus directeurs de la tangente à cette courbe sont $\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\beta = \frac{dy}{ds}$, $\gamma = \frac{dz}{ds}$;

Ceux de la normale principale sont

$$\alpha_1 = \frac{d\alpha}{d\sigma} = \rho\,\frac{d\alpha}{ds}, \qquad \beta_1 = \rho\,\frac{d\beta}{ds}, \qquad \gamma_1 = \rho\,\frac{d\gamma}{ds},$$

ρ étant le rayon de courbure. L'angle θ de la normale principale avec Oy est donc donné par

$$\cos\theta = \rho\,\frac{d\beta}{ds} = \rho\,\frac{d^2y}{ds^2}.$$

Or

$$\frac{dy}{ds} = p\,\frac{dx}{ds} + q\,\frac{dz}{ds},$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = p\,\frac{d^2x}{ds^2} + q\,\frac{d^2z}{ds^2} + r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2s\,\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dz}{ds} + t\left(\frac{dz}{ds}\right)^2.$$

A l'origine, p et q sont nuls; donc nous avons

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = r\alpha^2 + 2s\alpha\gamma + t\gamma^2,$$

et, pour la section normale qui correspond à cette tangente,

$$\frac{1}{\rho} = r\alpha^2 + 2s\alpha\gamma + t\gamma^2.$$

Dans cette formule, ρ a un signe, car nous avons supposé $\theta \neq 0$ et θ peut être égal à π; ρ a le signe du trinome et devra être porté sur l'axe Oy avec son signe.

L'indicatrice a pour équation $\qquad rx^2 + 2sxz + tz^2 = 1,$

en appelant $\sqrt{\rho}$ la valeur du rayon vecteur qui va du point O au point (x, z) de l'indicatrice qui est placé sur la tangente à la section normale envisagée.

A l'origine, r prend la valeur e, car on a toujours

$$r = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{(x+1)^2}\,e^{\frac{1}{x+1}} + \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)e^{\frac{1}{x+1}}.$$

s et t sont toujours égaux à 1 et à 0. L'indicatrice a donc pour équation $ex^2 + 2xy = 1$; c'est une hyperbole.

Appelons $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ les cosinus directeurs, par rapport à Ox et à Oz, de la direction d'une tangente à la surface à l'origine des coordonnées, et R le rayon vecteur de l'indicatrice situé sur cette tangente ; nous aurons

$$R^2 = \rho = \frac{1}{e\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha}.$$

ρ étant le rayon de courbure de la section normale correspondante. Quand

$$e\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha(e + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha)$$

est positif, le rayon de courbure est porté par la demi-droite Ox ; au contraire, quand $2\,\mathrm{tg}\,\alpha + e$ est négatif, le rayon de courbure est porté par la demi-droite opposée, Ox'. Les changements de signe se font quand $\mathrm{tg}\,\alpha = \infty$ et $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{e}{2}$; soit $\frac{\pi}{2} + \varphi$ ce second angle, φ désignant un angle aigu et positif; lorsque α varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, ρ est positif ; quand α varie de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2} + \varphi$, ρ est négatif ; et enfin, de $\frac{\pi}{2} + \varphi$ à π, ρ est positif. Les deux directions $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} + \varphi$ sont celles des asymptotes de l'indicatrice.

Pour avoir les rayons de courbure principaux, il faut prendre pour α les valeurs $\frac{\varphi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}$. Nous trouvons ainsi

$$r = \frac{1}{e\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{2}{e\cos\varphi + 2\sin\varphi + e} \qquad \text{et} \qquad r = \frac{2}{-e\cos\varphi - 2\sin\varphi + e}$$

D'autre part,

$$-\cot\varphi = -\frac{e}{2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{e}, \qquad \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{4+e^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{e}{\sqrt{4+e^2}},$$

le radical désignant un radical arithmétique ; par conséquent

$$r = \frac{2}{e-\sqrt{e^2+4}} \qquad \text{et} \qquad r' = \frac{2}{e+\sqrt{e^2+4}}.$$

En rendant les dénominateurs rationnels, on trouve enfin

$$r = \frac{\sqrt{e^2+4}-e}{2}, \qquad r' = -\frac{\sqrt{e^2+4}+e}{2}.$$

MARCEL NICOLAS, à Lille.

Bonnes solutions : MM. G. LACH, à Rodez ; P. RÉMONTIN, à Létouville ; L. JARRYS ; A. COURTOIS, à Sedan ; A. RONNAUX ; L. GOBILLOT.

Assez bonne solution : M. Raymond CHIROL, à Moulins.

1989. — *On considère une poulie mobile de poids 2P, soutenue par un fil dont l'extrémité A est fixe, tandis que l'autre extrémité B est libre et tirée par une force F ayant la direction du fil. A chaque point B du plan correspond ainsi une force F. Montrer qu'il existe une fonction des forces F ; calculer cette fonction et déterminer les lignes de niveau.*

Prenons pour axe des x l'horizontale Ax et pour axe des y la verticale Ay dirigée vers le bas, ces deux droites étant situées toutes deux dans le plan de la poulie.

Désignons par x, y les coordonnées du point B et par X, Y les projections de la force F : nous allons exprimer X et Y en fonction de x et y.

Soient R le rayon de la poulie, et l la longueur du fil. Nous avons

$$l = AM + \text{arc } MN + NB,$$

ou, en désignant par α l'angle du fil AM avec l'horizontale Ax,

$$l = AM + NB + 2R\alpha.$$

D'autre part, l'abscisse x du point B est égale à la somme $Am + mn + nb$, ou à $AM\cos\alpha + \text{corde } MN + BN\cos\alpha$.

On a donc

$$x = (AM + BN)\cos\alpha + 2R\sin\alpha,$$

ou, en remplaçant AM + NB par $l - 2R\alpha$, on a

$$(1) \qquad x = l\cos\alpha + 2R\sin\alpha - 2R\alpha\cos\alpha.$$

D'autre part, d'après la théorie de l'équilibre de la poulie mobile, on a $F\sin\alpha = P$, ou $F = \frac{P}{\sin\alpha}$

Par suite, les projections de la force F sur les axes sont

$$X = \frac{P\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad Y = P.$$

Or la formule (1) définit α comme fonction de x ; on en conclut que X est fonction seulement de x et comme Y est une constante, il y a une fonction des forces. Soit U cette fonction ; on doit avoir

$$dU = X\,dx + Y\,dy.$$

Or, en différenciant la relation (1) on a

$$dx = (-l\sin\alpha - 2R\alpha\sin\alpha)\,d\alpha ;$$

on en déduit

$$dU = P\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(-l\sin\alpha + 2R\alpha\sin\alpha)\,d\alpha - P\,dy, \qquad \text{ou} \qquad dU = P(-l\cos\alpha + 2R\alpha\cos\alpha)\,d\alpha - P\,dy.$$

En intégrant, on a

$$U = P' - l\sin\alpha + 2R(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha) - Py - C.$$

On obtient ainsi la fonction des forces, α étant une fonction de x définie par la relation (1).

On en conclut que les lignes de niveau ont pour équations paramétriques

$$x = l\cos\alpha + 2R\sin\alpha - 2R\alpha\cos\alpha, \qquad y = -l\sin\alpha + 2R\cos\alpha + 2R\alpha\sin\alpha + C',$$

C' désignant une constante arbitraire.

Dans le cas particulier où l'on suppose que le rayon de la poulie est négligeable, ces équations se simplifient et deviennent $\qquad x = l\cos\alpha, \qquad y = -l\sin\alpha + C';$

elles représentent les cercles $\qquad x^2 + (y - C')^2 = l^2.$

JEAN OTTENHEIMER, 8e d'artillerie, Nancy.

MM. Ch. BAPTISTE, répétiteur aux Anglais, à Lyon ; André COURBOIS, 117e d'infanterie, à Sedan ; A. ROUSSEAU, à Fourches-en-Weppes, ont résolu la question en négligeant le rayon de la poulie.

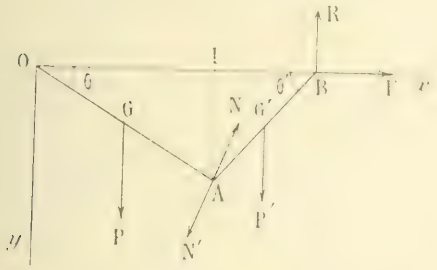
1990. — *Une tige homogène pesante* OA *est mobile autour d'un point fixe* O. *Une autre tige* AB, *également homogène et pesante, est articulée en* A *à l'extrémité de la première. Son extrémité* B *est mobile, sans frottement, sur une droite horizontale passant par le point* O. *En* B *est appliquée une force horizontale* F *située dans le plan* OAB.

Connaissant les poids des deux tiges, on demande quelle relation existe entre la grandeur de la force F *et l'inclinaison de la tige* OA.

Chercher, en particulier, pour quelle valeur de F *la tige* OA *prend une inclinaison de* 45°.

Les deux tiges sont supposées inégales. On admet que l'articulation existant en A *équivaut à deux forces, égales et contraires, appliquées l'une à la tige* OA, *l'autre à la tige* AB.

Il est presque évident que, par raison de symétrie, les deux tiges sont situées dans un même plan vertical, le plan vertical qui contient l'horizontale Ox, sur laquelle se déplace le point B. On peut d'ailleurs le démontrer de la façon suivante, en analysant les forces qui sollicitent les deux tiges.



Nous devons écrire que chacune des deux tiges est en équilibre. La tige OA a un point fixe O ; elle est soumise à l'action de son poids P, qui est vertical et appliqué au milieu G de OA, et à l'action AN de la tige AB. Pour qu'il y ait équilibre, il *faut* que les deux forces P et N soient dans un même plan contenant le point O : ce qui montre que la force N est dans le plan vertical qui passe par la tige OA.

D'autre part, la tige AB est en équilibre sous l'action N de OA, N' étant égale et opposée à N, de son poids P', de la force F et de la réaction R de Ox. On peut remplacer R et F par leur résultante F', et comme la tige AB est alors en équilibre sous l'action de trois forces N', P' et F', il *faut* que ces trois forces soient dans un même plan et se rencontrent. Ce plan sera le plan vertical contenant AB, parce qu'il contient P'.

On voit ainsi que la droite NAN' doit être située dans les plans verticaux des droites OA et AB, et doit passer par le point de rencontre (à distance finie) de P' et F' ; donc les deux plans verticaux coïncident.

1. *Équilibre de* OA. — Prenons comme axe des x l'horizontale que décrit le point B, et comme axe des y la verticale descendante. Soient l la longueur de la tige OA, P son poids, et α l'angle qu'elle fait avec Ox. Désignons en outre par X et Y les projections de la force N.

Pour que OA soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des moments algébriques des forces P et N par rapport au point O soit nulle. Les coordonnées du point A étant $l\cos\theta$ et $l\sin\theta$, le moment de N est $l\cos\theta\,Y - l\sin\theta\,X$, celui de P est $\frac{l\cos\theta}{2}P$; on a donc

$$(1)\qquad l\cos\theta\,Y - l\sin\theta\,X + \frac{l\cos\theta}{2}P = 0.$$

2. *Équilibre de* AB. — AB est soumise à l'action des quatre forces N′, P′, F et R ; celle-ci est normale à Ox puisqu'il n'y a pas de frottement. Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que la somme des projections des forces sur chacun des axes Ox et Oy soit nulle, et que la somme des moments algébriques par rapport à un point du plan soit nulle.

Projetons les forces sur Ox et Oy ; nous avons, en remarquant que les projections de N′ sont $-X$ et $-Y$,

$$(2)\qquad -X + F = 0, \qquad (3)\qquad -Y + P' - R = 0.$$

Enfin, prenons les moments par rapport au point A. Nous désignerons par l' la longueur AB et par θ' l'angle ABO. Nous avons

$$(4)\qquad \frac{l\cos\theta}{2}P - l\cos\theta\,R + l\sin\theta\,F = 0.$$

Remarquons tout de suite que le triangle OAB nous donne

$$\frac{OA}{\sin\theta'} = \frac{AB}{\sin\theta}, \qquad \text{ou} \qquad \sin\theta' = \frac{l\sin\theta}{l'}.$$

Les équations (1), (2), (3) et (4) nous permettent de calculer X, Y, R et F en fonction de θ.

Nous avons d'abord $X = F$; puis, la relation (1) nous donne

$$Y = \frac{2F\sin\theta - P\cos\theta}{2\cos\theta},$$

et de (3) nous tirons $\quad R = P' - Y = \dfrac{2P'\cos\theta + P\cos\theta - 2F\sin\theta}{2\cos\theta}.$

Remplaçons R par cette valeur dans l'équation (4), nous avons

$$F = \frac{P - P'\cos\theta\cos\theta}{2(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')},$$

et nous n'avons plus qu'à remplacer $\sin\theta'$ par $\frac{l\sin\theta}{l'}$ et $\cos\theta'$ par $\frac{\sqrt{l'^2 - l^2\sin^2\theta}}{l'}$ pour obtenir l'expression demandée de F. $\quad F = \dfrac{P - P'\cos^2\theta\sqrt{l'^2 - l^2\sin^2\theta}}{2\sin\theta\,l\cos\theta + \sqrt{l'^2 - l^2\sin^2\theta}},$

ou encore, en remarquant que $\dfrac{l}{P} = \dfrac{l'}{P'}$,

$$F = \frac{\cos\theta\,P - P\sqrt{P'^2 - P'^2\sin^2\theta}}{2\sin\theta\,P\cos\theta + \sqrt{P'^2 - P'^2\sin^2\theta}}.$$

Si $\theta = \frac{\pi}{4}$, on a $\quad F = \dfrac{(P - P')\sqrt{2P'^2 - P^2}}{2P + \sqrt{2P'^2 - P^2}}.$

G. LACH, à Rodez.

Bonnes solutions de MM. Raymond Chirol, à Moulins, et L. Gobillot, école des Anglais, à Lyon.

1991. — *On mesure l'indice d'un verre par la méthode du goniomètre. Quel est l'indice du verre pour une radiation donnée si, l'angle* A *du prisme étant de* 20°, *la déviation* D *observée (minimum de déviation) est de* 12° ?

Les équations du prisme conduisent à la formule connue

$$n = \frac{\sin \frac{A+D}{2}}{\sin \frac{A}{2}},$$

dont l'application donne ici

$$n = \frac{\sin 16^\circ}{\sin 10^\circ}.$$

Sur la règle à calcul, on trouve

$$\sin 16^\circ = 0{,}276, \qquad \sin 10^\circ = 0{,}174, \qquad n = 1{,}59$$

R. CHIROL, à Moulins.

Bonnes solutions de MM. Dagnaux et Gobillot.

1992. — *On considère deux barreaux d'acier identiques A et A' qui ont été aimantés différemment. En les faisant osciller dans le champ terrestre autour d'axes verticaux, on constate que le barreau A fait trois oscillations complètes en dix secondes alors que A' n'en fait que deux. On demande :*

a) Le rapport des moments magnétiques des deux barreaux ;

b) La position d'équilibre par rapport au méridien magnétique que prend l'équipage obtenu en fixant en croix les deux barreaux. L'équipage est supposé mobile autour d'un axe vertical ;

c) La durée d'oscillation complète, sous l'action du champ terrestre, de l'équipage obtenu en fixant l'un contre l'autre les deux barreaux, les pôles de noms contraires en regard. L'équipage est supposé mobile autour d'un axe vertical.

a) Soient M et M' les moments magnétiques des deux barreaux, I leur moment d'inertie commun, H la composante horizontale du champ terrestre. On a

$$\frac{10}{3} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MH}} \qquad \text{et} \qquad \frac{10}{2} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{M'H}}.$$

En prenant le rapport, on trouve $\frac{M}{M'} = \frac{9}{4}$.

b) Soit α l'angle que fait le barreau A avec le méridien magnétique quand l'équipage est dans sa position d'équilibre ; $\frac{\pi}{2} - \alpha$ sera l'angle que fera avec le méridien le barreau A', mais de l'autre côté. Les moments des forces appliquées respectivement aux deux barreaux sont, en valeur absolue, $M \sin\alpha$ et $M' \cos\alpha$; ils doivent être égaux, donc on a

$$M \sin\alpha = M' \cos\alpha \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{M'}{M} = \frac{4}{9}.$$

En calculant l'angle α avec la règle à calcul, on trouve

$$\alpha = 24^\circ.$$

c) Quand les barreaux sont assemblés les pôles de noms contraires en regard, le moment magnétique du système est $M - M'$ et le moment d'inertie $2I$. La durée d'oscillation est donnée par la formule

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{2I}{(M - M')H}}$$

d'où

$$\frac{1}{t^2} = \frac{(M - M')H}{8\pi^2 I}.$$

Or les deux premières équations donnent

$$\frac{MH}{4\pi^2 I} = \frac{9}{100} \qquad \text{et} \qquad \frac{M'H}{4\pi^2 I} = \frac{4}{100}.$$

d'où l'on déduit

$$\frac{(M - M')H}{4\pi^2 I} = \frac{5}{100}$$

$$\frac{1}{t^2} = \frac{1}{40} \qquad t = \sqrt{40} = 6^s,32.$$

R. CHIROL.

Solutions passables de MM. Dagnaux et Gobillot.

1993. — *Dans une bombe calorimétrique de 600$^{cm^3}$ dont la température initiale est 0° et dans laquelle on a préalablement fait le vide, on introduit du méthane jusqu'à ce que la pression atteigne 1 atmosphère; puis on ajoute de l'oxygène de manière à porter la pression à 5 atmosphères. On fait exploser le mélange et on constate que la chaleur dégagée par la réaction est de 5690 calories-grammes.*

Dans une deuxième opération, on introduit dans la bombe de l'hydrogène jusqu'à ce que la pression atteigne 2 atmosphères et on ajoute de l'oxygène de manière à porter la pression à 5 atmosphères. Après explosion, on trouve pour la chaleur dégagée le chiffre de 3650 calories-grammes.

Dans une troisième opération, on introduit dans la bombe 1 gramme de charbon de sucre et on ajoute de l'oxygène jusqu'à ce que le manomètre indique une pression de 25 atmosphères. Après inflammation, on constate que la quantité de chaleur dégagée par la combustion est de 8110 calories-grammes.

On demande de déduire des résultats qui précèdent la chaleur de formation du méthane à partir de ses éléments. On précisera les conditions expérimentales auxquelles se rapporte le chiffre obtenu.

Un volume de 600 cm³ sous la pression d'une atmosphère et à 0° représente une fraction de molécule égale à $\frac{600}{22400}$. La combustion d'une molécule de méthane dégagerait donc

$$\frac{224}{6} \times 5690 = 212\,400 \text{ calories}$$

Le même volume de 600 cm³, sous la pression de 2 atmosphères, représente $\frac{1200}{22\,400}$ molécules d'hydrogène. La combustion d'une molécule dégagerait donc $\frac{224}{12} \times 3650 = 68\,100$ calories.

Enfin, un atome de carbone pesant 12^g, sa combustion dégagerait $12 \times 8110 = 97\,300$ calories.

Or la combustion du méthane est représentée par l'équation

$$CH^4 + 2O^2 = CO^2 + 2H^2O.$$

Si on désigne par x la chaleur de formation du méthane, on a donc, en grandes calories,

$$212,4 = 97,3 + 2 \times 68,1 - x,$$

$$x = 21,1.$$

1994. — *On sait que le peroxyde d'azote présente, entre les températures de 20° et 140°, une variation rapide de la couleur et des diverses propriétés physiques. Ce phénomène correspond à la transformation réversible de Az^2O^4 en AzO^2.*

On a mesuré à la pression atmosphérique H — mm occupé par 18^g,4 de peroxyde d'azote. On a trouvé : à la température $t_1 = 27°$, un volume $V_1 = 5^l,90$,

à la température $t_2 = 140°$, un volume $V_2 = 12^l,14$.

Soit α le coefficient de dissociation du corps Az^2O^4, c'est-à-dire le rapport du nombre des molécules de Az^2O^4 dissociées au nombre total des molécules que l'on aurait si tout le peroxyde d'azote se trouvait sous forme de Az^2O^4. On demande :

1° *La valeur de α aux températures t_1 et t_2;*

2° *Le signe du phénomène thermique qui accompagne la transformation de* Az^2O^4 *en* AzO^2. *On sait d'ailleurs que ce signe ne varie pas entre les températures de* 27° *et de* 110°.

On admettra que l'on peut appliquer à Az^2O^4 *et à* AzO^2 *les lois des gaz parfaits.*

Poids atomique de l'azote, 14; *de l'oxygène*, 16. *Densité de l'oxygène*, $d = 1{,}105$.

Soit n le nombre des molécules que l'on aurait si tout le peroxyde d'azote se trouvait sous la forme Az^2O^4, $n\alpha$ le nombre des molécules dissociées; le nombre réel des molécules sera $n(1+\alpha)$. Soit V le volume moléculaire dans les conditions normales; à $t°$, le volume de $n(1+\alpha)$ molécules sera $n(1+\alpha)V\left(1+\frac{t}{273}\right)$. On aura donc les deux équations

$$n(1+\alpha_1)V\left(1+\frac{t_1}{273}\right) = V_1,$$

$$n(1+\alpha_2)V\left(1+\frac{t_2}{273}\right) = V_2.$$

Le poids moléculaire Az^2O^4 est égal à 92, donc $n = \frac{18{,}4}{92} = 0{,}2$.

Le poids moléculaire de l'oxygène est 32 et le poids spécifique de l'air normal 1,293, donc

$$V = \frac{32}{1{,}105 \times 1{,}293} = 22{,}4.$$

Les équations numériques sont donc

$$0{,}2(1+\alpha_1)22{,}4\left(1+\frac{27}{273}\right) = 5{,}90,$$

$$0{,}2(1+\alpha_2)22{,}4\left(1+\frac{110}{273}\right) = 12{,}14$$

et donnent $\alpha_1 = 0{,}20, \qquad \alpha_2 = 0{,}93.$

Une élévation de température a donc augmenté la dissociation. Il en résulte, d'après les lois du déplacement de l'équilibre, que cette dissociation doit être endothermique.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1985. — *Soient* M *un point variable d'une ellipse*, C *son centre de courbure*, P *et* Q *les pieds des deux autres normales issues de* C.

1° *La corde* PQ *est normale à une ellipse fixe;*

2° *Le lieu du point de rencontre de* MC *et* PQ *est une ellipse;*

3° *Le lieu du centre de gravité du triangle* MPQ *est une courbe du sixième degré dont l'aire est* $\frac{1}{18}$ *de celle de l'ellipse;*

4° *Le lieu du centre du cercle circonscrit à* MPQ *est une sextique dont l'aire est* $\frac{1}{12}$ *de l'aire de la développée de l'ellipse;*

5° *Le lieu du milieu de* PQ *est une sextique dont l'aire est* $\frac{1}{8}$ *de celle de l'ellipse;*

6° *Le lieu du pôle de* PQ *par rapport à l'ellipse donnée est une hexanormale.*

D'un point quelconque $C(x_0, y_0)$ on peut mener à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ quatre normales dont les pieds P, Q, P', Q' sont les points de rencontre de l'ellipse et de l'hyperbole d'Apollonius relative au point C, et dont l'équation s'écrit

$$\frac{x_0 - x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{y_0 - y}{\frac{y}{b^2}}, \qquad \text{ou} \qquad c^2xy + b^2y_0x - a^2x_0y = 0.$$

On en conclut que l'équation générale des coniques passant par les quatre points P, Q, P', Q' est

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \lambda(c^2xy + b^2y_0x - a^2x_0y) = 0.$$

Désignons par (α, β) et (α', β') les coordonnées des pôles des deux droites PQ et P'Q' par rapport à l'ellipse : l'ensemble de ces deux droites a pour équation

$$(2) \qquad \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha' x}{a^2} + \frac{\beta' y}{b^2} - 1\right) = 0,$$

et constitue une des coniques du faisceau (1). Pour une valeur convenable de λ, les équations (1) et (2) ont leurs coefficients proportionnels. Or les termes constants étant opposés, il doit en être de même des autres coefficients. Si nous écrivons que les coefficients de x^2 sont opposés ainsi que ceux de y^2, nous obtenons les formules $\alpha\alpha' + a^2 = 0, \qquad \beta\beta' + b^2 = 0,$
bien connues sous le nom de formules de Joachimstal.

Cela posé, soit $M(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ un point de l'ellipse, et soit C le centre de courbure au point M. Le point C étant sur la développée, deux des pieds de normales issues de ce point à l'ellipse, P' et Q' par exemple, sont confondus au point M : le pôle de P'Q' est précisément le point M, et les formules de Joachimstal nous donnent, α et β étant toujours les coordonnées du pôle de PQ,

$$\alpha a\cos\varphi + a^2 = 0, \qquad \beta b\sin\varphi + b^2 = 0,$$

ou

$$\alpha = -\frac{a}{\cos\varphi}, \qquad \beta = -\frac{b}{\sin\varphi}.$$

La droite PQ a donc pour équation $\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 = 0$, ou $\frac{x}{a\cos\varphi} + \frac{y}{b\sin\varphi} + 1 = 0$

1. Cherchons l'enveloppe de cette droite. Le point limite est défini par les deux équations

$$\frac{x}{a\cos\varphi} + \frac{y}{b\sin\varphi} + 1 = 0, \qquad \text{et} \qquad \frac{x\sin\varphi}{a\cos^2\varphi} - \frac{y\cos\varphi}{b\sin^2\varphi} = 0;$$

la seconde peut s'écrire

$$\frac{\frac{x}{a\cos\varphi}}{\cos^2\varphi} = \frac{\frac{y}{b\sin\varphi}}{\sin^2\varphi} = \frac{\frac{x}{a\cos\varphi} + \frac{y}{b\sin\varphi}}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = -1,$$

en tenant compte de la première. On en tire

$$x = -a\cos^3\varphi, \qquad y = -b\sin^3\varphi,$$

et on en déduit que l'enveloppe de la droite PQ a pour équation

$$(3) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0.$$

Il nous faut démontrer que cette équation représente la développée d'une ellipse.

On sait que l'ellipse $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 1 = 0$ a pour développée la courbe

$$\left(\frac{Ax}{A^2 - B^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{By}{A^2 - B^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0.$$

Cette équation représentera la même courbe que l'équation (3) si l'on a

$$\left|\frac{A}{A^2 - B^2}\right| = \frac{1}{a}, \qquad \left|\frac{B}{A^2 - B^2}\right| = \frac{1}{b}.$$

Comme nous supposons $a > b$, ces égalités montrent que A doit être plus petit que B. Il nous faut donc établir qu'on peut déterminer A et B par les équations

$$\frac{A}{B^2 - A^2} = \frac{1}{a}, \qquad \frac{B}{B^2 - A^2} = \frac{1}{b}.$$

Le calcul est très simple. Nous avons d'abord $Aa = Bb = \lambda$, ou $A = \frac{\lambda}{a}$, $B = \frac{\lambda}{b}$, et en portant ces valeurs dans la première équation par exemple, nous obtenons

$$\frac{\frac{\lambda}{a}}{\frac{\lambda^2}{b^2} - \frac{\lambda^2}{a^2}} = \frac{1}{a}, \qquad \text{ou} \qquad \lambda\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = 1, \qquad \text{ou enfin} \qquad \lambda = \frac{a^2b^2}{c^2}.$$

Nous avons donc $A = \frac{ab^2}{c^2}$, $B = \frac{a^2b}{c^2}$; par suite la droite PQ est normale à l'ellipse

$$\left(\frac{c^2x}{ab^2}\right)^2 + \left(\frac{c^2y}{a^2b}\right)^2 = 1.$$

2. L'équation de la normale MC au point M est

$$\frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} - c^2 = 0.$$

En résolvant cette équation et celle de la droite PQ on obtient les coordonnées du point de rencontre

$$x = \frac{a(a^2 - 2b^2)}{a^2 + b^2}\cos\varphi, \qquad y = \frac{b(b^2 - 2a^2)}{a^2 + b^2}\sin\varphi,$$

et l'on voit immédiatement que ce point décrit l'ellipse qui a pour équation

$$\frac{(a^2 + b^2)^2x^2}{a^2(a^2 - 2b^2)^2} + \frac{(a^2 + b^2)^2y^2}{b^2(b^2 - 2a^2)^2} - 1 = 0.$$

3. Soient x_1, y_1 et x_2, y_2 les coordonnées des points P et Q; le centre de gravité G du triangle MPQ a pour coordonnées

$$x = \frac{x_1 + x_2 + a\cos\varphi}{3}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + b\sin\varphi}{3}.$$

Remarquons que $\frac{x_1 + x_2}{2}$ et $\frac{y_1 + y_2}{2}$ sont les coordonnées du milieu I de PQ. Ce point est à l'intersection de la droite PQ et du diamètre conjugué, $\frac{x}{a^2} - \frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi}\cdot\frac{y}{b^2} = 0$; on en déduit aisément les coordonnées du point I,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -a\sin^2\varphi\cos\varphi, \qquad \frac{y_1 + y_2}{2} = -b\cos^2\varphi\sin\varphi,$$

et par suite celles du point G,

$$x = \frac{a}{3}\cos\varphi\cos 2\varphi, \qquad y = -\frac{b}{3}\sin\varphi\cos 2\varphi.$$

Il est aisé d'éliminer φ entre ces deux équations. En les divisant membre à membre, on a d'abord $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{ay}{bx}$; puis si on les écrit $\frac{3x}{a} = \cos\varphi\cos 2\varphi$, $-\frac{3y}{b} = \sin\varphi\cos 2\varphi$, et si on fait la somme des carrés, on a

$$9\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = \cos^2 2\varphi = \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}\right)^2,$$

ou, en remplaçant $\operatorname{tg}\varphi$ par sa valeur,

$$9\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = \left(\frac{1 - \frac{a^2y^2}{b^2x^2}}{1 + \frac{a^2y^2}{b^2x^2}}\right)^2.$$

ou enfin
$$9\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^3-\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2=0.$$

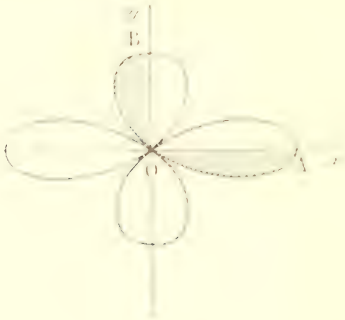
Le lieu est donc une courbe du sixième degré, symétrique par rapport aux axes, admettant à l'origine un point quadruple, les tangentes étant les diamètres conjugués égaux de l'ellipse. Mais pour construire cette courbe, et pour calculer son aire, il sera plus simple d'utiliser les équations paramétriques
$$x=\frac{a}{3}\cos\varphi\cos 2\varphi,\qquad y=-\frac{b}{3}\sin\varphi\cos 2\varphi.$$

Il suffira évidemment de faire varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et de prendre la symétrique de la courbe obtenue par rapport à Ox et par rapport à Oy.

Nous avons $\frac{dx}{d\varphi}=-\frac{a}{3}\sin\varphi(6\cos^2\varphi-1)$, $\frac{dy}{d\varphi}=\frac{b}{3}\cos\varphi(6\sin^2\varphi-1)$.

Soient α l'angle aigu qui a pour sinus $\frac{1}{\sqrt{6}}$, et β celui qui a pour cosinus $\frac{1}{\sqrt{6}}$; nous avons $\alpha<\frac{\pi}{4}<\beta$, et les variations de x et y sont indiquées dans le tableau suivant :

φ	0		α		$\frac{\pi}{4}$		β		$\frac{\pi}{2}$
x	$\frac{a}{3}$	décroît	$\frac{2a}{9}\sqrt{\frac{5}{6}}$	décroît	0	décroît	$-\frac{2a}{9\sqrt{6}}$	croît	0
y	0	décroît	$-\frac{2b}{9\sqrt{6}}$	croît	0	croît	$\frac{2b}{9}\sqrt{\frac{5}{6}}$	croît	$\frac{b}{3}$



Nous obtenons ainsi l'arc de courbe AOB ; et comme
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\cot\varphi\,\frac{6\sin^2\varphi-1}{6\cos^2\varphi-1},$$
on voit que la tangente en A est perpendiculaire à Ox, la tangente en B perpendiculaire à Oy, et que la tangente au point O a pour coefficient angulaire $-\frac{b}{a}$.

En achevant par symétrie on obtient toute la courbe.

L'aire limitée par la courbe est égale à quatre fois l'aire couverte de hachures, et celle-ci est égale à $-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdy-ydx$, en prenant le signe $-$ puisque le rayon vecteur tourne dans le sens négatif quand φ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$. L'aire totale A est donc $A=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdy-ydx$.

On a
$$xdy-ydx=\frac{ab}{9}\cos^2\varphi\cos 2\varphi(6\sin^2\varphi-1)d\varphi-\frac{ab}{9}\sin^2\varphi\cos 2\varphi(6\cos^2\varphi-1)d\varphi=-\frac{ab}{9}\cos^2 2\varphi d\varphi,$$
et par suite
$$A=\frac{2ab}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2\varphi d\varphi=\frac{ab}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 4\varphi)d\varphi=\frac{\pi ab}{18}$$
C'est bien la dix-huitième partie de l'aire de l'ellipse.

4. Le cercle circonscrit au triangle MPQ rencontre l'ellipse aux trois points M, P, Q et en un quatrième point R, tel que les droites PQ et MR aient des pentes opposées. La pente de PQ étant $-\frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi}$, celle de MR sera $+\frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi}$ et l'équation de cette droite sera

$$\frac{x - a\cos\varphi}{a\cos\varphi} - \frac{y - b\sin\varphi}{b\sin\varphi} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{x}{a\cos\varphi} - \frac{y}{b\sin\varphi} = 0.$$

L'équation du cercle MPQ est donc de la forme

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \left(\frac{x}{a\cos\varphi} + \frac{y}{b\sin\varphi} - 1\right)\left(\frac{x}{a\cos\varphi} - \frac{y}{b\sin\varphi}\right) = 0,$$

et il suffira de déterminer λ de façon que les coefficients de x^2 et de y^2 soient égaux. Nous avons ainsi

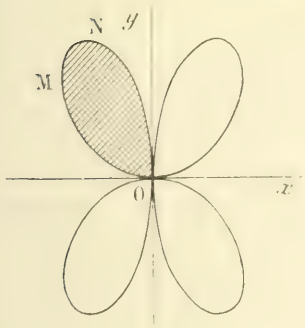
$$\frac{\lambda}{a^2} + \frac{1}{a^2\cos^2\varphi} = \frac{\lambda}{b^2} - \frac{1}{b^2\sin^2\varphi};$$

nous en tirons

$$\lambda = \frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}{(a^2 - b^2)\sin^2\varphi\cos^2\varphi},$$

et l'équation du cercle s'écrit

$$x^2 + y^2 + \frac{c^2}{a}\sin^2\varphi\cos\varphi . x - \frac{c^2}{b}\cos^2\varphi\sin\varphi . y - (a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi) = 0.$$



Les coordonnées de son centre sont

$$x = -\frac{c^2}{2a}\sin^2\varphi\cos\varphi, \qquad y = \frac{c^2}{2b}\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

On en tire aisément

$$\frac{x}{y} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi, \qquad \text{et} \qquad \frac{4(a^2x^2 + b^2y^2)}{c^4} = \sin^2\varphi\cos^2\varphi;$$

l'élimination de φ est alors très simple et nous donne

$$4(a^2x^2 + b^2y^2)^2 - a^2b^2c^4x^2y^2 = 0.$$

Cette équation représente encore une rosace à quatre branches, les tangentes au point quadruple étant les axes de coordonnées.

On la construit aisément au moyen des équations

$$x = -\frac{c^2}{2a}\sin^2\varphi\cos\varphi, \qquad y = \frac{c^2}{2b}\cos^2\varphi\sin\varphi,$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{c^2}{2a}\sin\varphi(3\cos^2\varphi - 1), \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{c^2}{2b}\cos\varphi(1 - 3\sin^2\varphi),$$

en faisant varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$ on obtient la branche OMNO dans le sens OMNO.

L'aire couverte de hachures a pour valeur $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dy - y\,dx$, et l'aire totale limitée par la courbe est

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dy - y\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c^4}{16ab}\sin^6 2\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{c^4}{16ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\varphi)\,d\varphi = \frac{c^4}{32ab}\pi.$$

On vérifie aisément que l'aire de la développée de l'ellipse est $\frac{3\pi c^4}{8ab}$; l'aire A est donc bien la douzième partie de cette aire.

5. Nous avons vu dans le paragraphe 3 que le milieu de PQ a pour coordonnées

$$x = -a\sin^2\varphi\cos\varphi, \qquad y = -b\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

Ce sont les équations paramétriques d'une rosace analogue à la précédente. Son équation rectiligne est

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 - \frac{x^2y^2}{a^2b^2} = 0,$$

et son aire est $\frac{\pi ab}{8}$, c'est-à-dire la huitième partie de celle de l'ellipse.

6. Nous avons vu au début que les coordonnées du pôle de PQ sont

$$x = -\frac{a}{\cos\varphi}, \qquad y = -\frac{b}{\sin\varphi};$$

par suite, le lieu de ce point a pour équation

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1.$$

On reconnait l'équation d'une *kreuzcurve* admettant pour asymptotes les tangentes aux sommets de l'ellipse.

E.-N. BARISIEN.

Bonnes solutions par MM. Maurice Fournial, école des Anglais à Lyon; G. Lach, à Rodez; L. Naucelle; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes; L. Simon, à Fourmies.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

2026. — *Un cube dont les arêtes aa_1, bb_1, cc_1, dd_1 sont verticales et ont pour longueur 6cm a pour base inférieure le carré abcd situé dans le plan* H *de cote* 6 *; les points a et b sont dans le plan de profil situé à* 3cm *à droite du centre de la feuille; les points c et d sont à gauche de ce plan de profil, a a pour éloignement* 6 *et b pour éloignement* 12.

La diagonale db_1 tourne autour de l'arête aa_1, puis autour de l'arête c_1d_1; elle engendre ainsi deux hyperboloïdes. Représenter le solide commun à ces deux hyperboloïdes limité aux deux plans de projection, aux plans de profil situés à 9cm *du centre de la feuille, au plan de front d'éloignement* 18 *et au plan horizontal tangent au second hyperboloïde et situé au-dessus du centre de cet hyperboloïde.*

(*Agrégation des sciences mathématiques, épreuves finales; concours de 1911.*)

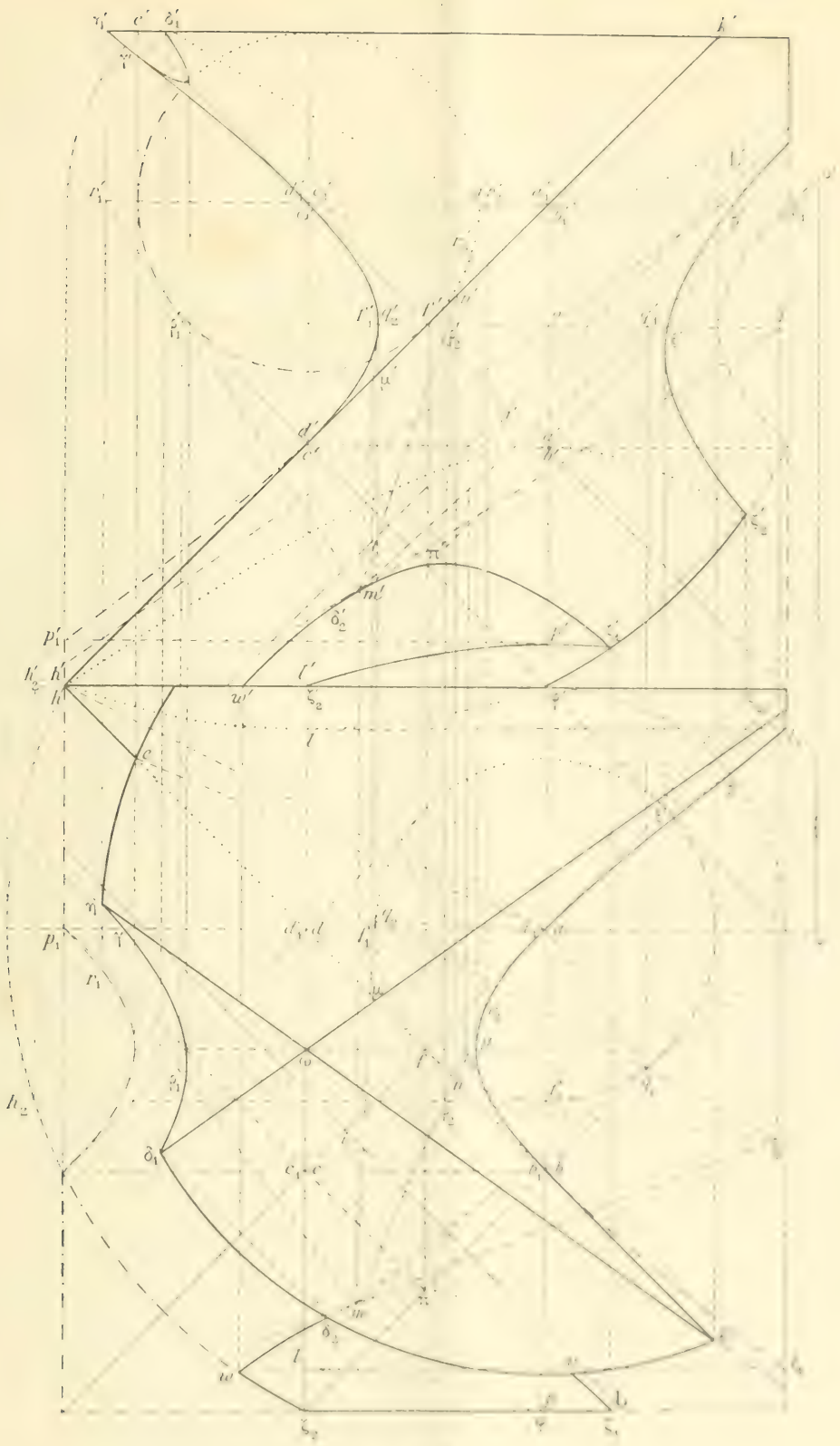
Représentation des deux solides. — Désignons par H_1 l'hyperboloïde dont l'axe AA_1 est vertical et par H_2 celui dont l'axe C_1D_1 est horizontal. La diagonale DB_1 a sa projection horizontale tangente au cercle de gorge de H_1; on peut donc tracer ce cercle dont le centre est a, a_1 et en déduire le demi-axe transverse $o'f'_1$ de l'hyperbole méridienne. La trace horizontale h, h' de la génératrice nous donne d'ailleurs le rayon ah du parallèle de cote zéro, et il suffit d'amener la génératrice à être de front en f_2h_2 pour obtenir l'asymptote h'_2o' de la méridienne de front dont nous connaissons déjà le sommet f'_1 et le centre o'. Nous pouvons donc tracer cette méridienne qui donne le contour apparent vertical de l'hyperboloïde H_1.

Une construction absolument identique nous fait connaître le cercle de gorge de l'hyperboloïde H_2 dont la projection verticale se fait en vraie grandeur, et nous en déduisons, après avoir déterminé l'asymptote ωk de la méridienne horizontale, le contour apparent horizontal du second hyperboloïde, qui est l'hyperbole de centre ω et de sommet g.

Sections planes qui limitent le solide. — Cherchons d'abord les sections qui limitent le solide commun dans les plans horizontaux et les plans de front définis par l'énoncé. Le plan horizontal de projection donne sur l'hyperboloïde H_1 le parallèle de rayon ah et sur l'hyperboloïde H_2 une hyperbole ayant le même centre et les mêmes asymptotes que la projection de la méridienne horizontale, son axe transverse étant de profil. Pour avoir sa longueur, considérons la méridienne de profil de l'hyperboloïde qui coupe la courbe cherchée en son sommet l', l et amenons cette méridienne à être horizontale; le point l' vient en l'_1 et se projette en l_1 sur la méridienne horizontale; il suffit de ramener ce point l_1 en l par une rotation inverse pour avoir le sommet cherché. Connaissant alors les asymptotes et ce sommet, nous pouvons tracer la courbe et la limiter au plan vertical et au plan de front donné.

Le plan horizontal tangent à l'hyperboloïde H_2 donne sur cette surface les deux génératrices qui se projettent précisément sur les asymptotes de la méridienne, ωk et la droite symétrique par rapport à ωg. Sur l'hyperboloïde H_1 il donne le parallèle de rayon ae.

Le plan vertical de projection donne sur l'hyperboloïde H_2 le parallèle de rayon $\omega'h'$ et sur l'hyperboloïde H_1 une hyperbole ayant même centre o' et mêmes asymptotes que la méridienne de front, mais située dans l'autre angle des asymptotes. Son axe transverse s'obtient par le procédé déjà usité précédemment, mais on peut éviter ici la construction en remarquant que le point b_1, b'_1 de la génératrice commune, ayant par rapport



Echelle $\frac{3}{4}$

au plan principal de front le même éloignement que le plan vertical de projection, est sur le même parallèle que le sommet cherché et par suite les sommets de la section sont précisément b' et b'_1. On peut donc tracer la courbe.

Le plan de front d'éloignement 18 donne sur l'hyperboloïde H_2 un parallèle égal au premier puisqu'il est symétrique par rapport au centre. Sur l'hyperboloïde H_1 il donne une hyperbole qui a les mêmes asymptotes que la précédente et son axe transverse sur la même droite $b'b'_1$, ses sommets étant déterminés en amenant la méridienne de profil à être de front, ce qui amène le point p en p_1, p'_1 d'où nous déduisons le sommet p'. On peut donc tracer l'hyperbole $p'l'$.

Enfin les deux plans de profil donnent sur les deux surfaces des sections dont les deux projections se confondent sur les droites $l_1l'_1$ et sa symétrique par rapport à ff'.

Intersection des deux surfaces. — Les deux hyperboloïdes ayant en commun la génératrice DB_1 se coupent suivant une cubique dont il est facile d'avoir ici les asymptotes sur chaque projection. En effet, les deux cônes asymptotes transportés parallèlement à eux-mêmes de manière à avoir leurs sommets au centre du cube ont comme génératrices communes les quatre diagonales du cube. La diagonale DB_1 qui est la génératrice commune aux deux hyperboloïdes donnera sur chaque projection une asymptote d'inflexion iL, $j'L'$, l'autre asymptote ac_1, $a'c'_1$ étant sur chaque plan de projection un axe de symétrie de la courbe.

Il en résulte que sur chaque projection la courbe traverse le cercle de gorge aux points d'intersection de ac_1 ou de $a'c'_1$ avec ce cercle de gorge.

On connaît de suite un certain nombre de points remarquables de la cubique à l'intersection des sections planes des deux surfaces par chacun des plans horizontaux ou de front que nous venons d'examiner.

Un calcul assez simple permet d'obtenir l'équation de chacune des cubiques projections de l'intersection des deux solides.

En prenant pour origine le centre du cube et pour axes des parallèles à ses arêtes, on a les équations suivantes :

$$C_1D_1 \begin{cases} x = -a, \\ z = a; \end{cases} \qquad AA_1 \begin{cases} z = a, \\ y = -a. \end{cases} \qquad B_1D \quad x = y = z$$

On en déduit l'équation de chaque hyperboloïde,

$$H_1 \qquad x^2 + y^2 - 2z^2 + 2z(y - x) = 0,$$

$$H_2 \qquad x^2 - 2y^2 + z^2 + 2y(x - z) = 0,$$

et la projection horizontale de leur intersection débarrassée de la génératrice commune est

$$3(x + y)^2 + 4(x - y + 4a)(x - y) + 16a^2 = 0$$

On a donc les asymptotes $\quad x + y = 0, \quad$ et $\quad 3(x - y) + 4a = 0$

On voit aussi la tangente $\quad x - y = 4a$

au point où la courbe traverse le cercle de gorge.

L'asymptote $x + y = 0$ est un axe de symétrie car si on coupe la courbe par des perpendiculaires telles que $x - y = \lambda$, l'équation donne deux valeurs opposées pour $x + y$.

Nous avons donné la construction d'un point courant en menant par la génératrice commune un plan auxiliaire. Soit fq_2 son intersection avec le plan du cercle de gorge de H_2 et $f'r'_1$ son intersection avec le plan du cercle de gorge de H_1, nous en déduisons la seconde génératrice sur chaque surface, soit q_2m, q'_2m' et r_3m, r'_3m', dont l'intersection m, m' est un point de la courbe.

Pour avoir la tangente en ce point nous construisons les plans tangents aux deux surfaces en m,m', et pour cela nous menons sur chacune d'elles la seconde génératrice. Nous avons ainsi les plans Q_2MQ_1 et R_2MR_1 dont nous prenons l'intersection en les coupant par le plan horizontal o' qui nous donne les horizontales q_2q_1 et $\rho_1\rho_2$. En joignant leur intersection θ au point m nous avons la tangente et nous en déduisons la tangente $\theta'm'$ à la projection verticale.

Solide commun. — Le solide commun est limité dans le plan horizontal supérieur par le parallèle ae d'une part, et les deux génératrices ωk et $\omega\delta_1$, d'autre part, l'angle $\delta_1\omega k$ comprenant la portion de surface intérieure à la fois aux deux solides. Il en résulte que les arcs du parallèle intérieurs à cet angle subsistent seuls. L'angle supplémentaire correspond à la portion de surface de l'hyperboloïde H_2 qui subsiste, d'une part jusqu'à l'arc de courbe $\eta\delta_1$ qui limite dans cet angle le contour apparent horizontal, et de l'autre côté jusqu'à l'hyperbole méridienne horizontale dont l'arc l_1agb subsiste et se raccorde en b avec la génératrice bk qui, avec l'arc $fq_2\xi$ du cercle de gorge complète le contour apparent horizontal de cette portion du solide commun. Il faut y joindre une sorte d'onglet $\zeta_2\varkappa\pi\zeta_1\varphi$ dont les portions du contour $\varkappa l\varphi$ et $\delta_2\pi\nu$ sont cachées.

La visibilité de la projection verticale n'offre plus de difficulté.

CONCOURS DE 1912 (*Suite.*)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

Cours préparatoires (*Candidats français et candidats étrangers.*)

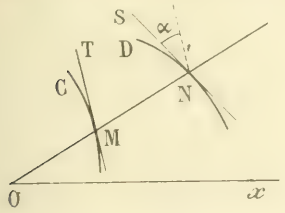
Mathématiques.

2063. — On donne, en coordonnées polaires, une courbe C,

$$\rho = f(\omega).$$

On demande de déterminer une courbe D par la condition suivante :

M étant un point de C et N un point de D situés sur le même rayon vecteur, la tangente Ns à D doit faire avec la tangente MT à C un angle α donné et constant.



Traiter en particulier les cas où la courbe C est :

1° Un cercle ayant son centre au pôle ;

2° Un cercle passant par le pôle ;

3° Une spirale logarithmique : $\rho = e^{m\omega}$;

4° Une droite ;

5° Une spirale d'Archimède : $\rho = K\omega$. Discuter la forme de la courbe D dans ce cas ;

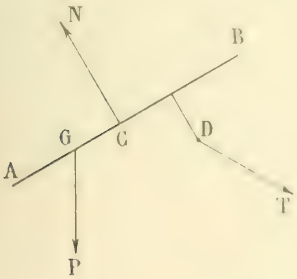
6° Une conique ayant son foyer au pôle. Montrer que, dans ce cas, on est ramené à une quadrature qu'on sait, en principe, effectuer. Achever les calculs dans le cas où la courbe C est une parabole. Discuter la forme de la courbe D dans ce cas.

(1re max. de 8 h. 4 min.)

Mécanique.

I. — **2064.** Un point M décrit une ellipse avec une accélération totale dirigée constamment vers l'un des foyers, F. Connaissant les longueurs des axes de cette ellipse ainsi que le temps employé à la parcourir, calculer la vitesse de M en fonction de l'angle θ que forme le rayon vecteur FM avec le grand axe. Démontrer que cette vitesse peut être regardée comme la résultante de deux vitesses constantes, dont l'une est perpendiculaire à FM tandis que l'autre est parallèle au petit axe. Déduire de là la forme de l'hodographe et la grandeur de l'accélération totale.

II. — **2065.** On considère un cerf-volant constitué par une surface plane ayant un axe de symétrie AB situé dans le plan de la figure. Ce cerf-volant est soumis à l'action de trois forces, savoir : son poids, connu, P, appliqué au centre de gravité G ; la pression N du vent, appliquée normalement à AB en un point C, enfin la traction T du fil, attaché en un point D qui est relié invariablement à AB. On donne les trois points G, C, D placés comme l'indique la figure, et l'on admet :



1° Que la pression N est représentée par l'expression $N = K\sin^2 i\, v^2$ où K désigne une constante donnée, v la vitesse du vent (supposé horizontal), et i, l'angle d'inclinaison de AB sur l'horizontale ;

2° Que le fil, de poids négligeable, est sensiblement rectiligne et dirigé suivant T ;

3° Que le cerf-volant demeure immobile.

Calculer, en fonction de v, l'inclinaison i de AB, la traction T exercée par le fil et l'inclinaison θ de ce fil sur l'horizontale.

Dire quelle est la limite au-dessous de laquelle v ne peut descendre sans que le cerf-volant cesse de se tenir en l'air.

(4 juin, de 8 h. 4 min.)

Calcul.

2066. — Résoudre un triangle connaissant les 3 côtés :

$$a = 401^m,456. \qquad b = 628^m,241, \qquad c = 2077,415.$$

Calculer les angles et la surface.

(11 mai, de 2 h. à 4 h. 1/2.)

Physique.

I. — Mesure des températures par le thermomètre normal.

Décrire brièvement l'appareil employé et exposer les motifs qui l'ont fait choisir, pour la définition de l'échelle centigrade, de préférence aux autres dispositifs thermométriques et notamment au thermomètre à mercure.

II. — **2067**. On considère le système optique constitué par une lentille mince plan-convexe dont la face plane est argentée.

1° Calculer le rayon qu'il faut donner à la face courbe de la lentille pour que ce système soit équivalent à un miroir concave de 1 mètre de rayon (indice du verre : 1,53).

2° Construire l'image d'un point dans ce système optique.

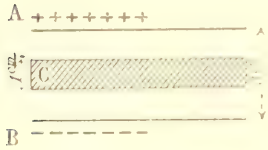
3° Y a-t-il quelque chose de changé au point de vue optique, si l'argenture n'adhère pas bien au verre et laisse ainsi entre la lentille et le miroir une lame d'air extrêmement mince ?

4° On se propose d'achromatiser le système pour deux radiations données, l'une rouge et l'autre violette. L'on accole à cet effet à la lentille plan-convexe en crown une lentille divergente en flint. Calculer les rayons de courbure R et R' des deux lentilles supposées minces, sachant que les indices de la radiation rouge sont de 1,52 dans le crown et 1,63 dans le flint et que ceux de la radiation violette sont de 1,54 dans le crown et 1,67 dans le flint.

III. — **2068**. Entre les deux armatures A et B d'un condensateur plan chargé et parallèlement à celles-ci, on glisse un plateau métallique C. Ce plateau est isolé et non chargé ; il a les mêmes dimensions que les armatures.

Le plateau C, une fois complètement introduit entre A et B est-il soumis à une force tendant à le déplacer ; l'est-il *pendant* son introduction ?

La force d'attraction, qui s'exerce entre A et B, est-elle modifiée par l'introduction de C et dans quelle proportion :



1° Si l'on suppose que A et B restent chacun isolé pendant l'introduction de C ?

2° Si l'on suppose que l'on maintient entre A et B une différence de potentiel constante ?

Le condensateur plan est supposé assez grand pour que la perturbation du champ électrique sur les bords puisse être négligée.

Distance de A et B : 3 cm

Epaisseur de C : 1 cm.

IV. — On considère le système d'unités (système électromagnétique pratique) admettant comme unités fondamentales les grandeurs suivantes :

unité de masse : 10^{-11} gramme-masse.
unité de longueur : 10^{9} centimètres.
unité de temps : la seconde.

Exprimer en kilogramme-poids l'unité de force de ce système, et en kilogrammètres l'unité de travail.

(*[illegible] juin, de 8 h. à midi.*)

Chimie.

I. — Etude comparative des différents procédés de fabrication du chlore.

(On s'en tiendra aux procédés réellement utilisés au laboratoire ou dans l'industrie.)

II. — **2069**. Un appareil de grillage peut être alimenté soit avec du soufre, soit avec de la pyrite de fer (FeS^2), soit avec de la blende (ZnS). On règle la quantité d'air admise dans l'appareil de manière que les gaz résultant du grillage contiennent 5 °/₀ d'oxygène.

On admettra que le grillage des sulfures métalliques ne laisse comme résidu que des oxydes.

On demande de donner dans les différents cas la composition centesimale en volume des gaz obtenus.

Nota. — Pour simplifier les calculs, on admettra que l'air renferme en chiffres ronds 20 °/₀ d'oxygène.

(*31 mai, de 8 h. à midi.*)

QUESTION PROPOSÉE

2070. — On donne une sphère de 48^{mm} de rayon ; les projections de son centre sont sur le grand axe de la feuille, symétriques par rapport au petit axe, et situées à 10^{cm} de ce petit axe.

1° Circonscrire à cette sphère un hyperboloïde de révolution ayant même centre que la sphère, dont l'axe est de front, incliné à 30° sur le plan horizontal, et sur lequel on s'élève de gauche à droite. Les génératrices rectilignes font 30° avec l'axe.

2° Circonscrire à la même sphère un paraboloïde de révolution ayant son axe de bout, son sommet en avant de la sphère, et sachant que la distance de son sommet à son foyer vaut 8^{mm}.

3° Construire l'intersection des deux surfaces. Déterminer les axes, les sommets, les points doubles avec les tangentes, et les points sur les contours apparents.

4° Représenter le solide commun. Dessiner en noir les lignes de contour apparent et d'intersection, en rouge les lignes de construction.

5° Calculer les distances, au centre de la sphère, des deux plans de front bitangents à l'intersection.

Donner sur une feuille à part le détail du calcul et une explication sommaire de l'épure.

(*École normale supérieure et Bourses de licence : épreuve pratique, 22 juillet 1912, de 8 h. à midi.*)

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2003. — *Un angle de grandeur constante pivote autour d'un point fixe* O. *Les côtés rencontrent une droite fixe* Δ *en* A *et* B. *On demande :*

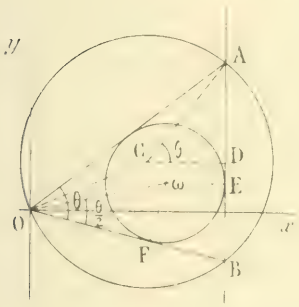
1° *Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* OAB;

2° *Le lieu du centre du cercle inscrit dans le triangle* OAB ;

3° *Le lieu de l'orthocentre du triangle* OAB ;

4° *L'enveloppe du cercle circonscrit au triangle* OAB;

1. Prenons comme axes de coordonnées deux droites rectangulaires Ox et Oy dont l'une, Ox, est perpendiculaire à Δ, et soit $x = d$ l'équation de cette droite.



Le cercle OAB a une équation de la forme

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0,$$

α, β désignant les coordonnées du centre ; on en déduit aisément l'équation de l'ensemble des droites OA et OB en éliminant la variable d'homogénéité entre les équations du cercle et de la droite. On obtient ainsi

$$d(x^2 + y^2) - 2(\alpha x + \beta y)x = 0,$$

ou

$$dy^2 - 2\beta xy + (d - 2\alpha)x^2 = 0.$$

Il nous faut écrire maintenant que ces deux droites font l'angle constant θ.

Les pentes m et m' de ces deux droites sont racines de l'équation

$$dm^2 - 2\beta m + d - 2\alpha = 0;$$

on doit avoir

$$\operatorname{tg}^2\theta = \frac{(m - m')^2}{(1 + mm')^2}.$$

Or

$$(m' - m)^2 = (m' + m)^2 - 4mm' = 4\frac{\beta^2}{d^2} - 4\frac{d - 2\alpha}{d} = \frac{4(\beta^2 - d(d - 2\alpha))}{d^2}$$

$$1 + mm' = 1 + \frac{d - 2\alpha}{d} = \frac{2(d - \alpha)}{d},$$

par suite

$$\operatorname{tg}^2\theta = \frac{\beta^2 - d(d - 2\alpha)}{(d - \alpha)^2}.$$

ou

$$\operatorname{tg}^2\theta = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha - d)^2}{(\alpha - d)^2}.$$

ou enfin

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{(\alpha - d)^2}{\cos^2\theta}.$$

On en conclut que le lieu du point (α, β) est la conique

$$x^2 + y^2 = \frac{(x - d)^2}{\cos^2\theta}.$$

qui a pour foyer l'origine, pour directrice correspondante la droite Δ et pour excentricité $\frac{1}{\cos\theta}$. Cette conique est donc une hyperbole.

On peut d'ailleurs l'établir géométriquement. Joignons en effet le centre C du cercle aux points O et A et abaissons CD perpendiculaire sur Δ. L'angle DCA est égal à l'angle AOB ou à θ, et dans le triangle rectangle ACD on a $CD = CA\cos\theta$ ou $\frac{CO}{CD} = \frac{1}{\cos\theta}$, ce qui démontre la proposition

2. Soient ω le centre du cercle inscrit et E, F les points où ce cercle touche les côtés AB et OB. Dans le triangle rectangle ωOF on a

$$\omega F = O\omega \sin\frac{\theta}{2}, \qquad \text{et par suite} \qquad \frac{\omega O}{\omega E} = \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

On en conclut que le lieu du point ω est encore une hyperbole ayant pour foyer le point O, pour directrice correspondante la droite Δ et pour excentricité $\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$.

Il est à remarquer que cette hyperbole est aussi le lieu du cercle exinscrit dans l'angle AOB.

3. Le lieu de l'orthocentre du triangle AOB est évidemment la droite Ox, qui est une hauteur commune à tous les triangles.

4. Cherchons maintenant l'enveloppe du cercle

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0.$$

α et β vérifiant l'équation

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{(\alpha - d)^2}{\cos^2\theta}.$$

On peut exprimer aisément α et β en fonction d'un paramètre, en écrivant

$$\alpha = \frac{\alpha - d}{\cos\theta}\cos\varphi, \qquad \beta = \frac{\alpha - d}{\cos\theta}\sin\varphi;$$

on en tire

$$\alpha = \frac{d\cos\varphi}{\cos\varphi - \cos\theta}, \qquad \beta = \frac{d\sin\varphi}{\cos\varphi - \cos\theta},$$

et l'équation du cercle devient

$$x^2 + y^2 - \frac{2d\cos\varphi}{\cos\varphi - \cos\theta}x - \frac{2d\sin\varphi}{\cos\varphi - \cos\theta}y = 0,$$

ou

$$(x^2 + y^2 - 2dx)\cos\varphi - 2dy\sin\varphi = (x^2 + y^2)\cos\theta.$$

Eliminons φ entre cette équation et la suivante $(x^2 + y^2 - 2dx)\sin\varphi - 2dy\cos\varphi = 0$; il suffit pour cela d'élever au carré et d'ajouter. Nous trouvons ainsi $(x^2 + y^2 - 2dx)^2 + 4d^2y^2 = (x^2 + y^2)^2\cos^2\theta$, ou, en divisant par $x^2 + y^2$, $(x^2 + y^2)\sin^2\theta - 4dx + 4d^2 = 0$.

L'enveloppe est un cercle.

Et ceci pouvait se prévoir géométriquement, car le cercle OAB a son centre C sur l'hyperbole (H) obtenue dans la première partie, et passe constamment par le foyer O de cette hyperbole. On sait alors que l'enveloppe de ce cercle est le cercle directeur correspondant au second foyer de cette même hyperbole. Il est d'ailleurs facile de le vérifier analytiquement.

R. DONTOT, élève à l'Ecole normale supérieure.

Bonnes solutions par MM. Ch. Laussie, répétiteur à l'Ecole des Anglais, à Lyon ; A. Bouat, lycée de Nancy ; André Courtois, 147e d'infanterie, à Sedan ; G. Estiben, à Bordeaux ; G. Lach, à Douai ; J. Le Bras ; R. Malaise, à Denain ; Marescalchi ; M. Roux, à Chalon-sur-Saône ; N. Savary, 60e d'artillerie ; L. Simon, à Fourmies ; P. Velgnes, 23e d'artillerie.

CONCOURS DE 1912 (*Suite*.

ÉCOLE CENTRALE

Mathématiques.

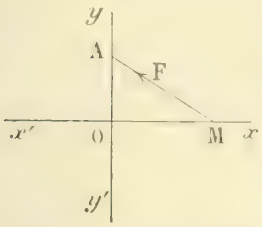
I. — **2071**. Soient deux axes de coordonnées rectangulaires fixes Ox et Oy et un point A fixe, d'abscisse donnée, négative, $-a$, sur Ox.

1° Former l'équation de l'hyperbole équilatère (H) ayant pour centre le point A et un sommet à l'origine O, et celle de la parabole (P) ayant pour foyer l'origine O et pour directrice la perpendiculaire à Ox en A.

2° En un point $M(x = \alpha, y = \beta)$ de (H), on lui mène la tangente (T) ; M décrivant (H), trouver et construire le lieu du pôle S de (T) par rapport à (P).

3° Trouver et construire le lieu du point S′ intersection de (T) et de la droite OS.

II. — **2072**. Soient deux axes de coordonnées rectangulaires fixes $x'Ox$, $y'Oy$, et A un point fixe sur $y'Oy$, d'ordonnée positive donnée, a. Un point matériel M supposé non pesant et de masse égale à l'unité est assujetti à rester sur l'axe $x'Ox$. Il est attiré vers le centre A par une force $MF = K^2 . MA$, proportionnelle à la distance MA, K étant un nombre constant donné. A l'instant pris pour origine du temps, le mobile M est à l'origine O et il est lancé le long de $x'Ox$ avec une vitesse positive donnée V_0.



1° Dans l'hypothèse où il n'y a pas de frottement de M sur $x'Ox$, trouver l'équation du mouvement de M et discuter ce mouvement.

2° Dans l'hypothèse où il y a un frottement de M sur $x'Ox$, dont le coefficient f donné est supposé le même au repos et pendant le mouvement, on donne $V_0 = K.a.f\,\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$. Discuter le mouvement de M.

Calculer, à $\frac{1}{100}$ de seconde sexagésimale près, la durée totale de ce mouvement jusqu'à l'arrêt définitif, en supposant $K = \frac{1}{4}$ et adoptant les unités du système C.G.S.

(*19 juin, de 7h. à 11 h.*)

Trigonométrie.

2073. — On considère un triangle ABC dans lequel la tangente de l'angle A est égal à la demi-somme des tangentes des deux autres angles B et C.

1° Trouver la relation qui existe entre tg B et tg C et exprimer $\cos(B - C)$ en fonction de cos B.

2° Trouver les limites entre lesquelles doit être compris l'angle A et étudier la variation de $\cos B + \cos C$ quand on fait varier l'angle A entre ces limites.

3° Déterminer l'angle A de façon que le rapport $\frac{\sin B + \sin C}{\sin A}$ soit égal à un nombre donné K ; discussion.

Calcul.

2074. — Calculer :

1° Tous les angles x compris entre zéro et douze angles droits qui vérifient l'équation

$$\sin x = \frac{2}{3}.$$

2° Les valeurs correspondantes du nombre y défini par la formule

$$y = \frac{\sin \frac{x}{3}}{1 - \sqrt{8}}$$

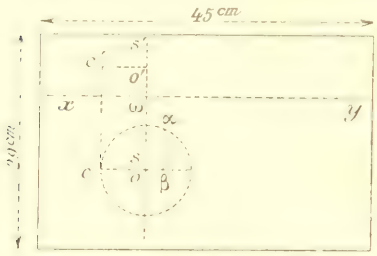
(*20 juin, de 2 h. à 6 h.*)

Dessin.

2075. — Cadre 29cm sur 45cm. La ligne de terre (en rouge) xy est parallèle au grand axe du cadre et à 6cm au-dessus. La ligne de rappel $\omega\omega's'$ est à 8cm à gauche du centre du cadre ; $\omega\omega = 10$cm, $\omega\omega' = 4$cm, $\omega s' = 6$cm.

La verticale passant par le point o, o' est l'axe d'un tore engendré par un cercle situé dans le plan de front $o\ c$, de centre (c, c') et de rayon 4cm ; $\omega y = 6$cm, $yc' = 4$cm.

Un cône a pour sommet le point (s, s') de l'axe du tore et pour base dans le plan horizontal une parabole dont l'axe est $co\beta$, le sommet c, et qui passe par le point α ; α est sur la circonférence décrite de o comme centre avec oc pour rayon et sur la perpendiculaire à oc menée par β, $o\beta = 2$cm.



On déterminera l'intersection du tore et du cône et on représentera la partie du tore, supposé solide et opaque, extérieure au cône.

Nota. — Le corps demandé sera seul dessiné à l'encre noire, les lignes vues en traits pleins et les lignes cachées en points ronds. Les constructions seront faites à l'encre rouge (trait plein, plutôt fin), en particulier, celles nécessaires pour la détermination d'un point quelconque de l'intersection et de la tangente en ce point, des points et tangentes remarquables (parallèles limites, génératrices limites, contours apparents, points doubles en projection).

Les tangentes seront tracées à l'encre rouge en trait un peu plus accentué aux environs des points de contact (de 1cm à 2cm de chaque côté du point de contact) et *sans aucune flèche*.

Pas de titre extérieur au cadre. Titre intérieur dans la partie laissée libre à droite : *Tore entaillé par un cône.*

(20 juin, de 7 h. à 11 h.)

Physique.

I. — Condensateur sphérique ; sa capacité, son énergie.

II. — On forme un condensateur sphérique en recouvrant d'une couche mince d'argent les deux faces d'un ballon de verre de 35 centimètres de diamètre intérieur, de un demi-millimètre d'épaisseur, et dont le pouvoir inducteur spécifique est 5,5 ; la différence de potentiel entre les armatures étant de 12000 volts, on demande de calculer la quantité de chaleur que peut produire la décharge.

Chimie.

I. — Acide iodhydrique.

II. — **2076.** — Pour le projet d'une usine à acide sulfurique devant produire chaque jour 100 tonnes d'acide (répondant à la formule SO^4H^2), on résoudra les problèmes théoriques suivants :

1° Quelle sera, en tonnes, la consommation journalière de pyrite de fer ?

2° Quel sera, en mètres cubes, le volume total d'air (supposé pris à 0° et 76cm) nécessaire chaque jour à la fabrication, à partir de la pyrite ?

3° Quel sera, chaque jour, le nombre de calories dégagées par la formation de l'acide sulfurique liquide à partir du gaz sulfureux, de l'oxygène gazeux, et de l'eau liquide ?

Données :

$S + 2O = SO^2$ gaz $+ 69^c,2$ (en calories-kilogrammes par molécule-gramme) ;

$S + 3O + H^2O$ liquide $= SO^4H^2$ liquide $+ 124^c$ (en calories-kilogrammes par molécule-gramme).

Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques.

(19 juin, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2.)

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT

22e Année. Septembre 1912. N° 12.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LE CALCUL DES RACINES RÉELLES D'UNE ÉQUATION

par M. **G. Cotty**, élève à l'Ecole normale supérieure.

Soit $F(x) = 0$ une équation quelconque, algébrique ou transcendante ; je peux d'une infinité de manières la mettre sous la forme

$$f(x) - g(x) = 0,$$

$f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ étant deux équations dont le choix comporte une certaine part d'arbitraire.

Pour exposer le principe de la méthode de calcul des racines d'une équation par des approximations successives, nous supposerons que nous sachions résoudre les équations $f(x) = A$, $g(x) = B$, A et B étant deux constantes, et que nous ayons pu enfermer chaque racine de $F(x) = 0$ dans un intervalle (a, b) où $f'(x)$ et $g'(x)$ gardent un signe constant.

1er Cas. — *$f'(x)$ et $g'(x)$ ont le même signe dans l'intervalle (a, b).* — Par exemple, supposons que $f'(x)$ et $g'(x)$ soient toutes deux positives.

Considérons $F(a) = f(a) - g(a)$.

Si $f(a) - g(a) = 0$, a est racine.

En dehors de ce cas, on peut avoir, soit $f(a) - g(a) > 0$, soit $f(a) - g(a) < 0$.

1° $f(a) - g(a) > 0$.

Considérons l'équation $\varphi(x) = g(x) - f(x) = 0$.

Je dis que cette équation a une racine et une seule x_1 comprise entre a et b. En effet

$$\varphi(a) = g(a) - f(a),$$
$$\varphi(b) = g(b) - f(a).$$

Or $\varphi(x)$ croît constamment de a à b, $\varphi(a)$ est négatif,

$$\varphi(b) = g(b) - g(a) > 0.$$

Donc $\varphi(x) = 0$ a une racine et une seule dans l'intervalle $(a,$

Soit x_1 cette racine. Je dis que x_1 est supérieur à a.

Pour le prouver, il me suffit de montrer que $g(x_1) > g(a)$.

Cela résulte de ce que l'on a $f(a) > g(a)$.

Remarquons encore que l'on a $f(x_1) - g(x_1) > 0$,

car $f(x_1) > f(a)$,

puisque x_1 est supérieur à a.

x_1 jouit de propriétés analogues à celles de a et un raisonnement identique à ce précédent montre que l'équation $g(x) = f(x_1)$ a une racine et une seule x_2 supérieure à x_1 entre x_1 et b.

Finalement, nous pouvons former une suite de quantités $a, x_1, x_2, \ldots, x_n$ définies par les équations suivantes :

$$g(x_1) = f(a),$$
$$g(x_2) = f(x_1),$$
$$\cdots$$
$$g(x_n) = f(x_{n-1}).$$

x_n va continuellement en croissant avec n et reste inférieur à b. Donc la suite précédente admet une limite, ξ, inférieure ou égale à b; or $f(x)$ et $g(x)$ sont continues. Donc on aura

$$g(\xi) - f(\xi) = 0.$$

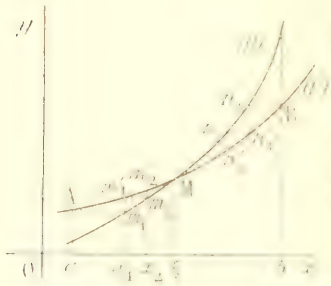
ξ sera racine de $F(x) = 0$. Comme ξ est dans l'intervalle (a, b), c'est la racine unique dont l'existence a été supposée dans (a, b).

On en obtient ainsi de plus en plus de valeurs approchées par défaut, mais on peut aussi en avoir des valeurs approchées par excès.

Puisque $f(a) - g(a)$ est positif, $f(b) - g(b)$ est négatif. On montrera facilement qu'on peut former une suite de quantités $b, y_1, y_2, \ldots, y_n$, définies par

$$g(y_1) = f(b),$$
$$g(y_2) = f(y_1),$$
$$\ldots\ldots$$
$$g(y_n) = f(y_{n-1}).$$

y_n décroissant avec n et tendant vers la racine ξ. Cette suite donnera des valeurs approchées par excès de ξ.



Interprétation géométrique. — Soit (C) la courbe ayant pour équation $y = f(x)$, (g) la courbe ayant pour équation $y = g(x)$.

Puisque $f(x)$ et $g(x)$ croissent de a à b, ces courbes ont la forme indiquée sur la figure.

On voit facilement que la formation de la suite (x_n) revient à insérer entre (C) et (g) une ligne brisée $Bm_1m_2m_3\ldots$, les points m_1 étant sur (C), les points m_2 sur (g), les droites m_1m_2 étant parallèles à Ox et les droites m_2m_3 parallèles à Oy.

La formation des y_n revient au tracé de la ligne brisée $Bn_1n'_1n_2n'_2\ldots$.

On voit sans peine que les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ définies par

$$f(a) = g(x_1),$$
$$f(x_1) = g(x_2),$$
$$\ldots\ldots$$
$$f(x_{n-1}) = g(x_n)$$

croissent et tendent vers la racine ξ.

De même les quantités $y_1, y_2, \ldots, y_n$, définies par

$$g(b) = f(y_1),$$
$$g(y_1) = f(y_2),$$
$$\ldots\ldots$$
$$g(y_{n-1}) = f(y_n)$$

décroissent et tendent aussi vers ξ.

L'interprétation géométrique est analogue à celle du cas précédent.

Si $f'(x)$ et $g'(x)$ étaient toutes deux négatives dans l'intervalle (a, b), on ramènerait ce cas au cas précédent en écrivant l'équation

$$-f(x) = -g(x) = 0.$$

2° Cas. — $f'(x)$ et $g'(x)$ sont de signes contraires dans l'intervalle (a, b). — Nous pouvons toujours supposer que l'on ait $f'(x) > 0$ et $g'(x) < 0$.

Alors $F'(x) = f'(x) - g'(x)$ sera positif dans (a, b); on aura donc nécessairement

$$F(a) < 0, \qquad F(b) > 0.$$

En résumé les quatre quantités $f(a)$, $g(a)$, $f(b)$, $g(b)$ satisfont aux quatre conditions suivantes :

$$f(a) < g(a), \qquad f(a) > f(b),$$
$$f(b) > g(b), \qquad g(a) > g(b).$$

Nous ferons dans ce cas sur (a, b) une hypothèse supplémentaire.

Considérons le système

$$f(x) - g(x) = 0,$$
$$f(x) - g(x) = 0.$$

Nous supposerons qu'il n'admet pas de solution (x, y) dans l'intervalle (a, b), pour laquelle $x = y$.

1° $f(a) > g(b)$ et $g(a) > f(b)$, les deux signes de $\varphi(x)$ ne pouvant exister simultanément.

Considérons l'équation

$$\varphi(x) = g(x) - f(x) = 0.$$

Je dis qu'elle a une racine et une seule entre a et b.

En effet $\varphi(x)$ décroît dans l'intervalle (a, b); d'autre part, $\varphi(a) = g(a) - f(a)$ est positif, $\varphi(b) = g(b) - f(a)$ est inférieur à $g(b) - f(b)$, donc est négatif.

$\varphi(x) = 0$ a une seule racine x_1 dans (a, b), et $x_1 > b$.

On a $$g(x_1) = f(x_1).$$

Formons $f(x_0)$, je dis que l'on a

$$f(x_0) > g(x_0).$$

En effet $$f(x_0) > f(a) > g(x_0),$$

car x_0 est supérieur à a. x_0 est donc supérieur à la racine ξ de l'équation $f(x) = 0$ dans (a, b).

Considérons l'équation

$$\psi(x) = g(x) - f(x) = 0.$$

Elle a une racine et une seule, x_1, entre a et x_0, car dans l'intervalle (a, x_0), $\psi(x)$ décroît constamment et d'autre part

$$\psi(a) = g(a) - f(x_0), \qquad \psi(a) = g(a) - g(b) > 0,$$

et $$\psi(b) = g(b) - f(x_0), \qquad \psi(b) < 0.$$

Je dis que $\xi > x_1 > a$.

Pour le prouver montrons que $g(x_1) > f(x_1)$.

Cela résulte de ce que $g(x_1) = f(x_1)$ et $f(x_1) > f(x_0) > g(x_1)$ est donc inférieur à ξ.

On a $x_1 > a$. En effet $g(x_1) = f(x_1)$ est inférieur ou égal à $f(b)$ puisque $x_1 \leq b$. Or $f(b) < g(a)$, donc

$$g(x_1) < g(a), \qquad x_1 > a.$$

On ne peut pas avoir $x_1 = a$, sinon on aurait

$$f(x_1) = g(x_1),$$
$$f(x_0) = f(x_0),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse faite au début.

En raisonnant à partir de x_1 et de x_0, comme nous l'avons fait à partir de a et de b, nous calculerons deux nombres x_2 et x_3 comprenant ξ et situés dans l'intervalle (x_0, x_1). Finalement nous formerons une suite de quantités $a, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ définies par les équations

$$\varphi(x_1) = f(x_0),$$
$$\varphi(x_2) = f(x_1),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\varphi(x_n) = f(x_{n-1}),$$

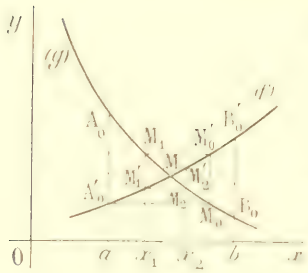
les x d'indice impair allant en décroissant, les x d'indice pair allant en croissant, et tout x d'indice pair étant supérieur à tout x d'indice impair.

x_{2p} tendra vers une limite $\lambda \geq a$. x_{2p+1} tendra vers une limite $\mu \leq b$, et l'on aura

$$f(\lambda) = g(\mu),$$
$$f(\mu) = g(\lambda).$$

Comme le système $$f(y) - g(x) = 0,$$
$$f(x) - g(y) = 0,$$

n'a pas d'autre solution dans (a, b) que la solution $x = \xi$, on aura nécessairement $\lambda = \mu = \xi$. x_n est toujours supérieur à ξ quel que soit p et x_{n+1} est inférieur à ξ.



Interprétation géométrique. — Traçons dans un plan deux axes rectangulaires Oy, Ox, et les deux courbes (f) et (g) ayant respectivement pour équations

$$y = f(x) \quad \text{et} \quad y = g(x).$$

L'hypothèse supplémentaire faite dans le cas précédent revient géométriquement à la suivante : il n'y a pas entre les deux droites $A_0A'_0$ et $B_0B'_0$ de rectangle dont les côtés soient parallèles aux axes et dont les sommets soient sur les courbes (f) et (g).

La formation de la suite des quantités (x_n) revient comme on s'en assurera facilement à tracer la ligne brisée $A_0M_1M'_1M_2M'_2M_3 \ldots M_nM'_n \ldots$, M_n étant sur (g), M'_n sur (f), $M_nM'_n$ étant parallèle à Oy, et M'_nM_{n+1} étant parallèle à Ox.

Nous avons supposé $f(a) > g(a)$, $f(b) < g(b)$

on peut avoir trois autres cas.

2° $f(a) > g(b)$ et $g(a) > f(b)$. — On montrera sans peine que l'on peut former une suite de quantités (x_n) définies par les équations

$$f(x_1) = g(b),$$
$$f(x_2) = g(x_1),$$
$$\cdots\cdots$$
$$f(x_n) = g(x_{n-1}),$$

tous les x étant dans l'intervalle (a, b), x_1 décroissant et tendant vers la racine, x_2, x_3, ... croissant et tendant vers cette même racine ξ.

3° $f(a) < g(b)$ et $g(a) < f(b)$. — On posera

$$f(x_1) = g(b),$$
$$g(x_2) = f(x_1),$$
$$\cdots\cdots$$
$$g(x_n) = f(x_{n-1}),$$

les x d'indice pair croîtront et tendront vers ξ; les x d'indice impair décroîtront et tendront aussi vers ξ.

4° $f(a) < g(b)$ et $g(a) > f(b)$. — Dans ce cas, on verra que l'équation $g(x) = f(b)$ a une racine entre a et b, soit x_0. On formera $f(x_0)$.

Si $f(x_0) = g(b)$, on sera ramené au deuxième cas où a est remplacé par x_0.

Si $f(x_0) < g(b)$, on sera ramené au premier cas où b est remplacé par x_0.

On ne peut pas avoir $f(x_0) = g(b)$ à cause de l'hypothèse supplémentaire faite dans le cas où $f'(x)$ et $g'(x)$ sont de signes contraires dans (a, b).

Il reste naturellement entendu que l'on ne considère jamais le cas où $f(a) = g(b)$ et $f(b) = g(a)$.

Si ce cas se présentait, on prendrait un nombre quelconque λ dans l'intervalle (a, b), on formerait $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$; si on avait $f(\lambda) - g(\lambda) = 0$, on aurait eu la chance de tomber sur la racine ; sinon on tombera sur un des cas précédents et on remplacera l'un des nombres a ou b par λ, de façon que le nouvel intervalle formé comprenne la racine, ce qui est facile à faire en considérant $F(a)$, $F(b)$ et $F(\lambda)$.

Si on avait $f(\lambda) = g(\lambda)$ quel que soit λ dans (a, b), ceci prouverait que dans (a, b) l'équation proposée $F(x) = 0$ est une identité.

Les interprétations géométriques des trois derniers cas sont analogues à celles du premier. Le lecteur fera aisément les figures correspondantes.

Applications de la Méthode des Approximations successives aux équations algébriques.

Nous avons fait dans l'exposé de la méthode des hypothèses qu'il semble difficile de vérifier dans la pratique.

Nous allons montrer que, au contraire, nous pouvons résoudre les équations algébriques sans rien savoir sur l'existence de leurs racines, s'il en existe, et sur leur place.

Pour cela, nous résoudrons d'abord un cas particulier.

Problème. — *Recherche de la racine positive ξ de l'équation*

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m = K,$$

$K - A_m$ *étant positif et non nul, et tous les coefficients* A *étant positifs, quelques uns pouvant être nuls, à l'exception de* A_0.

L'équation proposée peut se mettre sous la forme

$$F(x) = A_0 x^{m-p} + A_1 x^{m-p-1} + \cdots + A_{m-p} - \frac{K - A_m}{x^p} = 0,$$

p étant choisi de telle façon que A_{m-p} soit différent de 0 et que tous les A d'indice supérieur à $m - p$ soient nuls.

On verra aisément, en vérifiant que les conditions nécessaires pour l'application de la méthode sont vérifiées, qu'on peut former la suite

$$x_1 = \sqrt[p]{\frac{K - A_m}{A_{m-p}}},$$

$$x_2 = \sqrt[p]{\frac{K - A_m}{f(x_1)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \sqrt[p]{\frac{K - A_m}{f(x_{n-1})}}.$$

Si p est pair, on prend bien entendu la racine positive. Les x d'indice pair vont en croissant et restent inférieurs à la racine ξ ; les x d'indice impair vont en décroissant et restent supérieurs à ξ. En général x_{2p} et x_{2p+1} tendront vers ξ.

Il y a cependant un cas d'exception. S'il existe deux nombres positifs X et Y tels que l'on ait

$$X < Y,$$

$$f(X) - g(Y) = 0,$$

$$f(Y) - g(X) = 0,$$

x_{2p} pourra tendre vers X et x_{2p+1} vers Y.

On a déjà vu comment on lève cette difficulté (voir le cas de $f(a) = g(b)$ et $f(b) = g(a)$). Mais nous pouvons la lever autrement. Nous avons enfermé la racine dans un intervalle (X, Y) compris dans l'intervalle $(0, \alpha)$. Posons $x = X + x'$. L'équation proposée se changera en une autre $\varphi(x') = 0$.

Comme X est positif, on voit facilement que $\varphi(x') = 0$ a la même forme que l'équation $F(x) = 0$. C'est

$$\alpha_0 x'^m + \alpha_1 x'^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1} x' + \alpha_m = K.$$

Les α sont tous positifs et $\alpha_m - \alpha_0$ est positif, puisque l'équation a vraisemblablement une racine positive.

On traitera cette nouvelle équation comme la première.

Si la même circonstance se présente, au lieu de calculer $\xi - X$, on aura à séparer deux nombres comprenant $\xi - X$: on appliquera encore le même procédé. Comme la circonstance signalée ne pourra se présenter qu'un nombre limité de fois, on calculera finalement ξ par deux suites donnant des valeurs approchées de ξ par excès et par défaut.

Résolution d'une équation algébrique quelconque. — Soit l'équation $F(x) = 0$, $F(x)$ étant un polynome

entier de degré m par rapport à x. Cette équation a-t-elle des racines et, si elle en a, peut-on les calculer ? La méthode précédente convenablement appliquée permet de résoudre ce problème.

S'il y a la racine 0, je l'enlève. Je peux ne considérer que des équations n'admettant pas de racines nulles. Je peux ne chercher que les racines positives, la recherche des racines négatives se ramenant à la recherche des racines positives de l'équation transformée en $-x$.

Posons $$F(x) = f(x) - g(x),$$
$f(x)$ et $g(x)$ étant deux polynomes *à coefficients tous positifs*. Cela est visiblement possible et même d'une infinité de manières. $f(x)$ et $g(x)$ sont positifs de 0 à $-x$.

Considérons $F(0) = f(0) - g(0)$. On peut toujours supposer cette quantité positive, sinon on aurait au préalable à changer les signes des deux membres de l'équation $F(x) = 0$.

a) S'il y a une racine positive au moins de $F(x) = 0$, il existe un nombre b tel que l'on ait $F(b) < 0$ et tel qu'entre 0 et b il n'y ait qu'une seule racine ξ de l'équation. Alors la suite

$$x_0 = 0,$$
$$g(x_1) = f(x_0),$$
$$\cdots$$
$$g(x_n) = f(x_{n-1}),$$

donnera x_n tendant vers ξ.

b) S'il n'y a pas de racine positive de $F(x) = 0$, les x_n de la suite précédente croîtront indéfiniment. S'ils tendaient vers une limite finie λ, on aurait nécessairement

$$g(\lambda) = f(\lambda)$$

et λ serait racine, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous concluons ainsi : Si la suite des x_n tend vers une limite finie ξ, ξ est la plus petite racine positive de l'équation proposée. Si la suite des x_n tend vers l'infini, l'équation n'a pas de racine positive.

Le problème est donc ramené au calcul des x_n.

Il faut remarquer qu'en réalité on n'a pas besoin de x_n lui-même, mais d'une valeur de x_n approchée par défaut et supérieure à x_{n-1}. Or, pour calculer x_n on résout des équations de la forme étudiée dans le cas particulier précédent où nous avons appris à former des valeurs de x_n approchées par défaut. Le problème est donc bien résolu.

Théoriquement, on enlèvera par une division la racine ξ; si elle est multiple, nous en serons avertis en formant la transformée de l'équation en $x + \xi$. Cette équation aura une racine nulle multiple ; nous l'enlèverons. Nous rechercherons alors la plus petite racine positive de l'équation nouvelle et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve une équation n'ayant plus de racine positive.

Pratiquement, on procédera autrement. Traitons d'abord le problème suivant :

Problème. — *Trouver les deux racines de l'équation* $F(x) = 0$ *les plus voisines d'un nombre donné* N *et situées de part et d'autre de* N.

Si ces racines existent, on verra que ce sont les limites des suites

$$(1)\quad \begin{cases} g(x_1) = f(N), \\ \cdots \\ g(x_n) = f(x_{n-1}), \end{cases}$$

et

$$(2)\quad \begin{cases} f(x_1) = g(N), \\ \cdots \\ f(x_n) = g(x_{n-1}). \end{cases}$$

Si l'une des deux (la plus petite) existe seule, une des suites tendra vers elle, l'autre suite croîtra indéfiniment ; s'il n'y a pas de racine positive inférieure à N, une des suites deviendra négative et l'on s'arrêtera.

Revenons maintenant au problème précédent. On a calculé la plus petite racine positive ξ de $F(x) = 0$. Prenons un nombre N supérieur à ξ et cherchons les racines voisines de N. Si entre ξ et N il n'y a pas d'autre racine que ξ, une des racines voisines de N sera ξ. Elle sera donnée par une des suites précédentes ; l'autre suite tendra vers l'infini si ξ est la seule racine positive de l'équation $F(x) = 0$, et vers ξ', si ξ' est une racine de l'équation supérieure à ξ. Si entre ξ et N il y a une autre racine ξ_1, on l'aura calculée. Et on recherchera les racines comprises entre ξ_1 et ξ_2 en prenant un nombre N entre ξ_1 et ξ_2 et en résolvant le problème précédent pour ce nombre. On calculera ainsi de proche en proche les racines de plus en plus grandes de $F(x) = 0$, en s'assurant à chaque fois qu'on n'en oublie pas.

La résolution d'une équation algébrique se traite ainsi en extrayant des racines d'ordre inférieur ou égal au degré de l'équation.

La méthode des approximations successives s'applique à des équations transcendantes ; et il est souvent commode de prendre pour $f(x)$ la partie transcendante, pour $g(x)$ la partie algébrique.

Dans le cas des équations du troisième et du quatrième degré, on ramène la solution au calcul de racines d'équations du second degré. Par exemple, soit à résoudre

$$ax^3 + bx^2 + cx^2 + dx + e = 0.$$

On l'écrit
$$ax + b + \frac{cx^2 + dx + e}{x^2} = 0$$

On prendra
$$f(x) = ax + b,$$
$$g(x) = -\frac{cx^2 + dx + e}{x^2}.$$

On sait résoudre $f(x) = \lambda$, $g(x) = \mu$. La résolution de l'équation sera ainsi

ALGÈBRE

2004. — *L'équation*
$$ax^m + \frac{m}{1} bx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} cx^{m-2} + \ldots = 0,$$
dans laquelle on suppose
$$b^2 - ac = 0,$$
ne peut avoir toutes ses racines réelles que si elle a toutes ses racines égales. (Après démonstration par le théorème de Rolle, on donnera une démonstration n'impliquant l'hypothèse ni moins ni moins $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$).

On voit aisément que la dérivée d'ordre $m - 2$ du polynome
$$f(x) = ax^m + \frac{m}{1} bx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} cx^{m-2} + \ldots$$
est
$$f^{(m-2)}(x) = m(m-1)\ldots(3)(ax^2 + 2bx + c),$$
qui peut s'écrire, en supposant $b^2 - ac = 0$,
$$f^{(m-2)}(x) = m(m-1)\ldots(3)\left(x + \frac{b}{a}\right)^2.$$

Si $-\frac{b}{a}$ n'annule pas la dérivée précédente $f^{(m-2)}(x)$, celle-ci n'admet qu'une racine double d'après le théorème de Rolle ; donc l'équation $f(x) = 0$ ne peut avoir toutes ses racines réelles, car on sait que lorsqu'un polynome a toutes ses racines réelles, toutes ses dérivées ont aussi toutes leurs racines réelles.

Si au contraire $-\frac{b}{a}$ annule $f^{(m-2)}(x)$, $-\frac{b}{a}$ est racine triple de cette dérivée.

Plaçons nous maintenant dans cette hypothèse et remplaçons x par $-\frac{b}{a}$ dans la dérivée précédente $f^{(m-4)}(x)$. Si $f^{(m-4)}(x)$ ne s'annule pas pour $x = -\frac{b}{a}$, $f^{(m-4)}(x)$ a au plus deux racines réelles, et $f(x)$ ne peut avoir toutes ses racines réelles. Si $f^{(m-4)}\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$, $-\frac{b}{a}$ est racine quadruple de $f^{(m-4)}(x)$.

En continuant de proche en proche, on voit que ou bien $f(x)$ est divisible par $\left(x + \frac{b}{a}\right)^m$, ou bien $f(x)$ n'a pas toutes ses racines réelles.

On peut d'ailleurs vérifier ce résultat de la façon suivante.

Désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les racines de $f(x)$; nous avons

$$\Sigma\alpha = -m\frac{b}{a}, \qquad \Sigma\alpha\beta = \frac{m(m-1)}{2}\cdot\frac{c}{a}$$

Posons $-\frac{b}{a} = k$; la relation $b^2 - ac = 0$ nous donne $\frac{c}{a} = k^2$, et par suite

$$\Sigma\alpha = mk, \qquad \Sigma\alpha\beta = \frac{m(m-1)}{2}k^2, \qquad \text{et} \qquad \Sigma\alpha^2 = (\Sigma\alpha)^2 - 2\Sigma\alpha\beta = mk^2.$$

On en déduit $\Sigma\alpha^2 - 2k\Sigma\alpha + mk^2 = 0$, ou $\Sigma(\alpha - k)^2 = 0$,

ou $(\alpha - k)^2 + (\beta - k)^2 + (\gamma - k)^2 + \ldots = 0$.

Si aucune racine n'est imaginaire, cette relation ne peut avoir lieu que si l'on a $\alpha - k = 0$, $\beta - k = 0$, $\gamma - k = 0$, ..., c'est-à-dire $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = k$, c'est-à-dire si toutes les racines sont égales.

B. MALAISÉ, à Denain.

Autre solution. — En posant comme précédemment $-\frac{b}{a} = k$, $\frac{c}{a} = k^2$, le polynome $f(x)$ s'écrit

$$f(x) = a\left[x^m - mkx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}k^2x^{m-2}\right],$$

ou, en complétant la puissance m^{e} de $x - k$ dont les trois premiers termes sont en évidence,

$$f(x) = a(x-k)^m + P(x),$$

$P(x)$ désignant un polynome de degré inférieur ou égal à $m - 3$.

1° Si le polynome $P(x)$ est identiquement nul, $f(x)$ se réduit à $a(x-k)^m$. L'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines égales.

2° Supposons que $P(x)$ ne soit pas identiquement nul, et faisons la transformation $x - k = y$. L'équation devient

$$ay^m + Q(y) = 0,$$

$Q(y)$ étant un polynome de degré inférieur ou égal à $m - 3$. On reconnaît alors l'existence d'une lacune d'au moins deux termes, donc l'équation a au moins deux racines imaginaires.

P. TRUCHARD, à Mirebeau (Aude).

Bonnes solutions par MM. Biais, lycée Saint-Louis; A. Bossé, lycée de Nancy; A. Coustou, 147e d'infanterie à Sedan; L. Gouillot, école des Aumônes à Lyon; A. Rousseau, à Fourmies-en-Wappes; N. Sevaux, 61e d'artillerie; L. Simon, à Fourmies (Nord).

GÉOMÉTRIE

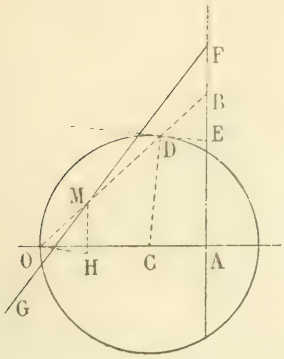
1984. — *On donne une cubique circulaire droite à point double, par son axe, son point double, un point et la tangente en ce point.*

1° *Construire le sommet et les tangentes au point double;*

2° *Construire le point de la cubique situé sur la tangente donnée;*

3° *Construire l'asymptote.*

Soient O le point double, Ox l'axe, M le point donné et MG la tangente à la cubique en ce point. Cette cubique est une cissoïde ayant pour pôle le point O et pour directrices un cercle de centre C, sur Ox, qui passe en O, et une droite AB perpendiculaire à Ox. Supposons le problème résolu et les éléments fondamentaux de la cissoïde construits, cercle C et droite AB.



Alors DB = OM, et le triangle formé par DB, la tangente au cercle et la droite AB est isocèle, l'angle B est égal à l'angle D. Nous pouvons donc construire la direction de la tangente au cercle et tracer avec OM un triangle OHM égal au triangle DEB et ayant ses côtés parallèles à ceux de celui-ci.

D'autre part, on sait que la tangente à la cissoïde et la tangente au cercle coupent la directrice rectiligne AB en deux points, F et E, symétriques par rapport au point B ; par conséquent BF = BE = HM = OH, et, puisque les droites MF et OM sont connues, ceci nous permet de trouver la droite BF, c'est-à-dire la directrice rectiligne de la cissoïde. En prenant BD équipollent à MO, nous avons le point D. La tangente au cercle est DE, parallèle à OH, et le centre C du cercle s'en déduit facilement.

Toutes les questions posées se résolvent alors sans difficulté.

Bonnes solutions : MM. A. Wiener, à l'École des Mines ; [illegible] ; G. Lauri à Bordeaux ; [illegible] Simon, à Fourmies ; L. [illegible] ; M. Fourniol ; P. Vergnes ; Ch. Monzat, 63e d'infanterie ; A. Rousseau, à Fourmies ; Weppes.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2005. — *Étudier la surface d'équation* $z^2 + xy + z = 0$.

C'est une surface réglée. Construire géométriquement une génératrice. Construire géométriquement le point de la ligne de striction. Trouver les traces et les contours apparents sur les plans de projection.

Le cône des directions asymptotiques se réduisant à un plan triple $z = 0$, la surface ne peut admettre que des génératrices parallèles au plan des yz. D'ailleurs si nous coupons par le plan $x = \lambda$, nous obtenons comme section la droite définie par les équations

$$x = \lambda, \qquad z + \lambda y + z^2 = 0$$

et en faisant varier λ, ces équations définissent toutes les droites tracées sur la surface.

Les projections de toutes ces droites sur le plan des yz sont tangentes à la courbe

$$4y^3 + 27z^2 = 0,$$

qui est précisément le contour apparent de la surface sur le plan des yz. Cette courbe est facile à construire ; elle est symétrique par rapport à Oy, elle admet à l'origine un point de rebroussement dont la tangente est Oy, et ses branches infinies sont paraboliques dans la direction Oz.

Cette courbe est une développée de parabole. On sait en effet que la développée de la parabole $y^2 - 2px = 0$ a pour équation $8x^3 - p(x - 27py^2 = 0$; on en conclut, en transportant l'origine au point $x = p$, $y = 0$, que l'équation $4x^3 - \frac{27p}{2}y^2 = 0$ représente la développée de la parabole

$$y^2 - 2px - 2p = 0.$$

Si l'on fait alors $p = -2$, et si l'on change x en y et y en z, on peut dire que la courbe $4y^3 + 27z^2 = 0$ est la développée de la parabole $z^2 - 4y - 8 = 0$. On vérifiera d'ailleurs aisément que la droite $z + \lambda y + z^2 = 0$ est normale à cette parabole au point qui a pour cote $-\lambda$.

On construira donc aisément la génératrice de la surface qui est située dans le plan $x = \lambda$, et

prenant l'intersection de ce plan et du plan parallèle à Ox passant par la normale à la parabole $z^2 + 4y - 8 = 0$ au point $z = -2\lambda$.

Cherchons maintenant à construire le point central de la génératrice G située dans le plan $x = \lambda$. Pour cela nous considérons la génératrice voisine G′ située dans le plan $x = \lambda'$, nous menons la perpendiculaire commune AA′ à ces deux droites, et nous cherchons la limite du point A quand λ' tend vers λ. La droite AA′ est parallèle à Ox et rencontre le plan de yz au point commun aux projections de G et G′ sur ce plan. Quand λ' tend vers zéro, ce point a pour limite le point de contact de la projection de G avec son enveloppe $4y^3 + 27z^2 = 0$. Mais ce point est précisément le centre de courbure de la parabole $z^2 + 4y - 8 = 0$ au point $z = -2\lambda$. On mènera donc par ce centre une parallèle à Ox, et le point où elle rencontre G est le point central de cette génératrice.

Les équations paramétriques de cette ligne de striction sont $x = \lambda$, $y = -3\lambda^2$, $z = 2\lambda$.

La surface coupe le plan des xy suivant l'axe des y et la parabole $x^2 + y = 0$; elle coupe le plan des xz suivant la cubique $x^3 + z = 0$, et le plan des yz suivant l'axe des y.

Son contour apparent sur le plan des yz est la courbe $4y^3 + 27z^2 = 0$; sur les deux autres plans elle n'a pas de contour apparent.

Solutions par MM. André Cornu, 1re d'infanterie à Sedan ; A. Rousseau, à Fourmies-en-Weppes ; L. Gouttiou, école des Anglais, à Lyon.

2009. — *Discutez l'équation*

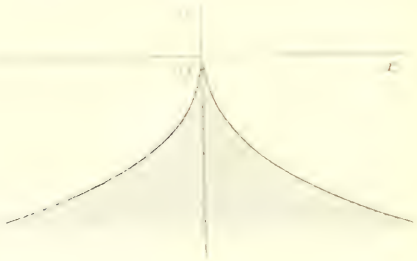
$$x^3 - px - q = 0. \qquad (1)$$

Soit M *un point de coordonnées* q *et* p ; *soient* α *et* β *deux racines de l'équation* (1). *Dans quelle région du plan peut se trouver* M *pour que* α *soit toujours comprise entre deux nombres* a *et* b, *et* β *entre deux nombres* c *et* d. *Cette région est limitée par quatre droites tangentes à une courbe* (C). *Quelle est cette courbe ?*

De point M *on mène les tangentes à la courbe* (C). *Elles coupent l'axe des* y *en des points* A, B, C. *Les normales aux tangentes en* A, B, C *coupent l'axe des* x *en des points* A′, B′, C′ *dont les abscisses sont racines de l'équation*

$$x^3 + px + q = 0.$$

L'équation $x^3 - px - q = 0$, que nous écrivons $t^3 - ty - x = 0$, représente, quand t varie, un système de droites, dont le coefficient angulaire est $-\frac{1}{t}$. L'enveloppe de ces droites est $4y^3 - 27x^2 = 0$. C'est une développée de parabole, symétrique par rapport à Oy, ayant son point de rebroussement à l'origine et située au-dessous de Ox. Les trois racines de l'équation en t sont réelles dans la région hachurée ; il n'y en a qu'une qui soit réelle quand le point M est dans les autres régions.



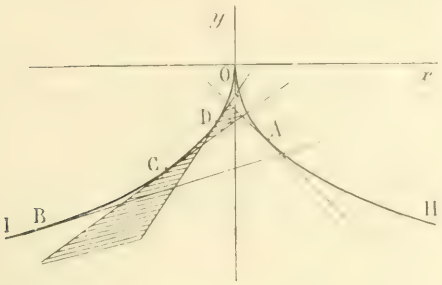
Pour que par le point M passent deux droites dont les t soient compris entre a et b d'une part, et entre c et d d'autre part il faut déjà que les trois valeurs de t soient réelles, c'est-à-dire que le point M soit dans la région hachurée et de plus que les coefficients angulaires soient compris entre $-\frac{1}{a}$ et $-\frac{1}{b}$, et entre $-\frac{1}{c}$ et $-\frac{1}{d}$, du moins lorsqu'on suppose les quatre nombres positifs.

Il est plus commode de transformer l'énoncé, de poser $t = -\frac{1}{m}$ et d'envisager l'équation

$$m^3x - m^2y - 1 = 0,$$

qui donne $y = mx - \frac{1}{m^2}$.

Il revient alors au même de chercher les régions où doit se trouver le point M pour que l'une des racines soit comprise entre deux nombres donnés, et l'autre entre deux nombres également donnés. A chacun de ces quatre nombres correspond une tangente dont le coefficient angulaire est donné. On place les quatre points de contact et on voit aisément les arcs que doivent parcourir les deux points de contact des tangentes issues du point M : ce sont ici, par exemple, les arcs AH, IB et CD. Les tangentes en A, B, C, D et la courbe limitent les régions que l'on reconnaîtra facilement.



Les régions hachurées sont alors acceptables. Tous les problèmes analogues se résoudront sans peine.

La dernière partie est évidente; c'est une simple vérification.

Bonnes solutions : MM. F. Margand, école des Anglais ; N. Savary ; R. Boyer, lycée de Nice.

CONCOURS DE 1912 (*Suite.*)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires (1).

1° Un contour quadrangulaire gauche ABCDA étant circonscrit à une sphère (S) de centre S, aux points M, N, P, Q, on a, en orientant les tangentes m, n, p, q de A vers B, de B vers C,...,

$$\alpha.\overline{AM} = \overline{AQ}, \qquad \beta.\overline{BN} = \overline{BM}, \qquad \gamma.\overline{CP} = \overline{CN}, \qquad \delta.\overline{DQ} = \overline{DP},$$

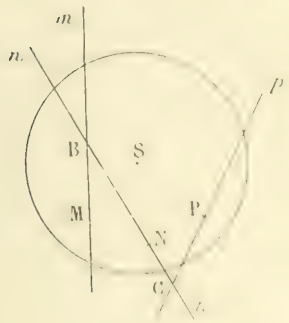
$$\alpha = \pm 1, \qquad \beta = \pm 1, \ldots.$$

Cela conduit à prévoir deux cas distincts : dans l'un des cas, le contour ABCDA n'est pas quelconque, et l'on a

$$a + \beta.b + \beta\gamma.c + \beta\gamma\delta.d = 0,$$

a, b, c, d étant les longueurs des côtés : dans l'autre cas, on indiquera une propriété des deux plans MPN et MPQ, par exemple.

2° On suppose donnée la sphère S. Soient m et p deux droites fixes tangentes à cette sphère aux points M et P. On considère les droites n qui s'appuient sur les droites m et p (points d'appui B et C) et qui sont tangentes à la sphère (point de contact N). Ces droites forment deux systèmes (n) et (n') ; on déterminera les surfaces (Σ) et (Σ') dont elles sont les génératrices, les courbes (Γ) et (Γ') qui sont les lieux des points N et N' ; on introduira, si l'on veut, l'enveloppe des plans (S, n) et celle des plans (S, n'). Que peut-on dire des tangentes en M et P aux deux courbes (Γ) et (Γ') ? — Application aux contours du paragraphe 1.



3° On suppose maintenant donné le contour ABCDA, et l'on cherche les sphères (S) tangentes aux quatre côtés.

On examinera d'abord le cas où l'on veut avoir une sphère (S) ayant quatre points de contact dans un même plan ; on montrera que, si une telle sphère existe, il doit en exister une infinité. On établira rigoureusement ce fait en projetant, par exemple, la figure sur un plan convenablement choisi, et on fera connaître le lieu des centres des sphères en question ; on indiquera la sphère de plus petit rayon. Quelle est l'enveloppe des sphères (S) ?

On examinera en second lieu le cas où l'on demande une sphère (S) ayant quatre points de contact [illegible] même plan. On traitera la question par le calcul, en posant

$$\overline{AM} = x, \qquad \overline{BN} = y, \qquad \overline{CP} = z, \qquad \overline{DQ} = t.$$

(1) Des solutions étudiées de la question sont publiées dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*.

on fera voir que, pour chaque système de valeurs des inconnues, on a bien une sphère (S). On classera les solutions en quatre groupes (1 et 1'), (2 et 2'), ...

Dans le cas où il existe une série continue de sphères (S), avec points de contact dans un même plan, que deviennent les solutions isolées, avec points de contact non assujettis à être dans un même plan ? Certaines de ces solutions isolées font-elles partie de la série continue de solutions ?

Remarque. — Soient a, b, c, d les plans perpendiculaires aux plans des angles A, B, C, D, menés par les bissectrices de ces angles, et a', b', c', d' les plans analogues menés par les bissectrices des angles extérieurs ; on pourra indiquer rapidement le rôle de ces plans au paragraphe 3, d'abord dans chacune des deux hypothèses $a+b+c-d=0$, $a+b-c-d=0$, puis, dans le cas d'un contour quelconque, en considérant, par exemple, les solutions (1 et 1') ; on reviendra alors sur le résultat obtenu à la fin du paragraphe 3. Dans les figures qui accompagneront le texte, on représentera le plan a par la bissectrice de l'angle A,...

Mathématiques spéciales.

2077. — 1° Si, dans une équation du troisième degré

$$(1) \qquad x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0,$$

le coefficient p_1 est nul, la fonction $z_1^2-z_2z_3=z_2^2+z_2z_3+z_3^2$, non symétrique par rapport aux lettres, est équivalente à une fonction symétrique des racines de l'équation. Le cas où $p_1=0$ est-il le seul où il existe un polynome homogène du second degré à trois variables qui jouisse de la même propriété ?

Le coefficient p_1 n'étant pas nul, former l'équation (2) qui a pour racines les valeurs que prend la fonction x^2+xy+y^2 quand on y remplace x et y par deux racines quelconques de l'équation (1). L'équation (2) peut elle être équivalente à l'équation (1) dont on l'a déduite ?

2° Les médianes d'un triangle ABC se coupant en un point O, on fait tourner ce triangle de 60° autour de O dans un sens et dans l'autre ; on obtient ainsi deux nouvelles positions A'B'C', A''B''C'' du triangle (A' et A'' étant les nouvelles positions du point A). Soient A'_1, A''_1 les milieux de BA', BA'' ; B'_1, B''_1 les milieux de CB', CB'' ; C'_1, C''_1 les milieux de AC', AC'' ; A'_2, A''_2 les milieux de CA', CA'' ; B'_2, B''_2 les milieux de AB', AB'' ; C'_2, C''_2 les milieux de BC', BC''. Montrer que les angles $A'_1OA''_1$, $A'_2OA''_2$, $B'_1OB''_1$, $B'_2OB''_2$, $C'_1OC''_1$, $C'_2OC''_2$ ont même bissectrice et qu'il existe sur cette bissectrice deux points ω', ω'' symétriques par rapport à O, tels que les quadrilatères $\omega'\omega''A'_1A''_1$, $\omega'\omega''A'_2A''_2$, $\omega'\omega''B'_1B''_1$,... soient inscriptibles.

Démontrer qu'il existe un triangle $A_1B_1C_1$ homothétique du triangle ABC par rapport à O et tel que, si l'on prend les inverses A_2, B_2, C_2 des sommets A_1, B_1, C_1, le pôle d'inversion étant soit ω', soit ω'', le centre des moyennes distances des points A_2, B_2, C_2 est soit ω', soit ω''.

(On pourra représenter les différents points par leurs affixes, rapportées à un système d'axes rectangulaires ayant O pour origine, et utiliser la propriété indiquée au n° 1.)

3° On considère les triangles ABC variables, tels que les points ω', ω'' qui leur correspondent soient fixes et pour lesquels le produit des longueurs des médianes est donné. Trouver le lieu des sommets de ces triangles. (On pourra se borner à construire ce lieu dans le cas où les données sont telles que l'un des triangles ABC ait deux sommets confondus.)

Etant donné un point A du lieu, construire le triangle ABC qui lui correspond.

Calcul différentiel et intégral.

Les axes de coordonnées ox, oy, oz, étant rectangulaires, on donne un cercle (γ), d'axe oz, de rayon r et de cote $z=h$.

Par un point arbitraire M du cercle (γ) on mène un plan, tangent à ce cercle, et dont la position dépend uniquement de la position du point M sur ce cercle. Lorsque le point M décrit le cercle (γ) ce plan enveloppe une surface développable (S) dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable, soit ω.

1° Déterminer la surface (S) et la courbe (C) section de cette surface par le plan xoy.

2° Comment doit-on choisir la fonction ω pour que la courbe (C) coïncide avec une courbe donnée (C_1) définie par son équation cartésienne ?

Montrer que la représentation est possible d'un nombre limité de manières et indiquer à quelles surfaces (S) correspondent les autres solutions de l'équation différentielle déterminant ω.

Y a-t-il des courbes C_1 exceptionnelles pour lesquelles la représentation par une courbe (C) est impossible ?

3° Comment appliquera-t-on la représentation précédente d'une courbe plane à l'intégration d'une équation différentielle ordinaire ?

Y a-t-il des équations différentielles exceptionnelles ?

Intégrer l'équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2.$$

Comment peut-on découper, dans le plan xoy, les courbes intégrales, par déplacement et déformation d'une surface développable (S) ?

Indiquer des équations du premier ou du second ordre dont l'intégration se ramène aux quadratures, et des équations du second ordre dont l'intégrale générale peut être découpée dans le plan xoy en utilisant le procédé mis en évidence pour l'équation précédente.

4° On considère une famille de développables (S) dépendant d'un paramètre et sur chacune de ces développables on choisit une courbe déterminée (σ). Les courbes (σ) engendrent une surface (Σ) que l'on peut représenter par les coordonnées de l'un de ses points exprimées à l'aide de deux paramètres.

Inversement, étant donnée une surface (Σ_1) par son équation cartésienne, peut-on la représenter de la façon précédente ?

5° Former l'équation aux dérivées partielles (E) déterminant les surfaces orthogonales à une famille donnée et à un paramètre de développables (S).

6° Déterminer les développables (S) et intégrer l'équation (E), lorsque cette équation (E) admet comme solution particulière la surface (Σ_2), lieu des arêtes de rebroussement des développables (S).

La surface (Σ_2) appartient-elle à l'intégrale générale ?

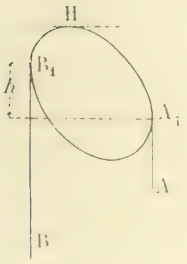
Existe-t-il des surfaces normales aux génératrices des développables (S) ? Le calcul met-il en évidence la génération de ces surfaces en partant de l'une d'entre elles ?

Mécanique.

Équilibre et mouvement d'un câble à cheval sur une poutre.

Un câble pesant flexible et inextensible est à cheval sur une poutre cylindrique horizontale fixe, le long d'une section droite S supposée convexe.

Notations. — On appellera H le point le plus haut de S, A_1, B_1 les deux points de S à tangente verticale, B étant au moins aussi haut que A_1.



On choisira pour origine des abscisses curvilignes s sur S le point A_1, le sens positif étant le sens A_1HB_1. On prendra une verticale ascendante comme axe des y et une horizontale orientée dans le sens de la demi-normale extérieure en A_1 comme axe des x. L'angle que fait la demi-normale extérieure à S en un point M de l'arc A_1HB_1, avec ox, sera désigné par φ et le rayon de courbure correspondant par r. La relation entre φ et l'abscisse curviligne $s = \overline{A_1M}$ sera représentée par l'équation $s = a(\varphi)$. On appellera T la valeur absolue de la tension en un point du câble et N celle de la réaction de la poutre sur l'unité de longueur du câble, au même point.

Données. — On connaît la longueur l de l'arc $\widehat{A_1HB_1}$, la longueur L du câble, son poids p par unité de longueur, enfin la hauteur h ($h > 0$) de B_1 au-dessus de A_1. On suppose la hauteur de A_1 au-dessus du sol supérieure à L, de sorte qu'on n'aura pas à s'inquiéter du choc sur le sol dans le problème dont l'énoncé suit.

Problème.

I. — *On négligera d'abord le frottement du câble sur la poutre.*

1° On étudiera l'équilibre du câble et sa stabilité.

2° En négligeant la résistance de l'air, en supposant qu'à l'instant initial tous les points du câble et leurs vitesses sont dans un même plan vertical et que toute portion libre du câble est verticale et animée d'une vitesse verticale, on montrera que la loi du mouvement s'obtient par des quadratures. On indiquera les principales circonstances qui peuvent se présenter suivant les données initiales.

En particulier, on déterminera la vitesse que possède le câble au moment où il quitte la poutre, en supposant la vitesse initiale nulle.

On calculera cette vitesse à un décimètre près par seconde en supposant que S est une section droite de périmètre égal à 1 mètre et qu'à l'instant initial le câble a deux portions libres, A_1A_2 et B_1B_2 ($A_2B_2 = 0$).

II. — *On reprendra ensuite la question de l'équilibre en tenant compte du coefficient de frottement du câble sur la poutre* ($f = \operatorname{tg}\theta$ étant le coefficient de frottement).

On se contentera d'étudier l'équilibre limite du câble dans le cas où L est supérieur à l et de rechercher, suivant les valeurs de L, si dans une position d'équilibre le câble a un ou deux brins libres. (On pourra simplifier en se bornant au cas où S est un cercle.)

En particulier on indiquera si dans l'application numérique proposée plus haut, le mouvement peut avoir lieu quand f, au lieu d'être négligeable, est égal à $\frac{1}{2}$.

QUESTIONS PROPOSÉES

2078. — On dit qu'une équation du quatrième degré est réciproque quand il existe une valeur de λ pour laquelle l'équation prend la forme

$$a(x^4 + 1) + bx(x^2 + 1) + cx^2 + \lambda = 0.$$

Montrer que, dans ce cas, l'équation est résoluble à l'aide d'équations du second degré.

1° Trouver la condition pour que l'équation $ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + f = 0$ soit réciproque de cette manière.

2° Si on fait la transformation $x = y + h$, il y a trois valeurs de h pour lesquelles l'équation en y devient réciproque ainsi. Former l'équation du troisième degré qui donne h et trouver la valeur de λ qui correspond à chaque valeur de h.

3° L'équation en y se décompose en deux trinômes, $ay^4 + 4by^3 + 6cy^2 + 4dy + f = (py^2 + ry + s)(qy^2 + ry + s)$; trouver p et q, la condition pour que $p = q$. Montrer directement que si le polynome du quatrième degré est un carré parfait, l'équation en h est indéterminée. Expliquer le résultat. E. H.

2079. — 1° On donne une conique C ; on demande de trouver toutes les droites Δ telles que si l'on fait tourner C autour de Δ il existe un cône ou un cylindre circonscrit à la surface engendrée Σ, le long de la conique. Montrer que ces droites Δ doivent rencontrer la conique C et satisfaire à une autre condition qu'on demande d'interpréter géométriquement. (Ces droites Δ forment donc une congruence dont la surface focale se décompose). Que devient le parallèle double pour ces surfaces Σ [1].

2° Trouver les courbes planes C′ qui par rotation autour de Oz engendrent une surface de révolution telle qu'il existe un cône ou un cylindre circonscrit le long de C′. Si l'on prend pour équations de la courbe

$$z = F(x, y),$$

on trouve pour déterminer F une équation différentielle dite de Jacobi qu'on peut facilement intégrer.

E. KERAVAL.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Concours de 1911.

1995. — *Étudier le mouvement d'un mobile M dont l'accélération γ et la vitesse v font un angle obtus, constant, α et sont dans un rapport constant $\frac{\gamma}{v} = c$.*

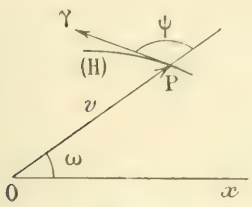
1° *Nature de l'hodographe du mouvement que l'on rapportera aux coordonnées polaires v, ω, en prenant comme pôle le centre O de l'hodographe. On supposera donnée la valeur de v pour $\omega = 0$.*

Relation entre l'accélération tangentielle et la vitesse du mouvement. Variation de la vitesse avec le temps t ; on suppose $\omega = 0$ pour $t = 0$. Variation de l'angle ω avec le temps.

[1] On sait que la surface engendrée par une conique tournant autour d'une droite est en général du quatrième degré et possède une parallèle double.

2° *Expression en fonction du temps des composantes cartésiennes* $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, *de la vitesse du mobile* M. *Expression des coordonnées x et y en fonction de* ω, *de* ψ *et de la vitesse initiale; on déterminera les constantes d'intégration en écrivant que x et y sont nuls pour* $t = \infty$. *Comparer le mouvement de* M *et celui du point représentatif sur l'hodographe.*

1. *Nature de l'hodographe* (H). — Soit P l'extrémité du vecteur v équipollent à la vitesse de M, mené par O. Son lieu (H) est l'hodographe, et γ est la vitesse de P sur (H). D'après la première propriété de l'énoncé, (H) est une courbe qui coupe les rayons vecteurs issus de O sous un angle obtus constant ψ. Cette propriété est caractéristique de la spirale logarithmique, et pour avoir l'équation de (H) en coordonnées polaires, il suffit d'intégrer l'équation



$$v\frac{d\omega}{dv} = \operatorname{tg}\psi.$$

Si v_0 est la vitesse pour $\omega = 0$, on obtient

(1) $$v = v_0 e^{\frac{\omega}{\operatorname{tg}\psi}}.$$

La construction de cette courbe est classique : le point O est un point asymptote. Quand ω croît, v diminue et les spires de (H) se rapprochent du point O.

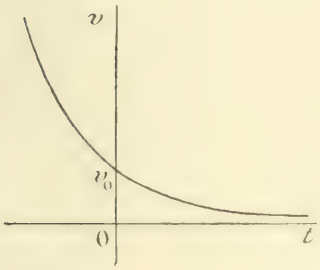
Relation entre γ_T *et* v. — Soit γ_T l'accélération tangentielle du mobile M; c'est la projection de γ sur v,

$$\gamma_T = \gamma\cos\psi = c\cos\psi.v,$$

en vertu de la seconde propriété du mouvement. On en déduit de suite l'expression de v en fonction de t.

On a en effet $$\gamma_T = \frac{dv}{dt}.$$

Égalons les deux dernières expressions de γ_T : $c\cos\psi.v = \frac{dv}{dt}$ ou $c\cos\psi.dt = \frac{dv}{v}$.



Les variables t et v sont séparées, et l'intégrale est

$$v = v_0' e^{c\cos\psi.t},$$

v_0' étant la vitesse de M pour $t = 0$; mais alors, d'après l'énoncé, ω est nul aussi, et v_0' coïncide avec v_0,

(2) $$v = v_0 e^{c\cos\psi.t}.$$

ψ étant obtus, $c\cos\psi$ est négatif, et v décroît constamment avec le temps, sa limite pour $t = \infty$ étant zéro.

Les variations de v avec le temps sont représentées par une courbe exponentielle, l'exposant de t étant négatif.

Relation entre ω *et* t. — Nous avons exprimé v en fonction de ω (formule 1) et en fonction de t (formule 2). En égalant ces deux expressions, nous aurons la relation cherchée,

$$\frac{\omega}{\operatorname{tg}\psi} = c\cos\psi.t$$

(3) $$\omega = c\sin\psi.t.$$

On voit que la courbe (H) est décrite avec une vitesse angulaire constante, $c\sin\psi$.

2. *Calcul de* $\frac{dx}{dt}$ *et* $\frac{dy}{dt}$. — Prenons pour axe Ox l'axe auquel nous avons rapporté (H) en coordonnées polaires et pour Oy un axe faisant l'angle $+\frac{\pi}{2}$ avec Ox. Les projections de v sur ces axes sont

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v\cos\omega = v_0 e^{c\cos\psi.t}(\cos\psi + \sin\psi.t),$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v\sin\omega = v_0 e^{c\cos\psi.t}(\sin\psi - \sin\psi.t).$$

d'où l'on tirerait x et y en fonction de t par deux quadratures, et, par suite, en fonction de ω à l'aide de (3) ; mais pour simplifier l'écriture, nous passerons de suite à ω.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt} = c \sin\psi \cdot \frac{dx}{d\omega} = x_0 e^{\frac{\omega}{\operatorname{tg}\psi}} \cos\omega,$$

et de même,

$$c \sin\psi \cdot \frac{dy}{d\omega} = x_0 e^{\frac{\omega}{\operatorname{tg}\psi}} \sin\omega.$$

En intégrant par parties, ou encore, de façon plus élégante, en formant $\frac{dx}{d\omega} + i\frac{dy}{d\omega}$ et utilisant la formule $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et égalant deux à deux les parties réelles et imaginaires des deux membres intégrés, il vient

$$x - x_0 = \frac{x_0 \sin\psi}{c} e^{\frac{\omega}{\operatorname{tg}\psi}} \left[\sin\omega + \frac{1}{\operatorname{tg}\psi} \cos\omega \right],$$

$$y - y_0 = \frac{x_0 \sin\psi}{c} e^{\frac{\omega}{\operatorname{tg}\psi}} \left[\frac{1}{\operatorname{tg}\psi} \sin\omega - \cos\omega \right],$$

x_0 et y_0 étant deux constantes réelles d'intégration.

Si t augmente indéfiniment, ω en fait autant (formule 3) ; les crochets des seconds membres, sans tendre vers aucune limite, restent finis, mais les exponentielles tendent vers zéro, $\operatorname{tg}\psi$ étant négatif. Donc $x - x_0$ et $y - y_0$ ont pour limite zéro pour t infini.

Pour satisfaire à l'énoncé, nous prendrons donc x_0 et y_0 nuls ; ce qui donne pour expressions de x et y, coordonnées de M, en fonction de ω,

$$(4) \quad \begin{cases} x = \dfrac{x_0 \sin\psi}{c} e^{\frac{\omega}{\operatorname{tg}\psi}} \left[\sin\omega + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\psi} \cos\omega \right], \\ y = \dfrac{x_0 \sin\psi}{c} e^{\frac{\omega}{\operatorname{tg}\psi}} \left[\dfrac{1}{\operatorname{tg}\psi} \sin\omega - \cos\omega \right]. \end{cases}$$

Pour mieux comparer le mouvement de M à celui de P étudions-le aussi en coordonnées polaires.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x_0 \sin\psi}{c} e^{\frac{\omega}{\operatorname{tg}\psi}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\psi} = \operatorname{tg}(\omega - \psi),$$

en appelant ρ et θ les coordonnées polaires de M rapportées à Ox.

Convenons, comme nous en avons le droit, de faire correspondre à ω la détermination de θ comprise entre 0 et 2π ; la dernière formule nous laisse le choix, après inversion, entre

$$\theta = \omega - \psi \quad \text{et} \quad \theta = \pi + \omega - \psi.$$

Mais la figure correspondant à la dernière détermination de θ montre que l'hodographe du mouvement de M_1 serait parcouru dans le sens des ω décroissants, ce qui n'a pas lieu puisque $\omega = c \sin\psi \, t$.

Nous devons donc prendre (5) $\theta = \omega - \psi$.

Alors on a pour équation de la trajectoire de M en coordonnées polaires

$$\rho = \frac{x_0}{c} e^{\frac{\theta + \psi}{\operatorname{tg}\psi}}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = a e^{\frac{\theta}{\operatorname{tg}\psi}}.$$

C'est une spirale logarithmique de pôle O, dont on déduit l'hodographe par une homothétie et une rotation.

Des relations (3) et (5) on déduit $\theta = c \sin\psi . t - \psi$, ce qui montre que la vitesse angulaire de M est constante.

On voit que les mouvements de P et de M s'exécutent avec la même vitesse angulaire, $c \sin\psi$, sur deux spirales logarithmiques déduites l'une de l'autre par une homothétie suivie d'une rotation.

Remarque. — Nous sommes partis pour cette étude des propriétés $(\gamma, v) = \psi = \text{constante}$, $\frac{\gamma}{v} = c$, et nous en avons déduit que le mouvement de M s'exécutait à vitesse angulaire constante sur une spirale logarithmique. Montrons qu'un tel mouvement jouit des propriétés dont nous nous sommes servis.

Soit ψ l'angle constant de OM avec la vitesse de M. Le rayon OP correspondant de (H) se déduira de OM par une rotation de ψ; et de plus, il est évident que OP tournera uniformément autour de O avec la même vitesse angulaire que OM. Montrons que $\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \text{constante}$.

$$\overline{OP}^2 = r^2 = \rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = \rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = k\rho^2,$$

car $\frac{d\theta}{dt}$ est constant et $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta}$ aussi puisque $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta} = \text{cost.}$

L'hodographe se déduit de la trajectoire par une rotation et une homothétie. C'est donc une spirale logarithmique, et $(\gamma, v) = \text{constante} = \psi$. De plus, en reprenant pour (H) la démonstration que nous venons de faire, on voit que le rapport de la vitesse de P à OP est constant,

$$\frac{\gamma}{v} = \text{constante}.$$

Les propriétés dont nous sommes partis sont donc caractéristiques du mouvement auquel nous sommes arrivés.

Remarquons encore que le mouvement de la projection de M sur un axe quelconque passant par O est un mouvement périodique amorti.

Marcel NICOLAS, à Lille.

N. D. L. R. — Pour passer des coordonnées x et y du point M,

$$x = \frac{v_0 \sin\psi}{c} e^{\frac{\omega}{\operatorname{tg}\psi}}\left(\sin\omega - \frac{\cos\omega}{\operatorname{tg}\psi}\right),$$

$$y = \frac{v_0 \sin\psi}{c} e^{\frac{\omega}{\operatorname{tg}\psi}}\left(\frac{\sin\omega}{\operatorname{tg}\psi} - \cos\omega\right),$$

aux coordonnées polaires, il vaut mieux procéder ainsi: écrivons d'abord x et y comme il suit:

$$x = \frac{v_0}{c} e^{\frac{\omega}{\operatorname{tg}\psi}} \cos(\omega - \psi),$$

$$y = \frac{v_0}{c} e^{\frac{\omega}{\operatorname{tg}\psi}} \sin(\omega - \psi),$$

et posons $x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$

Nous aurons $r = \frac{v_0}{c} e^{\frac{\omega}{\operatorname{tg}\psi}}, \qquad \theta = \omega - \psi$

par suite, $r = \frac{v_0}{c} e^{\frac{\theta+\psi}{\operatorname{tg}\psi}}$

C'est l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires.

Bonnes solutions de MM. G. Lyon, à Rodez; Louis Lamé, à Toulouse; J. Dessaux; [illegible]; L. Gonzalez, élève du Anglais, à Lyon; Marescalchi; A. Rousseau, à Fourmies-en-Wepper; P. [illegible], élève des Arts, à Lyon; [illegible] lycée de Nice; Raymond Chinot, à Moulins.

1996. — *On considère la courbe C dont l'équation en coordonnées polaires est* [illegible]

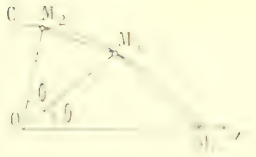
Au point $M_0(\rho = a, \omega = 0)$ *de C l'on associe une infinité de points* $M_1, \ldots, M_n, \ldots$ *de la même courbe, tels que* $\omega_1 = \theta, \ldots, \omega_n = n\theta, \ldots$ *l'on suppose que les points* $M_0, M_1, \ldots, M_n, \ldots$ *sont des points matériels de masses respectives* $m_0 = k, m_1 = k\lambda, \ldots, m_n = k\lambda^n, \ldots$ *proportionnelles à leurs distances au point* O.

1. *Définir le centre de gravité G de ces points matériels en nombre impair. Calculer les coordonnées cartésiennes X, Y, puis les coordonnées polaires R, ω, du point G.*

On calculera à ce propos les expressions $S_k = \sum q^k \cos k\varphi$, $S'_k = \sum q^k \sin k\varphi$, *où k prend toutes les valeurs entières comprises entre* 0 *et* n $(0 \leq k \leq n)$. *On pourra utiliser à cet effet la formule de Moivre.*

2. *Construire, pour* $\theta = \frac{\pi}{2}$, *l'arc de courbe décrit par le point G lorsque* n *varie de* 0 *à* ∞.

1. Désignons par X_n et Y_n les coordonnées du point G, centre de gravité de l'ensemble des $n+1$ points $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$; nous avons



$$X_n = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}, \qquad Y_n = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k},$$

x_k, y_k étant les coordonnées rectilignes du point M_k.

Remplaçons maintenant m_k par ρ_k, x_k et y_k respectivement par $\rho_k \cos\omega_k$ et $\rho_k \sin\omega_k$, nous obtenons

$$X_n = \frac{\sum \rho_k \cos\omega_k}{\sum \rho_k}, \qquad Y_n = \frac{\sum \rho_k \sin\omega_k}{\sum \rho_k},$$

ou, encore, en remplaçant ρ_k par $ae^{-mk\theta}$ et ω_k par $k\theta$

$$X_n = \frac{\sum ae^{-mk\theta} \cos k\theta}{\sum ae^{-mk\theta}}, \qquad Y_n = \frac{\sum ae^{-mk\theta} \sin k\theta}{\sum ae^{-mk\theta}}$$

ou, enfin,

$$X_n = \frac{a \sum e^{-mk\theta} \cos k\theta}{\sum e^{-mk\theta}}, \qquad Y_n = \frac{a \sum e^{-mk\theta} \sin k\theta}{\sum e^{-mk\theta}}.$$

Nous allons chercher si X_n et Y_n ont des limites lorsque n augmente indéfiniment.

Le dénominateur commun $\sum e^{-mk\theta}$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une progression géométrique dont le premier terme est 1 et la raison $e^{-m\theta}$. Pour que la somme ait une limite pour n infini, il faut que la raison soit plus petite que 1, et pour cela que $m\theta$ soit positif. Nous supposerons, conformément à la figure, $m > 0$, $\theta > 0$.

Nous avons alors $$\sum e^{-mk\theta} = \frac{1}{1 - e^{-m\theta}}.$$

Pour calculer les limites des numérateurs de X_n et Y_n, envisageons les sommes

$$S_k = \sum q^k \cos k\varphi, \qquad S'_k = \sum q^k \sin k\varphi.$$

Nous en tirons $$S_k + iS'_k = \sum q^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi) = \sum q^k e^{ik\varphi}.$$

Nous avons encore dans le troisième membre la somme des $n+1$ premiers termes d'une progression géométrique dont la raison est $qe^{i\varphi}$. Cette somme aura une limite si le module de la raison, qui est le module de q, est plus petit que 1.

Nous supposerons cette condition remplie, et en désignant par S et S′ les limites de S_n et de S'_n nous avons $$S + iS' = \frac{1}{1 - qe^{i\varphi}} = \frac{1}{1 - q\cos\varphi - iq\sin\varphi}.$$

ou, en multipliant haut et bas par la quantité imaginaire conjuguée du dénominateur,

$$S + iS' = \frac{1 - q\cos\varphi + iq\sin\varphi}{(1 - q\cos\varphi)^2 + q^2\sin^2\varphi}.$$

Nous en tirons $$S = \frac{1 - q\cos\varphi}{1 - 2q\cos\varphi + q^2}, \qquad S' = \frac{q\sin\varphi}{1 - 2q\cos\varphi + q^2}.$$

Posons alors $q = e^{-\lambda}$ et $\varphi = \lambda\theta$, en remarquant que $q < 1$, nous avons

$$\sum e^{-\lambda\theta}\cos\lambda\theta = \frac{1 - e^{-\lambda}\cos\theta}{1 - 2e^{-\lambda}\cos\theta + e^{-2\lambda}},$$

$$\sum e^{-\lambda\theta}\sin\lambda\theta = \frac{e^{-\lambda}\sin\theta}{1 - 2e^{-\lambda}\cos\theta + e^{-2\lambda}}.$$

On en conclut que X_λ et Y_λ ont des limites X et Y définies par les formules

$$X = \frac{a(1 - e^{-\lambda}\cos\theta)}{1 - 2e^{-\lambda}\cos\theta + e^{-2\lambda}},$$

$$Y = \frac{a(1 - e^{-\lambda}\sin\theta)}{1 - 2e^{-\lambda}\cos\theta + e^{-2\lambda}}.$$

Ce sont les coordonnées rectilignes du point G.

Soient R, α les coordonnées polaires du même point. Nous avons

$$R^2 = X^2 + Y^2 = \frac{a^2(1 - e^{-\lambda})^2}{1 - 2e^{-\lambda}\cos\theta + e^{-2\lambda}},$$

ou

$$R = \frac{a(1 - e^{-\lambda})}{\sqrt{1 - 2e^{-\lambda}\cos\theta + e^{-2\lambda}}}, \qquad \lambda = \frac{m}{2}.$$

Puis

$$\cos\alpha = \frac{X}{R} = \frac{1 - e^{-\lambda}\cos\theta}{\sqrt{1 - 2e^{-\lambda}\cos\theta + e^{-2\lambda}}},$$

$$\sin\alpha = \frac{Y}{R} = \frac{e^{-\lambda}\sin\theta}{\sqrt{1 - 2e^{-\lambda}\cos\theta + e^{-2\lambda}}}.$$

2. Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a

$$X = \frac{a(1 - e^{-\frac{\pi}{2}})}{1 + e^{-\pi}}, \qquad Y = \frac{a(1 - e^{-\frac{\pi}{2}})e^{-\frac{\pi}{2}}}{1 + e^{-\pi}}.$$

Quand m varie, le point G décrit courbe qui mesure du quadrant de gauche; car si l'on pose $e^{-\frac{\pi}{2}} = t$, on a

$$X = \frac{a(1 - t)}{1 + t^2}, \qquad Y = \frac{at(1 - t)}{1 + t^2}.$$

Pour la construire il sera plus simple de se servir des coordonnées polaires. On a

$$R = \frac{a(1 - t)}{\sqrt{1 + t^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

On en tire $t^2 = \operatorname{tg}^2\alpha$ et $t = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$, puisque t ou α est positif. Comme d'autre part $\frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$ est égal à $\cos\alpha$, on a

$$R = a\cos\alpha(1 - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}).$$

Telle est l'équation du lieu en coordonnées polaires.

Nous avons $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} = 1 - \frac{R}{a}$, et α croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Donc $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$ décroît de 1 à 0, et par suite R décroît de $\frac{a}{2}$ à 0.

Nous avons donc à construire l'arc de la courbe correspondant aux valeurs de α comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Quand α croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, les deux facteurs $\cos\alpha$ et $(1 - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha})$

décroissent, donc R décroît de a à 0. On obtient ainsi la branche de courbe AO, tangente en O à la bissectrice de l'angle xOy.

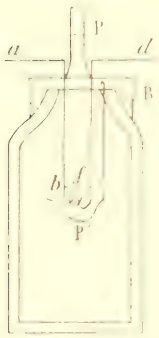
On vérifie aisément que $\frac{dR}{dx}$ est infini pour $x = 0$, donc la courbe est tangente au point A à Ox.

François MARGAND, école des Anglais, à Lyon.

Bonnes solutions par MM. J. Dausses, à Dijon; L. Gouriot, école des Anglais; G. Laur, à Rodez; M. Maire, lycée de Nancy; Marcel Nicolas, à Lille.

1998. 1° *On brûle en vase clos dans une atmosphère d'oxygène pur un gramme d'un hydrocarbure liquide de formule* C^nH^p, *de façon à réaliser une combustion complète selon la formule :*

$$2C^nH^p + (4n + p)O^2 = 2nCO^2 + pH^2O.$$



L'opération est effectuée dans une bombe calorimétrique constituée essentiellement comme suit :

La bombe est fermée par un bouchon B. *L'oxygène est introduit par le dispositif spécial* P. *La matière combustible est placée dans une nacelle de platine* P'. *Le bouchon de l'obus est traversé par deux conducteurs isolés ab et cd servant pour l'allumage. Le courant électrique qui parcourt ces conducteurs porte au rouge et fait brûler le fil de fer f, disposé de façon à pénétrer en partie dans la matière combustible. La bombe est placée dans un calorimètre de Berthelot. Le thermomètre plongé dans ce calorimètre est gradué en centièmes de degré.*

On a réalisé avant l'expérience l'équilibre de température entre l'eau du calorimètre et l'air de la pièce. On constate que la température de l'eau du calorimètre est de 15°,30. *On fait passer le courant et l'on obtient toutes les* 30 *secondes les températures suivantes :*

30 *sec.*	*après le passage du courant*	18°,	60 *sec.*	*après le passage du courant*	18°,14,
90 *sec.*	—	18°,23,	120 *sec.*	— —	18°,30,
150 *sec.*	—	18°,29,	180 *sec.*	— —	18°,27.

On note, après cette dernière mesure, que la diminution de la température observée par minute reste sensiblement constante, et l'on constate que la température du thermomètre est de 18°,15 *six minutes après le passage du courant. L'un expérimentateur opérait à pression d'étalon à* 180 *le calorimètre et des appareils qu'il contient. Le poids de l'eau contenue dans le calorimètre est de* 3273. *La spirale de fer pèse* 0g,025 *et la chaleur dégagée par la combustion d'un gramme de fer est de* 1,6 *grande calorie.*

On demande de calculer en grandes calories la chaleur dégagée par la combustion complète d'un gramme de l'hydrocarbure précité.

On admet que l'on évalue la température lue et la correction de température en commettant pour chacune de ces deux déterminations une erreur inférieure à 1/100 *de degré, et que l'erreur dont peut être affectée la valeur en eau du calorimètre est inférieure à* 2 *grammes. On demande de calculer la valeur maximum de l'erreur relative commise dans la détermination précitée.*

2° *a) La densité de vapeur de l'hydrocarbure* C^nH^p *par rapport à l'air est de* 2,5. *Le quotient du poids de carbone par le poids d'hydrogène contenu dans l'hydrocarbure est de* 5. *On sait que le poids spécifique de l'air est égal à* 14,4 *fois celui de l'hydrogène.*

On demande de déterminer la formule du composé C^nH^p.

b) On a établi d'autre part par des expériences analogues que les réactions ci-dessous effectuées à volume constant comportent les dégagements de chaleur suivants par molécule-gramme de CO^2 *ou de* H^2O *formé :*

1) $C + O^2 = CO^2$ + 94,3 *grandes calories.*

2) $H^2 + O = H^2O$ *(à l'état de vapeur)* + 57,4 *grandes calories.*

La chaleur de vaporisation d'une molécule-gramme d'eau liquide est de 10 *grandes calories,* 8. *Le poids atomique du carbone est* 12.

On demande d'indiquer si le composé C^nH^p est endothermique ou exothermique et de calculer la chaleur de formation d'un gramme de ce carbure à l'état liquide, en se reportant aux résultats de l'expérience précédente.

Les chaleurs dégagées dans les réactions (1) *et* (2) *étant supposées déterminées avec une erreur relative inférieure à* $\frac{1}{100}$, *on demande de calculer la valeur maximum de l'erreur absolue commise dans la détermination précitée.*

3° *On brûle en une heure par combustion complète* 10 *kilogrammes du même hydrocarbure dans un moteur à pétrole qui fournit un travail effectif équivalent aux* 2/10 *de la chaleur dégagée par la combustion de l'hydrocarbure.*

On demande d'évaluer en unités C. G. S. le travail fourni par la machine en une seconde, en prenant comme point de départ l'équivalence entre une grande calorie et un travail égal à 425 *kilogrammètres, et en indiquant la méthode suivie.*

1. Calculons d'abord la correction de température.

Pendant les trois dernières minutes de l'observation, la chute de température est sensiblement constante, ce qui indique que l'échange de chaleur entre la bombe et le calorimètre est terminé. Cette chute est de $18^\circ,27 - 18^\circ,15 = 0^\circ,12$ pendant les trois minutes, soit $0^\circ,02$ pendant chaque demi-minute. Pendant les cinq demi-minutes de l'expérience où la température a varié seulement de 18° à $18^\circ,27$, on peut admettre que la perte de chaleur correspond à $0^\circ,02$ par demi-minute, soit $0^\circ,10$ en tout. Pendant la première demi-minute, où le calorimètre est passé de la température ambiante à 18°, on peut admettre une perte moitié moindre, correspondant, par conséquent, à $0^\circ,01$. En résumé, sans la perte totale, on aurait observé, au bout de 180^{sec}, $18^\circ,27 + 0^\circ,11 = 18^\circ,38$, et la variation de température eût été de $18^\circ,38 - 15^\circ,30 = 3^\circ,08$. La lecture de la température initiale, celle de la température finale et l'évaluation de la correction comportant chacune une erreur maximum de $0^\circ,01$, cette variation de température est déterminée avec une erreur maximum de $0^\circ,03$, soit à $\frac{1}{103}$ près.

La valeur en eau du calorimètre et de ce qu'il contient est de $480 + 3273 = 3753$ grammes à 2 grammes près, soit à $\frac{1}{2000}$ près environ.

La chaleur dégagée est donc $3753 \times 3,08 = 11559$; mais il faut en retrancher la chaleur dégagée par la combustion de la spirale de fer, soit $1600 \times 0,025 = 40$. Il reste donc 11519, chaleur déterminée à $\frac{1}{100} + \frac{1}{2000}$ près, soit *11,5 grandes calories* à 0,1 près environ.

2. *a*) Supposons le poids moléculaire de l'hydrogène égal à 2; sa densité est $\frac{1}{14,4}$.

Le poids moléculaire du carbure est $12n + p$, sa densité 2,5.

Les poids moléculaires étant proportionnels aux densités, on en déduit

$$12n + p = 28,8 \times 2,5 = 72.$$

D'autre part, le rapport du poids du carbone à celui de l'hydrogène étant 5 on a

$$12n = 5p.$$

On tire de là $p = 12$ et $n = 5$. La formule cherchée est C^5H^{12} (c'est celle du pentane).

b) L'équation de la combustion est

$$C^5H^{12} + 8O^2 = 5CO^2 + 6H^2O.$$

La chaleur de formation du gaz carbonique est $5 \times 94,3 = 471,5$.

Celle de l'eau qui, dans les conditions où l'on a opéré, a dû se condenser (les données ne permettent pas de faire d'autre hypothèse), est $6 \times (67,4 + 10,8) = 466,2$.

La chaleur dégagée par la combustion est $72 \times 11,5 = 828$.

Si donc x désigne la chaleur de formation du carbure, on a

$$858 = 474,5 + 409,2 + x \quad \text{d'où} \quad x = 52,7.$$

Le composé est donc exothermique.

Mais les trois nombres dont x est formé sont connus chacun à $\frac{1}{100}$ près : la limite de l'erreur absolue possible est donc 8,3 pour le premier, 4,7 pour le second et 4,1 pour le troisième. La valeur maximum de l'erreur commise sur x est donc, en valeur absolue, $8,3 + 4,7 + 4,1 = 17,1$.

Pour 1 gramme, la chaleur de formation sera $\frac{52,7}{72} = 0,73$ avec une erreur maximum

$$\frac{17,1}{72} = 0,24.$$

3. La combustion de 10^{kgs} du carbure dégage $10000 \times 11,5 = 115000$ grandes calories, dont les $\frac{2}{10}$ sont 23000. Cette chaleur équivaut à $23000 \times 425 = 9775000$ kilogrammètres, ce qui représente $9775000 \times 1000 \times 981 \times 100 \times 98 \times 10^{-9}$ unités C. G. S., soit $\frac{98 \times 10^{9}}{3600} = 265 \times 10^{6}$ par seconde.

1999. — 1° *On traite à froid dans un ballon un mélange d'acide sulfurique concentré et de mercure. On recueille le gaz qui se dégage dans un ballon dans l'eau de chlore. On ajoute dans la liqueur, une fois l'opération terminée, un excès de chlorure de baryum et l'on recueille un précipité dont le poids à l'état sec est de* 10 *grammes.*

2° *On fait réagir de l'acide sulfurique sur du cuivre pur et l'on recueille le gaz dégagé dans l'eau de chlore, comme ci-dessus. Le poids de précipité obtenu après addition de chlorure de baryum est de* 10^{g} *à sec.*

3° *On chauffe de l'acide sulfurique concentré avec du charbon et l'on recueille le gaz dégagé dans l'eau de chlore. On précipite comme ci-dessus par le chlorure de baryum, mais on reprend après filtration le précipité obtenu par l'acide chlorhydrique dilué dans l'eau, et l'on pèse le précipité sec obtenu par filtration de la liqueur chlorhydrique. Le poids de ce précipité est de* 10 *grammes.*

On demande de calculer les poids d'acide sulfurique décomposés dans chacune des trois opérations précédentes. S = 32. O = 16. Ba = 137. C = 12. Hg = 200.

1. La première opération donne lieu aux réactions représentées par les formules suivantes :

$$2SO^4H^2 + Hg = SO^4Hg + 2H^2O + SO^2.$$
$$SO^2 + 2H^2O + Cl^2 = SO^4H^2 + 2HCl.$$
$$SO^4H^2 + BaCl^2 = 2HCl + SO^4Ba.$$

On voit qu'à une molécule ou 233 grammes de sulfate de baryum correspond une molécule de gaz sulfureux et, par suite, deux molécules ou 196 grammes d'acide sulfurique dans la première réaction. A 10 grammes de sulfate correspond un poids d'acide sulfurique

$$\frac{196 \times 10}{233} = 8^{g},412.$$

2. La seconde expérience débute par la réaction

$$2SO^4H^2 + S = 2H^2O + 3SO^2.$$

Le sulfate de baryum correspond toujours, molécule à molécule, au gaz sulfureux, et une molécule de gaz sulfureux correspond ici à $\frac{2}{3}$ de molécule d'acide sulfurique, trois fois moins, par conséquent, que dans le cas précédent. A un précipité de 10 grammes correspond donc un poids d'acide sulfurique

$$\frac{8,412}{3} = 2^{g},804.$$

3. Dans la troisième expérience, on a

$$2SO^4H^2 + C = 2HCl + CO^2 + 2SO^4.$$

On est sûr que le précipité final ne contient que du sulfate de baryum. En effet, le gaz carbonique ne précipite pas le chlorure de baryum et quand bien même on aurait supposé une production de carbonate de baryum, celui-ci aurait disparu par le lavage à l'acide chlorhydrique. Donc, dans cette opération, une molécule de sulfate correspond à une molécule d'acide sulfurique initial et à 10^g correspond un poids

$$\frac{98 \times 10}{233} = 4,206.$$

H. BOURE [illegible].

Bonnes solutions de MM. A. Courtois, 147e d'infanterie ; L. Dag[illegible] et P. Dijoux, [illegible] Anglas à Lyon ; L. Montact, 7e d'artillerie ; N. Savard, 61e d'artillerie.

CONCOURS DE 1912 (*suite*).

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Cours préparatoires.

Algèbre et Analyse.

I. — **2080**. Soit l'intégrale définie

$$y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(kx)\, dx.$$

Peut-on trouver rapidement, pour les valeurs positives de k [illegible] et les valeurs de x comprises entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, un polynome en x

$$Y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

où n soit un entier aussi petit que possible, et qui représente y avec une erreur moindre que 0,001 ?

On pourra s'aider pour les calculs numériques de la table de logarithmes, en prenant $\pi = 3,1416$.

Traiter ensuite le même problème pour $k = 1$ et les valeurs de x comprises non plus entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, mais entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

II. — **2081**. Posant

$$J_n = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

où a est une constante et n un entier plus grand que zéro, on demande de calculer J_n. On pourra par exemple chercher à établir une formule de récurrence où entreront deux au moins des quantités $J_n, J_{n-1}, \ldots$

Indiquer plus généralement une méthode utilisant le résultat obtenu ci-dessus et qui permette de calculer

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)\, dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

où $f(x)$ est un polynome entier en x.

Géométrie analytique.

I. — **2082**. Quelle est la courbe enveloppe de la droite mobile

$$\lambda P + \lambda^2 Q + R = 0$$

λ étant un paramètre variable et P, Q, R des fonctions linéaires de x et de y ?

Retrouver, au moyen du résultat, l'équation de la tangente au sommet (coefficient angulaire $= -1$) à la parabole.

II. — **2083**. Démontrer que le rayon de courbure en un point d'une parabole est le double de la portion de normale comprise entre ce point et la directrice (rapporter la parabole à sa direction OX et à son axe Oy).

Calcul numérique.

2084. Soit la fonction $y = \sin x - x^3$ où x est > 0.

On demande :

De dire combien il y a de racines positives et plus grandes que zéro de la fonction y ; il y en a une au moins.

2° Soit x_1 une de ces racines ; on demande de la calculer de façon que πx_1 soit connu en grades à un centième de grade près.

On s'aidera de la table de logarithmes.

Mécanique.

I. — **2085**. Quelles sont les surfaces de niveau pour un champ de forces où un point de masse m est soumis à la fois à l'action de la pesanteur mg et à celle d'une force constante mK émanée d'un centre fixe ?

II. — **2086**. Un fil de poids négligeable est fixé par l'une de ses extrémités A ; il supporte en B, à une distance donnée $AB = a$ du point A, un poids P ; il passe ensuite sur une très petite poulie C située à la même hauteur que le point A et à une distance AC de ce point égale aussi à a ; enfin il supporte par son extrémité libre un poids $P' = \frac{P}{\sqrt{3}}$.

1° Trouver la figure d'équilibre du système.

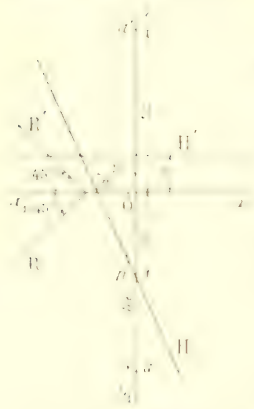
2° Montrer que cette figure d'équilibre est stable.

Epure de Géométrie descriptive.

2087. Le petit axe de la feuille étant xx_1 et le grand axe yy_1, on donne

1° sur le grand axe, le point [illegible] tel que [illegible] ;

2° l'horizontale (H,H') de cote 29^{mm}, dont la projection horizontale coupe les axes aux points m et n tels que [illegible].



On considère

1° le tétraèdre régulier ayant un sommet en (a,a'), une arête dirigée suivant (H,H) et dont le quatrième sommet est à droite du grand axe de la feuille ;

2° la sphère de centre (a,a') dont le rayon est de 65^{mm}.

Représenter le solide formé par l'ensemble de ce tétraèdre et de cette sphère supposés opaques et limités chacun à la partie extérieure à leur intersection commune, et indiquer les ombres (propres et portées par la sphère sur le tétraèdre) produites par des rayons lumineux parallèles à (R,R').

N.-B. — Les lignes de construction étant tracées en rouge, on figurera en noir les arêtes du solide représenté (celles qui sont cachées étant en pointillé), en bleu les limites des ombres (considérées seulement sur les parties vues), les ombres elles-mêmes étant indiquées par une teinte légère ou des hachures bleues.

QUESTIONS PROPOSÉES

2089. — Quelle relation doit exister entre les coefficients de l'équation du sixième degré

$$x^6 - x^5 + b_2 x^4 - \dots + a_4 x^2 + a_5 x + a_6 = 0,$$

pour qu'on ait entre les racines les égalités

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6$$
$$x_1 x_2 x_3 = x_4 x_5 x_6$$

Dr Werner Gaedecke.

2090. — On considère tous les triangles isocèles dont l'un des côtés égaux est fixe. 1° Le lieu des centres des cercles inscrit et exinscrits à ces triangles se compose d'une strophoïde droite et d'une sextique. 2° Trouver le lieu des points de contact de ces quatre cercles avec les côtés du triangle.

E.-N. Barisien.

2091. — On considère une conique de centre O et un point P de son plan. Soient deux cordes rectangulaires variables passant par P, AB et CD. Trouver le lieu des centres des coniques passant par les cinq points O, A, B, C, D. Cas du cercle.

Dr Werner Gaedecke.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT

TABLE DES MATIÈRES

ANNÉES 1910-1911 ET 1911-1912

ALGÈBRE, ANALYSE ET TRIGONOMÉTRIE

Numéros des questions — Pages.

1849 Exercices sur le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dans lequel on a $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 = 1$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} a_{ik} = 0$ . . . 36

1969 Le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & (\alpha-\beta)^2 & (\alpha-\gamma)^2 & (\alpha-\delta)^2 \\ (\alpha-\beta)^2 & 0 & (\beta-\gamma)^2 & (\beta-\delta)^2 \\ (\alpha-\gamma)^2 & (\beta-\gamma)^2 & 0 & (\gamma-\delta)^2 \\ (\alpha-\delta)^2 & (\beta-\delta)^2 & (\gamma-\delta)^2 & 0 \end{vmatrix}$$

est divisible par le carré du déterminant de Vandermonde relatif à $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 103

1966 Quotient des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$ 123

1895 Etudier les séries $n \sin^4 \frac{x}{n}$, $n\left(\sin \frac{x}{n}\right)^{\frac{x}{n}}$ 108

2002 Sommer la série $u_n = \frac{1}{n^2 - 1}$ 153

1766 Dérivée d'ordre n de $e^{\frac{1}{x}}$ 108

1896 Minimum de la surface totale d'un secteur sphérique 108

1922 Etude de la fonction $y = x^x$ $(x > 0)$. Montrer qu'elle vérifie une équation différentielle. Relation entre $y^{(n)}$ et $y^{(n-1)}$ 108

1977 Développer $y = \sqrt{1 - t^2}$ sous la forme

$$x + a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots$$

Déterminer x de façon que lorsque $x = x_0$ on ait à $\frac{1}{100}$ près $y - x = a_0 + \frac{a_1}{x}$. Calculer

Numéros des questions — Pages.

la limite de $\frac{(1 - \cos z)\left(y - \frac{1}{z}\right)}{z \sin z}$

lorsque $z = \frac{1}{x}$ tend vers zéro 184

1986 Aire du triangle curviligne commun à trois cercles de rayons r et dont les centres sont respectivement à les distances $r\sqrt{2}$, $r\sqrt{3}$ et $2r$ . . . 194

1855 Calcul des intégrales

$$\int_0^\infty \frac{x \log x \, dx}{1 + x^2 y^2} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{x^2 - xy + y^2}{(x^2 - y^2)^2} x^2 \sin x \, dx$$ 42

1866 Déterminer λ de façon que

$$f(x) = x^3 + x^2 - \lambda x^2 - \lambda^2 - 2x - \lambda$$

se mette sous la forme

$$(x^2 - px - q)(x^2 - p'x - q'),$$

la différence des deux trinomes étant $x^2 - x$.

Calculer $\int_0^1 \frac{x - 4}{f(x)} dx$ 142

1943 Calculer $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4 - 2x - 1}$ 174

1978 Calculer $\int_0^\infty \frac{e^x}{1 + e^x} \arctg \frac{x}{2} \, dx$,

et $\int_0^\infty \frac{(1 + e^x)}{1 + e^x} \arctg \frac{x}{2} \, dx$,

$f(x)$ étant un polynome en e^x 186

1811 Intégration de l'équation $xy'' - (x + y)y' + y = 0$ . . . 17

1963 Trouver une série quadre vérifiant l'équation $(x^2 - y^2)y'' - 2xy' - y = 0$. Faire un changement de variable $x = \varphi(t)$ de façon à obtenir une équation à coefficients constants. Construire une courbe polaire. Calculer une aire . . . 186

1884 Une surface S est coupée par un plan de cote z suivant une courbe fermée dont l'aire est $f(z)$. Déterminer toute fonction pour que le volume compris entre z et les plans de cotes z_0 et z soit

$$\frac{z - z_0}{6}\left[f(z) + f(z_0) + 4f\left(\frac{z + z_0}{2}\right)\right]$$ 133

Numéros des questions. Pages.

1891 Déterminer une courbe ayant Oy pour axe de symétrie, ayant à l'origine un contact du 3e ordre avec la courbe $y = \frac{x^2}{2}$ et vérifiant l'équation $100\frac{d^2y}{dx^2} + 100\frac{dy}{dx} + y + 100 = 0$ . . . 147

1902 Intégrer $\frac{d^2y}{dx^2} - 5y + 4 = 0$ . . . 222

1911 Étant donné $F(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ calculer $F'(x)$, la sommer et en déduire $F(x)$. Développement de $\frac{1}{x}$ 251

1924 Intégrer $y' + 1 + x(1 - x)y' - 2xy - 2y + 2 = 0$ par les séries 299

1932 Intégrer l'équation $xy' + ay = \frac{x - x^2}{x}$. Variation de l'intégrale qui s'annule pour $x = x_0$ . . . 417

1946 Intégrer $y\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + 2y = 0$ par les séries. Propriétés des séries obtenues. Dans le cas où elles se réduisent à des polynomes, étudier la réalité de leurs racines 436

1965 Intégrer $y' + y = x$. Courbe intégrale tangente à Ox au point O. Aire et arc . . . 50

1898 Calculer à $\frac{1}{100}$ près la racine positive de $\frac{e^x - e^{-x}}{x} = \frac{21}{10}$ . . . 109

1910 Calculer avec 6 décimales exactes la racine réelle de $2x^3 - 3x - 1 = 0$ . . . 200

1934 Dans un hémisphère on creuse une cavité de même centre. Déterminer le rayon de façon que le centre de gravité du solide coïncide avec le pôle de la cavité . . . 337

1974 Condition pour que $x^4 - 4px^3 - 6 = 0$ n'ait qu'une racine réelle comprise entre 0 et 1 . . . 541

2004 L'équation

$$ax^m + mbx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}cx^{m-2} + \dots = 0,$$

où $b^2 - ac = 0$, ne peut avoir toutes ses racines réelles que si elle les a toutes égales . 591

2009 Sur la discussion de l'équation $x^3 - px - q = 0$ où $q^2 < p^3$ sont les coordonnées d'un point . . . 601

1878 Résoudre un triangle ABC connaissant $E = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = k$, AD étant la hauteur issue de A . . . 143

1955 Trapèze ABCD rectangle en A et D. E, point de rencontre de AD et BC. $\widehat{CED} = \alpha$. $EC = a$, $DE = d$. Calculer AC en fonction de a, d, α, et étudier sa variation. Déterminer α connaissant BC $= a$, DE $= d$, AD $= b$ 479

1870 Construire une table des valeurs de

$$u = 1 - \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}\cos(rt - \frac{\pi}{2}), \qquad \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\theta},$$

$$r = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\theta}, \qquad e = 2{,}718, \qquad \log e = 1,$$

$$t = 1 \text{ sec.}, \qquad \theta = 6^{\circ} \text{ . . . . . } 183$$

1879 Calculer x compris entre 0 et 2π tel que

$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt{\frac{32124 \operatorname{tg} A}{5^2 \cos^2 \sin A}}, \qquad A = \frac{3}{7}$$

d'un angle droit. 145

1950 Calculer une table des valeurs de $\frac{x}{\sin x}$ . . . 442

1956 Calculer x, y, z, compris entre 0 et π vérifiant

$$\cos x = \sqrt{\frac{31625}{325138}}, \qquad \operatorname{tg} y = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 2y} \text{ . . . . . } 477$$

GEOMETRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS

Numéros des questions. Pages.

1851 Exercices sur deux cercles sécants 75

1936 Parallélogramme OACB ; sur OA, OB on prend P et Q tels que $\overline{OP}\cdot\overline{OQ} = \overline{AP}\cdot\overline{BQ}$. Lieu du point de rencontre de PB, QA. Le cercle circonscrit à OPQ passe par un point fixe. PD parallèle à OC, AD parallèle à PQ, DE parallèle à OA : lieu du point de rencontre de PQ et DE 361

1949 Triangle AOB rectangle en O. Droites Δ qui coupent OA, OB et AB en des points M, N, P tels que P soit le milieu de MN. Par un point R passent deux droites Δ : réalité. Condition pour que les quatre points de rencontre des droites Δ passant par R et de celles qui passent par R′ soient sur un cercle 500

1979 Enveloppe des cercles passant par l'origine et interceptant sur la droite $x = l$ une corde égale à $2l$ 497, 537

1981 S et S′ centres de similitude d'un cercle variable avec deux cercles C et C′ qu'il coupe orthogonalement. Enveloppe de SS′ et lieu du milieu de SS′ 514

1987 Cercle de centre O, deux diamètres rectangulaires Ox, Oy. D'un point M du cercle on abaisse MP perpendiculaire sur Ox, PQ sur OM ; on prend sur Oy OR = OQ. Enveloppe de la droite menée par R parallèlement à OM 556

2003 Un angle constant AOB tourne autour de son sommet O et rencontre une droite fixe en A et B. Lieu des centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle OAB. Lieu de l'orthocentre . . 581

1984 Constructions relatives à une cubique circulaire à point double 592

1919 Étude de la courbe de Steinmetz 29

1841 Exercices divers sur les courbes telles que la tangente et la normale en chaque point déterminent sur Ox un segment de mesure algébrique constante. Trajectoires orthogonales 8

1843 Déterminer les courbes pour lesquelles le cercle homothétique dans le rapport k par rapport au point M du cercle de courbure en M passe par un point fixe 25

1858 T, projection de l'origine O sur la tangente en M à une courbe C, projection de M sur Ox. Déterminer la courbe de façon que $\frac{OT}{TM}$ soit constant. 60

1844 Exercices sur la strophoïde

$$x^2 - 2ay^2 + x^3 = 0.$$

Lieux et enveloppes 72

1856 D'un point M on abaisse MP, MQ perpendiculaires sur Ox et Oy, puis PR, QS sur OM, sur R et S on mène des parallèles aux axes, qui se coupent en μ et μ'. Étudier la transformation ainsi définie en coordonnées rectilignes et polaires. 87

1883 Construire la courbe $y = \operatorname{tg} x - x$; calculer la racine comprise entre 1 et 1,1 de l'équation

$$\operatorname{tg} x - x = \frac{\pi}{4} \text{ . . . . . } 164$$

1886 A tout point M d'une courbe (C) on fait correspondre un point M′, de même abscisse que M, tel que la parallèle menée par l'origine à la tangente en M et la parallèle à Ox menée par M′ se coupent sur une droite donnée (D) parallèle à Oy. On déduit M″ de M′ de la même manière. Déterminer C de façon que MM′ (ou MM″) soit égale à une longueur donnée 183

1904 Lieu des points de contact des tangentes menées à des cercles variables inscrits dans un angle droit par un point fixe situé sur l'un des côtés de cet angle 223

1889 C et C_1, cercles concentriques. Par un point fixe

Numéros des questions — Pages

P on mène une sécante rencontrant C_1 en A et B. Lieu des points de rencontre des tangentes issues de A et B à C 226

1905 Construire la courbe $y = (x - 1)^2 - 1$. Calculer la valeur de x qui annule y . . . 240

1906 Trajectoires orthogonales des courbes
$$r^2 = -2r^2 \cos 2\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 241$$

1921 Déterminer une courbe telle que la projection sur Ox du centre de courbure en un point M soit le point T où la tangente en M rencontre Ox . 242

1912 Enveloppe et trajectoires orthogonales des paraboles qui ont même axe et même directrice. 258, 2[illegible]

1909 Courbe $(x^2 + y^2)^2 - ay(x^2 - y^2) = 0$. Intersection avec un cercle passant par l'origine. Lieu des milieux des cordes de la courbe vues de l'origine sous un angle droit. 274, 336

1926 M point variable d'un cercle fixe, H projection de M sur un diamètre fixe. Sur la tangente en M on prend les points P et P′ tels que
$$MP = MP' = MH.$$
P et P′ décrivent des cardioïdes ; les tangentes en P et P′ se coupent en T, les normales en N. Lieu de T, enveloppe de TN, de PH et P′H . . 288

1927 Trajectoires orthogonales de cercles dépendant d'un paramètre. Lieu des points d'inflexion de ces trajectoires. Lieu des centres de courbure aux points où elles coupent le cercle variable . 312

1925 AB diamètre fixe d'un cercle O, M point variable du cercle, C et C′ deux points de AM tels que $CM = C'M = k$. Lieu des centres de similitude : 1° du cercle O et du cercle de diamètre AM ; 2° des cercles de diamètres AM et BM ; 3° du cercle O et du cercle de diamètre MC. . . . 326

1939 Il y a une infinité de cubiques circulaires passant par les sommets d'un triangle, l'orthocentre et les pieds des hauteurs. Lieu du foyer singulier, enveloppe de l'asymptote 362

1937 Lieu des milieux des cordes interceptées sur une cissoïde droite par une sécante de direction fixe. 377

1938 $M'(x', y')$, P projection de M′ sur Ox, M symétrique de P par rapport à OM′. Calculer l'affixe de M. Lieux de M′ quand M décrit une droite ou un cercle, et inversement. 387

1933 AA′ diamètre fixe d'un cercle, P point du diamètre, M point du cercle tel que $MP = MA'$, M′ projection de M sur la tangente en A. Enveloppes de M′P, de la perpendiculaire au milieu de M′P, des perpendiculaires menées de M′ sur MP, de M sur M′P. Lieux du centre du cercle circonscrit et de l'orthocentre de MM′P 395

1941 AB diamètre fixe d'un cercle, M point de ce cercle. Sur AM on prend $MC = m.MB$ et sur BM $MD = n.MA$. Lieu des centres et enveloppes des cercles AVD, BMC, ACD, BCD ; lieu du point de rencontre de AD, BC. Enveloppe de CD . [illegible]

1945 Triangle ABC inscrit dans un cercle O, A est fixe et $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = k^2$. Lieu de la projection de A sur BC. Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle OBC, du centre de gravité, enveloppe de BC. . . . 437

1845 C et C′ coniques fixes, M et M′ points d'une droite par rapport à ces coniques. Lieu de ces points lorsque le milieu de MM′ est situé sur une droite donnée . . . 44[illegible]

1837 C, C′ coniques ayant un foyer commun F ; P point situé sur l'une des directrices relatives à F. Condition pour que les tangentes menées de P aux deux coniques forment un faisceau harmonique . . . 44[illegible]

1847 M point variable sur un segment fixe AB. Sur AM et MB on construit des triangles APM, MQB ayant leurs côtés parallèles à deux directions fixes. Lieu du milieu de PQ, enveloppe de PQ, lieu de la projection de M sur PQ . . . . . [illegible]

1838 Exercices sur les normales issues d'un point à une parabole . . . . . [illegible]

1860 AB et CD cordes perpendiculaires d'une ellipse passant respectivement par les foyers F et F′. P et Q pôles de AB et CD. Enveloppe de PQ. Lieu du point de rencontre de PQ et AB . . . [illegible]

1861 Enveloppe des coniques ayant un foyer fixe, la longueur du grand axe constante, dont le deuxième foyer décrit une droite ou un cercle . [illegible]

1853 Coniques bitangentes à un cercle et passant par deux points d'un autre cercle. Lieu du pôle d'une droite fixe. . . . . [illegible]

1840 Courbe $x = \dfrac{k - t^2}{t}$, $y = \dfrac{k + t^2}{t}$. Condition pour que trois points t_1, t_2, t_3 soient en ligne droite. Condition pour qu'il existe une conique C tangente aux trois points t_1, t_2, t_3. Exercices sur ces coniques. 156

1897 A, B points fixes d'une conique, M point variable sur cette conique. Lieu du point de concours des hauteurs du triangle ABM . . . . . [illegible]

1916 Lieu du milieu d'une droite de longueur donnée dont les extrémités décrivent l'une une ellipse et l'autre le grand axe de cette ellipse . . . . [illegible]

1907 M point d'une parabole, P projection de ce point sur l'axe, Q point de rencontre de la tangente avec l'axe, C le cercle MPQ. Lieu du sommet et enveloppe de la seconde parabole passant par l'intersection de la première et du cercle C . . [illegible]

1915 Enveloppe des paraboles de directrice fixe dont le foyer décrit une droite ou un cercle . . . . . [illegible]

1917 Exercices sur une parabole tangente aux axes de coordonnées . . . . . [illegible]

1908 M point d'une ellipse de centre O, Δ perpendiculaire à OM au M. P et Q points où les parallèles menées par O à la tangente et à la normale en M rencontrent Δ. Limite de P et de M . . . [illegible]

1929 Sur le point de rencontre de l'axe d'une parabole et de sa directrice on mène une sécante MN ; on joint FM, FN, F′ foyer et par M et N on mène des parallèles à l'axe qui rencontrent FN et FM en M′ et N′. Le trapèze MMNN′ est inscriptible et circonscriptible. Lieu des points de contact du cercle inscrit. La différence
$$\frac{1}{NN'} - \frac{1}{MM'}$$
est constante . . . . . [illegible]

1913 Triangle rectangle AOB, hauteur OH, P parallèle et H symétriques équidistants par rapport au triangle AOB, et point respectif Q est direction asymptotique. P est tangente à trois droites fixes. H passe par quatre points fixes. Lieu des points de rencontre de P et H, quand HP varie. Lieu du centre de H, du foyer et du sommet de P . [illegible]

1867 C, Q, H quadriques inscrites à une ellipse, par un point M de l'ellipse. Les perpendiculaires MA, MB, MC à MF, MQ, MH rencontrent QR, RP, PQ en trois points sur une droite. Enveloppe de cette droite quand M décrit l'ellipse . . 451, [illegible]

1871 Les droites tangentes aux sommets forment avec les côtés d'un quadrilatère complet. Les points d'intersection de certaines tangentes sont situés sur les droites qui les joignent sur les diagonales comme diamètres . . . . . [illegible]

1872 Parabole P, $y^2 = 2px$, droite D, $x = -\frac{p}{2}$. Une droite A passant par H rencontre P en A, D en B. Lieu du pôle M de M. Enveloppe par rapport à P de tangentes homologues par rapport à A et B. Les tangentes en M et M′ se coupent la tangente en A en T et T′ . [illegible]

Numéros des questions — Pages

Lieu (Γ) de I et I'. Exercices sur les tangentes menées du point I à la courbe C. 512

1977 Lieu des centres des coniques passant par un point P, par deux sommets opposés d'un quadrilatère et par le point de contact des tangentes issues de P à une conique variable inscrite dans le quadrilatère . . . . . [illegible]

1972 Cercle C tangent en M à une ellipse et passant par le centre O. Lieu du centre C, du point de rencontre de MC avec le cercle; enveloppe de la corde QS [illegible] lieu du milieu de QS . . . . . [illegible]

1983 Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle conjugué commun à une sphère S et à une conique variable passant par quatre points . . [illegible]

1985 M point variable d'une ellipse, C centre de courbure, P et Q [illegible] La corde PQ est normale à une ellipse fixe; lieu du point de rencontre de MC et PQ. Lieu du centre de gravité du triangle MPQ. Lieux du milieu de PQ et du pied de PQ . . . [illegible]

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS

1862 Par un point P de la courbe [illegible] on mène une parallèle Oz sur laquelle on prend un vecteur PM égal à l'aire limitée par la courbe, Ox et OP. Etude de la courbe gauche lieu de M. Plan normal, plan osculateur, courbure . . . . . [illegible]

1909 Etude de la surface [illegible] . . . [illegible]

1885 Exercices sur la surface [illegible] sur la surface [illegible] Détermination de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux . . . . . [illegible]

1845 A tout [illegible] plan tangent au sommet d'un paraboloïde de révolution on fait correspondre le pôle du plan de la conique section du paraboloïde et du cylindre qui a C pour section droite. Etude de cette correspondance . . . . . [illegible]

1836 Si deux quadriques qui ont deux génératrices communes [illegible] coupent à angle droit en tous les points de l'une d'elles, elles se coupent à angle droit en tous les points de l'autre . . . . . [illegible]

1844 Complexe des droites dont les conjuguées par rapport à deux quadriques concourent 193

1890 Sur les droites D dont les conjuguées D' et D'' par rapport à deux paraboloïdes équilatères [illegible] P, Q [illegible] sont dans un même plan. Montrer que D et D' sont à la même distance de l'axe, font le même angle avec l'axe. Soit D_1 une droite D, D_2 sa conjuguée par rapport à P, D_3 conjuguée de D_2 par rapport à Q, ... étudier la distribution de ces droites. . . . . [illegible]

1923 Lieu des points dont les projections sur les génératrices d'un même système d'un hyperboloïde à une nappe sont dans un même plan. Ce plan est cyclique, et le lieu se compose de six droites . 285

1950 Sur les lignes asymptotiques de la surface [illegible] . . . 460

1960 Sur les cercles situés sur le tore. Courbes qui coupent les parallèles sous un angle donné. Sphères passant par les cercles des plans bitangents . . [illegible]

2003 Etudier la surface [illegible] 593

MÉCANIQUE

Numéros des questions — Pages

1839 Déterminer la trajectoire d'un mobile sachant qu'elle est plane et que les composantes tangentielle et normale de l'accélération sont constantes toutes les deux 24

1873 Calculer les composantes du vecteur vitesse dans un mouvement de rotation. Application numérique . . . . . [illegible]

1874 Conique $x^2 + 4y^2 - 2py = 0$, P et P' points diamétralement opposés; du point M (α, β) on abaisse MQ et MQ' perpendiculaire sur OP et OP'. La droite QQ' passe par un point fixe S. Etudier le mouvement de M sachant que MS est le vecteur accélération 139

1882 Mouvement du point [illegible] défini par les équations [illegible] $\int \frac{dz}{z} = t$ [illegible] $\sqrt{\frac{[illegible]}{[illegible]}}$ Correspondance entre les points [illegible] Calcul des volumes. Détermination d'un centre de gravité 401

1892 Un point parcourt une développante de cercle avec une vitesse qui croît proportionnellement au temps. Déterminer l'accélération totale, et l'hodographe. . . . . [illegible]

1918 Mouvement [illegible] a, b, c étant les coordonnées du point P. Ce point reste sur une surface S telle que le vecteur vitesse fasse un angle constant avec une droite fixe. Accélérations totale, tangentielle, rayon de courbure. . . . . [illegible]

1934 Fixe, Q mobile sur Oz, OA, la moitié sur Oz, [illegible] sur PQ comme diagonale on construit le carré PBQS. Montrer que R est fixe et trouver le lieu de S. Par S on mène une parallèle [illegible] qui rencontre PQ en M. Lieu de M. Mouvement de M sachant que le vecteur vitesse de M est la projection orthogonale de MR sur PQ. Mouvement de P et Q . . . 472

1995 Sur le mouvement d'un mobile dont l'accélération γ et la vitesse v font un angle constant et sont dans un rapport constant . . . . . [illegible]

1859 Point pesant mobile sur un cercle horizontal qui tourne autour d'un axe vertical en passant par le centre. Etudier le mouvement. 63

1868 Mouvement d'un point soumis à l'action de la force [illegible] Exercices divers. 113

1935 Exercices sur le mouvement d'un point pesant sur un plan incliné avec frottement . . . . . [illegible]

1948 A tout point M de l'espace on fait correspondre un point R de l'axe des z, tel que MR rencontre une parabole du plan des xy. Etudier le mouvement de M soumis à l'action de la force MR [illegible]

1964 Sur le mouvement de deux points soumis à l'action d'une force inversement proportionnelle au carré de la distance, l'un des points ayant un mouvement circulaire, et l'autre un mouvement parabolique 508

1976 Mouvement d'un point attiré proportionnellement à la distance par un centre qui se déplace sur Ox d'un mouvement uniforme 544

1863 Equilibre d'un point pesant assujetti à se mouvoir sur une ellipse et attiré en outre par une force proportionnelle à la distance et émanant d'un sommet de l'ellipse 85

1893 Equilibre d'une tige pesante dont une extrémité est fixe et dont l'autre est attachée à un fil qui passe sur une poulie et porte un poids 190

1899 Equilibre d'une tige pesante AB, mobile autour de A; son centre de gravité est attaché à un fil

Numéros des questions — Pages.

qui passe sur une poulie (située sur la verticale de A) et porte un poids. . . . . [illegible]

1900 Toutes les fois que cinq forces se font équilibre sur un même solide, leurs lignes d'action rencontrent deux mêmes droites . . . . . 2[illegible]

1919 MV moment linéaire par rapport à M d'un vecteur porté sur Oz et ayant pour valeur [illegible] MF symétrique de MV par rapport au plan mené par M parallèlement à yOz. MF est l'intensité d'un champ de forces. Surfaces de niveau, lignes de forces. Lieu de V, surface engendrée par MV quand M décrit un cercle 277

1931 Equilibre d'une barre pesante OA, le point O étant fixe à l'origine, et le point A étant sollicité par une force AM, le point M étant dans le plan des xy . . . . . [illegible]

1953 Exercice sur la poulie fixe avec frottement . . . 471

1989 Poulie mobile. Calcul d'une fonction des forces et des lignes de niveau. 566

1990 Equilibre de deux tiges articulées OA et AB, le point O étant fixe et le point B assujetti à se déplacer sur l'horizontale du point O. . . . . [illegible]

1996 Exercices sur le centre de gravité d'un ensemble de points. 601

ÉPURES

1865 Intersection de deux paraboloïdes hyperboliques. (Agrégation des sciences mathématiques, 1909). 42

1869 Intersection d'une sphère et d'un paraboloïde hyperbolique. (Ecole Polytechnique, 1910) . . [illegible]

1877 Intersection d'une surface gauche de révolution et d'un cône de révolution. (Ecole Centrale, 1910). 172

1901 Ombres d'un segment d'hyperboloïde de révolution. (Ecole des Ponts et Chaussées, 1910) . . . 230

1885 Intersection d'un paraboloïde hyperbolique et d'un paraboloïde de révolution. Ombres. (Ecole Normale supérieure, 1910). . . . . [illegible]

1913 Développement de la surface latérale d'une portion de cône comprise entre deux cylindres. (Ecole Nationale supérieure des Mines. Section réservée aux sous-ingénieurs et aux contrôleurs, 1910). [illegible]

1949 Intersection d'un hyperboloïde de révolution et d'une sphère. Ombres. (Ecole Polytechnique, 1911) . . . . . [illegible]

1957 Ombres d'un solide de révolution formé par une sphère, un hyperboloïde et un paraboloïde. (Ecole Centrale, 1911). . . . . [illegible]

1980 Intersection d'un hyperboloïde et d'un cône. (Ecole des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, 1911). [illegible]

1962 Intersection d'un hyperboloïde à une nappe [illegible] par trois génératrices rectilignes et d'un paraboloïde hyperbolique. Ombres. (Ecole Normale supérieure, 1911) . . . . . [illegible]

1997 Intersection d'un tore et d'un cylindre de révolution (Ecole des Mines de Saint-Etienne, 1911). 533

2026 Intersection de deux hyperboloïdes de révolution à une nappe. (Agrégation des Sciences mathématiques, 1911) . . . . . [illegible]

1944 Exercice de géométrie descriptive . . . [illegible]

PHYSIQUE

1848 Système de lentilles. Points nodaux . 31

1781 Point brillant fixe [illegible] un miroir plan, mobile autour d'un axe vertical. 47

1871 Système centré formé d'une lentille convergente et d'un miroir concave. Trouver les deux points de cette [illegible] pour lesquels [illegible] coïncident. [illegible]

1887 [illegible] 141

1888 [illegible]

1889 Exercices sur un électromètre [illegible]

1894 Exercices sur un appareil de Bréguet [illegible] relatif à la flexion [illegible] 151

1951 Projet de mesure de MJC par la méthode de Gauss à l'approximation de $\frac{1}{1000}$ 249

1920 Sur les oscillations d'un barreau aimanté suspendu [illegible] 403

1946 Calculer l'indice d'un prisme solide de très petit angle 403

1958 Calculer la densité d'une vapeur 478

1[illegible] Exercices sur un système [illegible] lentilles simples infiniment minces. . . . [illegible]

1[illegible] Durée d'oscillation [illegible]

1963 Exercices sur un galvanomètre 567

1[illegible] Détermination de l'indice d'un verre par la méthode du goniomètre 568

1992 Sur les moments magnétiques de deux barreaux aimantés [illegible]

CHIMIE

1833 Exercices sur un mélange de [illegible] et de phosphore dissous dans un [illegible] d'eau. [illegible]

1865 Déterminer la quantité de chlorhydrate d'ammoniaque qui se trouve dans un mélange . . . [illegible]

1874 Déterminer les proportions de soude et de potasse contenues dans un litre d'une solution . [illegible]

1878 Mélange d'oxalate neutre de potassium et de formiate de potassium chauffé avec un excès d'acide sulfurique. Déterminer la composition . . . [illegible]

1952 Remarques sur le programme de chimie [illegible] de l'Ecole Polytechnique (1911). Déterminer la nature et l'importance d'un [illegible] de fumée de [illegible] [illegible]

1963 Sur la préparation de l'ammoniac, de l'acide métaphosphorique, [illegible] et de l'hydrogène [illegible]

1984 Calculer le poids de permanganate de potassium contenu dans une dissolution [illegible]

1993 Détermination de la nature et de la composition du mélange au moyen de trois expériences [illegible]

1994 Exercices sur la dissociation du [illegible] [illegible]

1998 Exercices sur un hydrocarbure de la forme [illegible] [illegible]

1999 Calculer les poids d'acide sulfurique [illegible] dans trois opérations [illegible]

NOTES ET COMMUNICATIONS

Sur l'intégration de certaines équations [illegible] par M. G. [illegible] [illegible]

Résolution de l'équation [illegible] par M. S. [illegible] [illegible]

Sur les [illegible] homogènes par M. G. [illegible] [illegible]

Conditions pour qu'une équation algébrique [illegible] par M. [illegible] [illegible] 177

Questions proposées. Pages.

Sur l'emploi de la règle à calcul aux examens, par M. A. Sainte-Laguë . . . . . [illegible]

La Mathématique d'aujourd'hui, par M. C. Milloux [illegible]

Sur l'identité [illegible], par M. G. Fontené . . [illegible]

Sur l'intégrale $\int \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$, par M. G. Fontené [illegible]

Formule de Trénoulieau, par M. A. Sainte-Laguë . [illegible]

Propriétés des polynomes réciproques, par M. Maxime Weill [illegible]

Produit de deux séries, par M. G. Valiron 458

Sur la méthode d'approximation de Newton, par M. R. Vinéjoux . . . . . [illegible]

Sur le calcul des racines réelles d'une équation, par M. G. Cotty . . . . . [illegible]

Sur le rayon de courbure des courbes planes, par M. Louis Sire . . . . . [illegible]

Sur la courbure des courbes triangulaires, par M. Valiron . . . . . [illegible]

Sur la lemniscate, par M. J. Denis 129

Sur le rayon de courbure de la lemniscate (M. O.) [illegible]

Sur le rayon de courbure des coniques, par M. V. Jamet. 212

Sur certaines familles de courbes planes, par M. J. Haag. 305

Sur les normales à la parabole, par M. Chantrelle . . 281

Sur les centres de courbure des coniques et des coniques doubles coniques homologiques, par M. E. Chollet [illegible]

Sur le rayon de courbure d'une conique, par M. Louis Sire . . . . . [illegible]

Sur le rayon de courbure d'une kreuzcurve, par M. Louis Sire . . . . . [illegible]

Questions proposées. Pages.

Note sur l'enveloppe de paraboles de directrice donnée, par M. Carette. 561

Note de géométrie, par M. A. Darmon 562

Exemple de détermination simultanée de deux courbes par deux équations différentielles, par M. G. Fontené. 505

Sur l'inversion des lignes de courbure, par M. G. Valiron. 238

Surfaces réglées réciproques, par M. E. Keraval. . . 57

Sur l'enveloppe d'une droite, par M. Ch. Halphen . . 131

Sur les surfaces qui ont un axe ternaire, par M. Ch. Bioche 261

Sur une propriété des lignes de courbure, par M. E. Traynard. 283

Leçon sur la courbure des courbes gauches, par M. E. Sauvage 411

Equation tangentielle d'un conoïde, par M. R. Blum . 434

Sur le mouvement dans un plan d'une droite de longueur constante et sur la théorie du centre instantané, par M. Raymond Beer. 538

Note sur le mouvement des projectiles, par M. J. Piglowski. 341

Note sur le moment d'un couple (E. H.). 132

Note sur le mouvement des planètes, par M. E. Marchand. 413

[illegible] . . . . . [illegible]

BIBLIOGRAPHIE

Introduction à la théorie des nombres algébriques, par le docteur J. Sommer, traduit de l'allemand par A. Lévy. 208

EXAMENS ET CONCOURS

Agrégation des Sciences mathématiques.

1909 . . . . . 42.
1910 . . . . . 214.
1911 . . . . . 297, 512, 576.
1912 . . . . . 595.

Concours d'admission des agents des postes aux cours de l'Université.

1910 . . . . . 83.

ÉCOLES

École Normale supérieure et Bourses de Licence.

1910 . . . . . 153, 158, 160, 164, 165, 183, 185, 215.
1911 . . . . . 272, 469, 483, 491, 507, 508.
1912 . . . . . 549.

École Polytechnique.

1910 . . . . . 90, 109, 115, 116, 118, 133.
1911 . . . . . 251, 389, 436, 438, 442, 443.
1912 . . . . . 546.

École Centrale

1910 . . . . . 138, 141, 142, 143, 145, 152.
1911 . . . . . 254, 424, 471, 472, 475, 477, 478.
1912 . . . . . 583.

École Nationale supérieure des Mines de Paris

Places réservées aux Sous-Ingénieurs et Contrôleurs.

1909 . . . . . 22, 222, 223.
1910 . . . . . 47, 265, 266, 269.

Cours préparatoires.

1910 . . . . . 187, 189, 190, 191.
1911 . . . . . 375, 562, 566, 567, 568, 569, 570.
1912 . . . . . 579.

École Nationale des Mines de Saint-Etienne.

1911 . . . . . 382, 533, 598, 601, 604, 606.

École des Ponts et Chaussées.

Cours spéciaux.

1910 . . . . . 22, 240, 241.
1911 . . . . . 324, 541.

[illegible]

1910 . . . . 104, 110, 199, 234, 239.
1911 . . . [illegible]
1912 . . . . . 607.

Ecole Navale.

1912 . . . . . 558.

Ecole professionnelle supérieure des Postes et Télégraphes (2e section)

1910 . . . . . 101, 242.

École supérieure d'Aéronautique et de Construction mécanique

1910 (1re session) 176.
1910 (2e session) [illegible]
1911 (1re session) 700.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

Ecole Polytechnique

1910 . [illegible]
1911 . [illegible]

Ecole Centrale

1910 . [illegible]
1911 . . [illegible]

NOMS DES AUTEURS

ABRAMESCU (N.), [illegible]
BARISIEN (E. N.), [illegible] 137, [illegible] 331, [illegible] 412, [illegible] 526, [illegible], [illegible], [illegible], 605.
BARRIANT (A.), 480.
de BAUDOUIN (J.), [illegible]
BEAUVAIS (Gaston), [illegible]
BENOIT-GÉNIN, 445.
BEER (Raymond), [illegible]
BIOCHE (Charles), [illegible]
BLUM (R.), [illegible]
BOULIGAND, [illegible]
BOURCIER (F.), [illegible]
BOYER (R.), 607.
BROS, [illegible]
BUI-QUANG-NGAI, [illegible]
CARETTE (M.), [illegible]
CARON (L.), [illegible]
CARVALLO (Jacques), [illegible]
CHANGLY (P.), [illegible]
CHANTRELLE, [illegible]
CHIROL (R.), 569, 570.
CHOLLET (A.), [illegible]
CLOUEZ (E.), 500.
COMMISSAIRE (H.), 410.
COTTY (G.), [illegible]
COURTOIS (André), [illegible]
COUSIN (G.), 558.
COUSTY (H.), 480, 504.
D. (A.), 8, 314.
DARMON (A.), 198, 553, 562
DENIS (J.), 129.
DEPERROIS, [illegible]
DESSIRIER (J.), 227.
DONTOT (R.), 81, 228, 254, 467, 497, 543, 582.
DURAND (A.), 119, 520.
F. (G.), 422.
FONTENÉ (G.), 56, 305, 505.
G. (J.), [illegible]
GAUCHICKI (W.), [illegible] 608.
GÉRARD, 53, 353.
GUADET, 198.
GUELER (R.), 328.
GUILLERME (Gr.), [illegible]
H. (E.), 32, 80, 102, 104, 132, 138, [illegible] 167, 198, 208, 410, 445, 456, 471, [illegible]
HAAG (J.), 12, 37, 291, 306.
HALPHEN (Gr.), [illegible]
JABLONSKI, 125, 357.
JAMET (V.), [illegible]
KERAVAL (R.), [illegible] 598.
L. (G.), 536.
L. (P.), 141, 145, 146.
LACH (G.), 80, 143, 171, 191, 199, [illegible] 353, 369, 472, 502, 536, 568.
de LAPIERRE (H.), 65.
LEMOYNE (T.), 366, 381.
LE MENS (L.), [illegible]
LEONZI, 30.
LÉVY (A.), 208.
LIENARD (A.), 153, 177.
M. (P.), [illegible]
MACÉ DE LEPINAY (A.), 225, 420.
MALAISE (R.), 592.
MALLOIZEL, 147, 404.
MANEN (R.), 128, 334, 402, 554.
MARCHAND (F.), [illegible]
MARESCALCHI, 124, 289.
MARYANO (François), [illegible]
MASSING (Camille), 456.
MILHAUD (G.), 209.
MONTAUT (H.), [illegible]
NAUCHE (H.), [illegible]
NÈGRE (A.), 325.
NÉVEJANS (P.), 14, 24, 63, 87, 170, 189.
NICOLAS (Marcel), 566, 601.
NICOLESCO, 304.
NYEGAARD (Jean), 450.
O. (M.), 167, [illegible]
OTTENHEIMER (J.), 254, 365, 380, 567.
PERRIN (Louis), 119.
PEYRARD (A.), 31.
PIGLOWSKI (J.), [illegible]
POULAIN (René), 345.
R. (G.), [illegible]
RÉMI, 212, [illegible] 521.
RÉMONDIN (Paul), 86.
ROUSSEAU (A.), 199, 222, 343, 447, 453, 495, 503, 542, 557.
S. L. (A.), 295, 296, 533.
SAINTE-LAGUË (A.), 42, 71, 72, 138, 180, 360, 432, 433.
SALLERON (P.), 165, 167, 190, 265, 266, [illegible]
SAUVAGE (E.), 411
SIRE (Louis), 1, [illegible] 207, 300, 361, 385, 482.
SOMMER (J.), [illegible]
SOUBAIGNÉ (J.), 85, 142, 168, 184, 185, [illegible] 441, 451, 475, 478, 511, 518, 529.
TAYON (René), 77.
TETU (M.), 348.
THÉVENIN (R.), 225.
THOMAS (J.), 49.
TRAYNARD (E.), 283.
TRICHARD (P.), 592.
VALIRON, 105, 233, 238, 257, 410, 458.
VERGNES (P.), 382.
VILLAIN (P.), 280.
VINTEJOUX (R.), 481.
VIVIER (T.), 32.
WEILL (Mathieu), 457.
ZIVY (L.), 239.

QA
1
R486
année 21-
22

Revue de mathématiques
spéciales

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY